ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Ю. В. ЧАЙКОВСКИЙ

# О ПРИРОДЕ СЛУЧАЙНОСТИ

Издание второе, исправленное и дополненное

ЦЕНТР СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
МОСКВА 2004

**Чайковский Ю.В. О природе случайности. Монография. 2-е изд., испр. и доп. Вып. 27. «Ценологические исследования».** – М.: Центр системных исследований – Институт истории естествознания и техники РАН, 2004. – 280 с.

Предлагаемая читателям монография – мировоззренческая. Опираясь на обширную библиографию, в ней рассмотрена природа случайности и вероятности с позиций алеатики, общей науки о случайном. Приведено глубокое историческое толкование ключевых терминов теории, критически оценено нормальное распределение и предельные законы, но главное – объяснён феномен *случайности без вероятности* и *теории без предельных теорем*, математический аппарат которого эмпирически определён законами (распределениями) Парето, Ципфа, Мандельброта, устойчивыми гиперболическими Н-распределениями Кудрина.

Монография предназначена для научных и практических работников всех специальностей, использующих математическую статистику. Концептуально монография особенно важна для лиц законодательной и исполнительной власти, бизнесменов и менеджеров всех уровней, профессионалов гуманитариев и технариев, принимающих (ценологические) решения по повышению эффективности больших систем в условиях неопределённости и неполноты информации и сталкивающихся с невозможностью ориентироваться на среднее (математическое ожидание) из-за большой ошибки (бесконечной дисперсии).

Рис. 19. Библ. 296

ISBN 5-901271-20-3

Лицензия № 69-290

© Чайковский Ю.В., 2004.
© Кудрин Б.И. О втором издании, 2004.

# ОГЛАВЛЕНИЕ


Институт истории естествознания и техники....1

Российская академия наук....1

О ВТОРОМ ИЗДАНИИ....8

Предисловие редактора серии....9

**Б. КУДРИН....13**

Предисловие....14

Введение....16

*0-1. Этот загадочный полет монеты....16*

*0-2. Талант и бездарь, или о пределах статистики....17*

*0-3. Случайности бывают разные....19*

*0-4. Случайность и алеатика....21*

*0-5. Случайность и вероятность....23*

*0-6. Вероятностями не обойтись....25*

*0-7. Нужна история....26*

*0-8. Неясность исходных позиций теории вероятностей....28*

**ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. СТАНОВЛЕНИЕ АЛЕАТИКИ....32**

Глава 1. Рождение проблемы....32

*1-1. Смыслы слова "случайность" у греков....32*

1-1.1. Случайность у греческих врачей....35

*1-2. Случайность и вероятность у греческих философов....36*

*1-3. Анализ случайности, не требующий понятия "вероятность"....38*

*1-4. Случайность у римлян....40*

*1-5. Первые количественные подходы....42*

Глава 2. Что такое вероятность....45

*2-1. Ранние смыслы термина "вероятность"....45*

*2-2. Кардано, ученый игрок....46*

*2-3. Вероятность у Паскаля....50*

*2-4. Вероятность у Лейбница....51*

*2-5. Четыре понимания вероятности у Якоба Бернулли....53*

2-5.1. Равновозможности и их исчерпание....56

*2-6. Частота и вероятность – от Граунта к Мизесу....57*

*2-7. Вероятность как тенденция....60*

2-7.1. Тенденция при падении монеты....62

*2-8. Вероятность как мера....63*

*2-9. Алгоритмическая вероятность и нестандартный анализ....64*

2-9.1. Первое реальное обоснование ТВ....67

*2-10. О логической вероятности....68*

Глава 3. Закон больших чисел и нормальное распределение....68
*3-1. Кардано: первые аксиомы и длинный тупик для теории....69*
*3-2. Якоб Бернулли: симметрия множества случайных событий....70*
*3-3. В чем смысл "золотой теоремы"....71*
3-3.1. Независимость без случайности....74
*3-4. Нормальный закон и центральная предельная теорема....76*
*3-5. Суммирование случайных величин....78*
*3-6. От Лапласа к Пуассону – изменение смысла вероятности....81*
*3-7. Последующие интерпретации вероятности и ЗБЧ....82*
*3-8. Место нормального закона....84*
Глава 4. Вероятностная случайность и симметрия....85
*4-1. Реализационная симметрия и равновозможность....86*
*4-2. Краткий анализ стохастичности....87*
*4-3. Рулетка Пуанкаре и вероятность как мера....90*
*4-4. От рулетки Пуанкаре к странным аттракторам....92*
4-4.1. Второе обоснование теории вероятностей....95
*4-5. Симметрия по Борелю и случайность по Ламберту....95*
4-5.1. Третье обоснование теории вероятностей....96
*4-6. Тройная симметрия....97*
*4-7. Неустойчивость частот как нарушение тройной симметрии....100*
4-7.1. Пример неустойчивой частоты: ветвящийся процесс....101
*4-8. Вероятность реальных событий и конструктивность....102*

**ЧАСТЬ ВТОРАЯ. НЫНЕШНИЕ ПРОБЛЕМЫ АЛЕАТИКИ....104**

Глава 5. Алеатика и познавательные модели....104
*5-1. Картины мира и познавательные модели....104*
5-1.1. Вокруг познавательных моделей....106
*5-2. Какие бывают познавательные модели....108*
5-2.1. Контур будущей ПМ....111
*5-3. Становление статистической ПМ....113*
5-3.1. Вероятность солнечного восхода....116
5-3.2. Капитализм против рынка?....118
*5-4. Познавательные модели случайности....120*
*5-5. Системная ПМ и экстремальность нормального распределения....122*
*5-6. Аксиома эквивалентности и пределы ее действия....124*
*5-7. Взаимодополнительность частоты и меры....127*
Глава 6. Динамический хаос, фракталы и алгоритмы....128
*6-1. Новая математика для старой науки....128*
*6-2. Фрактальный хаос....132*
*6-3. Перемешивание, независимость и фракталы....133*

*6-4. Элементарная ячейка пространства* ........ *135*
*6-5. Континуум в различных пониманиях* ........ *137*
6-5.1. Континуум, случайность и дополнительность ........ 140
*6-6. Случайность как число* ........ *142*
*6-7. Случайность по Ламберту и по Колмогорову* ........ *144*
*6-8. Случайность по Колмогорову и растянутые отображения* ........ *146*
Глава 7. Случайность без вероятности и теория без предельных теорем ........ 147
*7-1. Неустойчивость частот и распределение Коши* ........ *148*
*7-2. Устойчивые распределения неустойчивых частот* ........ *150*
*7-3. Поиск причин гиперболичности плотностей* ........ *154*
7-3.1. Память как источник неустойчивости частот ........ 156
7-3.2. Неустойчивость, не связанная с памятью ........ 158
*7-4. Краевые распределения и квази-гиперболы* ........ *158*
*7-5. С предельными теоремами и без них (анализ текущих значений)* ........ *161*
7-5.1. Дисперсии слишком большие и слишком малые ........ 163
7-5.2. Многовыборочный метод ........ 164
*7-6. Свободный выбор как случайность без вероятности* ........ *165*
*7-7. Неизмеримость без свободы выбора* ........ *168*
*7-8. Пропенсивная случайность* ........ *169*
Глава 8. Случайность и разнообразие ........ 171
*8-1. Типы случайных явлений* ........ *172*
8-1.1. Дополнительность номотетики и идиографии ........ 175
*8-2. Новое в выявлении типов случайностей* ........ *176*
*8-3. Инварианты и ступени случайности* ........ *179*
8-3.1. Инварианты случайности ........ 180
8-3.2. Ступени случайности ........ 182
*8-4. О математических моделях случайного* ........ *184*
*8-5. Организующая роль случайности* ........ *187*
8-5.1. Случайность в игре ........ 189
8-5.2. Случайность и тенденции ........ 191
*8-6. Эффект Шноля и диатропика случайности* ........ *193*
Глава 9. Алеатика и другие науки ........ 196
*9-1. Случайность в планетной астрономии* ........ *197*
*9-2. Связь алеатики с физикой* ........ *197*
*9-3. Связь с экономикой* ........ *201*
*9-4. Связь с биологией* ........ *204*
9-4.1. Систематика ........ 205
9-4.2. Взаимодополнительность и уровни развития ........ 209
9-4.3. Генетический поиск ........ 210

9-4.4. Иммуногенез.....210
*9-5. Связь с лингвистикой.....212*
*9-6. О техноценозах Кудрина.....216*
9-6.1. К обоснованию квази-гипербол.....220
*9-7. Об эволюции.....221*
9-7.1. Эволюция объектов разной природы.....221
9-7.2. Динамика текущих значений.....223
9-7.3. Когда эволюцию движет характер случайности.....225
9-7.4. Эволюция при экологической катастрофе.....226
9-7.5. Дарвинизм, ламаркизм и номогенез о случайности.....227
Глава 10. К философии случайности.....229
*10-1. К философии вероятности.....229*
10-1.1. Эргодичность и перемешивание.....231
*10-2. Пифагорейский корень случайного.....232*
*10-3. К философии нестохастической случайности.....234*
10-3.1. Импробабилизм и пропенсивность.....237
10-3.2. Спонтанность и свобода воли.....239
*10-4. Общие замечания.....242*
10-4.1. Несколько замечаний о преподавании.....244
Заключение.....247
Список сокращений.....252
Цитированные в книге работы Ю.В. Чайковского
(в т.ч. с соавторами).....252
Литература.....253
ПРИЛОЖЕНИЯ.....265
Приложение 1. ДОБАВЛЕНИЯ.....265
УКАЗАТЕЛЬ ИМЁН.....284
ПЕРЕЧЕНЬ.....291
Чайковский Юрий Викторович.....292
О природе случайности.....292
Серия «Ценологические исследования». Вып. 18.....292
Второе издание,исправленное и дополненное.....292
Редактор серии Б.И.Кудрин.....292
*Подписано к печати 17 ноября 2003 г.    Заказ 033.....293*

# О ВТОРОМ ИЗДАНИИ

Необходимость во втором издании возникла не столько потому, что первое издание разошлось, сколько из-за обсуждения одной из докторских диссертаций моего ученика на Учёном Совете по защите диссертаций при 100 %-ной явке 20 весьма уважаемых докторов наук весьма уважаемого вуза в весьма уважаемом городе.

Один из членов Совета (цитирую по фонограмме) сказал: «Я думаю, надо ещё чистых математиков привлечь, потому что опровергнуть центральную предельную теорему Ляпунова – это утверждение очень сильное. Есть исследования, где показано, что в больших системах действует нормальный закон распределения… Вся другая статистика позволяет отстаивать фундаментальные законы, принятые Ляпуновым (реплика из зала члена Совета: 50 лет тому назад). Может быть… Я предлагаю направить её… пускай чистые математики посмотрят и скажут своё мнение. Они разбираются хорошо». Затем к дискуссии подключился ещё один член Совета. Он сказал: «Я думаю, что если это отдать математикам – они раздраконят это всё по первое число… Нет, Ляпунова не надо трогать. Это мировая величина. Просто разные бывают распределения. Это мы все признаём. И всякий раз оно своё. Это очень примитивно считать, что если статистика, то это нормальный закон. Ничего похожего. Нет никакой связи между нормальным законом и вообще статистикой. Статистика может быть и не нормальной, и какой хотите. Десятки тысяч распределений известны. Вовсе это не должно сводиться к нормальному закону со средним и дисперсией. Вовсе нет. Это всякий знает».

Вдумчивый читатель, прочитавший монографию Чайковского, вероятно, будет поражён безграмотностью членов Совета. Они оба даже и представить не могут, что данная диссертация действительно «опровергает» центральную предельную теорему Ляпунова (на самом деле диссертация использует иную область математики, ту, которой и посвящена монография Чайковского). Что касается реплики из зала о 50-х годах, то приходится сожалеть, что член Совета не различает царского Александра Михайловича Ляпунова, доказавшего свою теорему в 1901 г., и советского Александра Андреевича Ляпунова (в память второго мною были проведены специальные научные чтения): 50 лет не относятся ни к тому, ни к другому. Что касается десятков тысяч распределений, то ни один справочник не приводит даже ста. Фактически Чайковский показывает, что все распределения в пределе гауссовы или негауссовы.

Естественно, дремучая неграмотность представителей науки, каждый из которых считается и, вероятно заслуженно, крупнейшим специалистом в своей области, просто поражает. Как, оказывается, трудно поменять некоторые представления тех учёных, которые глубоко и однозначно уверены во всеобщности постулатов картины мира, нарисованной Ньютоном-Максвеллом; вероятностной картины, где можно быть уверенным в наличии математического ожидания и конечности дисперсии. Реальные процессы не сводятся только к Ньютону и Гауссу. Вступление России в постиндустриальную эпоху требует нового мышления. Именно поэтому возникла необходимость во втором издании, с приведением в нём некоторых пояснений и указателя имён, исправленного перечня выпусков «Ценологические исследования».

*Б.Кудрин, Москва, 30 октября 2003 г.*

# ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Выход монографии «О природе случайности» в серии «Ценологические исследования» нельзя назвать случайным. Обращаясь к античности с помощью Ю.В.Чайковского, я не вижу в этом факте случайности в смысле классической математической статистики, полагая, однако, что это «удача и судьба»: «Все человеку, Перикл, судьба посылает и случай». Не думаем ли мы, однако, что «ни одна вещь не возникает случайно, но всё со смыслом и по необходимости»?

Но эта удача – обоюдная. Что касается Юрия Викторовича, то его следует поздравить с книгой, которая, несомненно, могла бы стать бестселлером, если бы не сам предмет рассмотрения, и с тем, что сложившиеся обстоятельства позволили издать книгу в непростое для науки время. Но еще большая удача относится к развиваемым ценологическим исследованиям, внедрение которых не только в области электротехники, электроэнергетики и электрики, где я являюсь профессионалом, но и во все сферы общественной жизни и все отрасли экономики обеспечит достойное место России в условиях перехода в постиндустриальное (информационное) общество, сопровождающегося нарастающей глобализацией.

Тривиально утверждение российских политиков и социологов, что нельзя признать нормальной ситуацию, когда по минимальному потребительскому бюджету, анализировавшемуся в конце 2001 г. и определённому в среднем по стране в сумме 3456 руб., различие по регионам составило 11-12 раз.

Но что предлагается? Какую цель ставит общество перед государством? Полное равенство доходов по регионам, а в регионах – равенство доходов каждого гражданина? Равное потребление? Отмену всех и всяческих привилегий в социальной сфере, на государственных и частных предприятиях, при предоставлении услуг?

Однако если эта задача утопична теоретически, нереализуема практически и если неизбежно некоторое расслоение при любом общественном строе и форме государства, то первое: каков возможный максимальный разрыв, за которым следует ожидать социальной нестабильности с непредсказуемыми последствиями; второе: есть ли и какой уровень, который можно считать оптимальным, который и есть гарант устойчивого состояния общества, его общей эволюции в направлении повышения жизненного уровня всех членов общества; наконец, третье: каково то минимальное различие доходов, сохраняющее благоприятный инвестиционный климат для финансистов и предпринимателей, достойное России развитие науки и искусства, медицины и образования?

Эту глобальную постановку можно сузить, если обратиться к тому или другому цеху, производству, предприятию, отрасли; квартире, дому, кварталу (поселку), району, городу, региону, стране при рассмотрении, собственно говоря, того материального, из чего состоит каждое из этих образований (объектов), то есть всего установленного оборудования (техники, зданий, сооружений, сетей) как некоторого множества (ценоза) – сообщества слабосвязанных и слабо зависимых между собою изделий. Это могут быть все вещи в квартире, электродвигатели на заводе, предприятия сферы услуг в городе, организации, различающиеся по объёму выпускаемой продукции, штатам, прибыли в городе, регионе, стране.

Конкретизируем рассмотрение на примере электрического хозяйства не самого крупного завода, где установлено 60 тыс. электродвигателей. На каждый вновь поступивший электродвигатель имеется паспорт, который, с одной стороны, содержит номер, делая тем самым данную штуку-электродвигатель некоторой индивидуальностью, особостью, индивидом – особью; с другой – по основным параметрам позволяет отнести любой электродвигатель к тому или иному виду. Этот принципиально новый подход в технике позволил в начале 70-х годов (когда я руководил проектированием электрической части крупнейших предприятий чёрной металлургии, участвовал в монтаже, наладке и эксплуатации) установить закономерность, заключающуюся в некоторых ограничениях на величину разнообразия и на соотношение крупного, среднего, мелкого. В 1976 г. удалось сформулировать закон информационного отбора, который описывает механизм образования этих количественных ограничений.

Именно здесь и возникли трудности, которым собственно и посвящена монография Чайковского: «Уверенность математиков-прикладников и инженеров в применимости закона больших чисел и центральной предельной теоремы и основанной на них стандартной статистики ко всем массовым случайным явлениям почти непробиваема». Мне действительно стали «отчаянно мешать учебники теории вероятностей и математической статистики».

Разъясню, в чём существо вопроса, и с чем пришлось мне столкнуться при проектировании и строительстве двухсот крупных объектов различных отраслей экономики; при прогнозировании, нормировании, лимитировании электроэнергии по отдельным предприятиям, производствам и цехам и по отрасли в целом в 1970-1990-х годах; при разработке программ энергосбережения, системы нормативно-методической документации и Государственного плана рыночной электрификации России (ГОРЭЛ) в последние 10 лет.

Оказалось, что каждый из объектов: 1) кроме очевидных свойств, вытекающих из первой научной картины мира и позволяющих по жестким законам технических наук всё однозначно (каузально) рассчитывать; 2) кроме возможностей математической статистики, которая отражает взгляды второй научной картины мира и позволяет, построив распределение, в пределе сходящееся к нормальному гауссовому закону, рассчитать с инженерной точностью (конечной ошибкой – дисперсией) ожидаемые параметры единичных как вида техники, технологии, материала, продукции, отходов (экологического воздействия); 3) имеет неочевидные свойства: нельзя пользоваться средним (математическое ожидание теоретически отсутствует) и из-за сколь угодно большой ошибки (дисперсия теоретически бесконечна) решение в точке отсутствует.

Вернёмся к примеру из электрики. Применим схему Бернулли и наугад «вытащим» один из двигателей, который может оказаться мощностью 30000 кВт, другой – 0,25-4А мощностью 0,25 кВТ (оба они в Липецке в одном экземпляре). Так равновозможно мы можем «доставать и доставать» все 60 тыс. двигателей. Но можно ли в таком случае говорить о среднем при решении любого практического вопроса, связанного с ремонтом, определением потребной электрической энергии? В русском языке для данного случая закрепилось выражение, точно отражающее смысл явления – «средняя температура по больнице», которое инженер применяет, когда очевидно, что среднее не может быть использовано при решении конкретной задачи. Величина этого среднего, в данном случае 32,4 кВт, вообще говоря, полезна не при решении вопроса об электрической нагрузке или ремонте отдельного двигателя, а когда сравниваешь, например, один завод с другим.

Подчеркнём, что инженер имеет дело с системами трёх типов: 1) типа часов или редуктора, где каждая шестерёнка жёстко и однозначно рассчитывается; 2) массовыми явлениями, где достаточно хорошо работает математическая статистика, в пределе оперирующая математическим ожиданием и конечной дисперсией (в полном соответствии с центральной предельной теоремой и законом больших чисел). Это позволяет, например, по стандарту шить костюмы (рост) и изготавливать обувь (размер); 3) сообществами изделий – ценозами.

Вообще говоря, ценоз нельзя назвать системой в смысле Берталанфи, Винера, Эшби, Месаровича и др., так как для него отсутствует вход и выход, обратная связь, да и сам он, если и выделяем, то только конвенционно. Причём эта конвенционность, во-первых, чрезвычайно субъективирована, во-вторых, организации и быт (с территориальной, финансовой, медицинской, административной, технологической, электрической и других сторон) различаются в своих границах. Тогда мы должны считаться с характерными свойствами любого ценоза: практической бесконечностью элементов-особей его образующих (впрочем, ценологические свойства, в большой степени определяемые видовыми параметрами, начинают проявляться уже с десятков штук-особей); обязательностью видовой структуры, т.е. необходимостью сравнивать элементы-изделия не только по количественным параметрам, но и по качественным признакам; устойчивостью видового разнообразия, определяемой количественными ограничениями; невозможностью адекватного описания ценоза системой показателей (в отличие, например, от технических изделий, где паспорт достаточно объективно позволяет сделать выбор); неодинаковостью ценозов при одинаковости показателей, которые приняты за основные; направленностью техноценологического развития, исключающей обратимость.

Именно проектированием, управлением и прогнозируемым развитием таких систем (цех, производство, предприятие, подотрасль, чёрная металлургия в целом) я и занимался практически всю жизнь. Именно при этом обнаружилось различие в 10, 100 и более раз не только тех параметров, которые, на первый взгляд, легко объясняются (мощность электродвигателей, производительность по основной технологии, по стоимости строительства), но и тех, для которых существовала твёрдая уверенность, что они должны быть одинаковы (удельные расходы электроэнергии на чугун, сталь, прокат; нормы по трудоёмкости монтажа, обслуживания и электроремонта; лимиты для организаций с близкими технологическими, территориально-административными и экономическими показателями).

Во всех этих случаях, когда невозможно опираться на среднее, требовалось некоторое теоретическое обоснование принимаемых нами решений, подобное подходу при расчёте пролёта моста, выборе провода, определении расхода бензина на 100 км пути. Поскольку «академическая наука» и «высокое начальство» при рецензировании и последующем принятии директивного решения интуитивно не могут отойти от мысли, что всё можно рассчитать и пронормировать, то всякое новое решение, на порядок отличающееся от стереотипов, всегда вызывает острое неприятие.

Чайковский замечает: «за последние 80 лет исследования в разных науках показали, что распределения, похожие на гиперболы, наблюдаются на столь различных объектах, что искать им частные объяснения вряд ли стоит». Монография тем и ценна, что она со всех сторон раскрывает феномен (применяя термин Чайковского) **квази-гиперболы**. Это даёт возможность любому заинтересованному специалисту разобраться, наконец, где и в каких случаях встречается это удивительное явление: *случайность без вероятности* и *теория без предельных теорем*.

Перед нами – новая философия случайности, распространение которой повлечёт, конечно, изменения в преподавании теории вероятностей и математической статистики. Но не это главное. Главное – изменение мировоззрения технариев, инженеров и менеджеров различного уровня, принимающих «производственные» решения в самых различных отраслях экономики. Изменение мировоззрения должно произойти и у гуманитариев, ведь наиболее существенные черты человеческого бытия определяются негауссово (в этом, собственно, и есть «ненормальность» гениальности в отличие от обеспечивающей устойчивость средней обыденности).

И, наконец, уж совсем главное: если законодательная и исполнительная власти, деятели политики, культуры, массовых средств информации не осознбют всеобщность гиперболического Н-распределения и необходимость следования его количественным ограничениям, накладываемым реальностью на жизнь общества, то Россия медленно, с болью, кровью и унижением будет входить в постиндустриальное общество. Однако, рано или поздно, законы и закономерности Природы всё равно будут осознаны. Жаль только, что в эту пору прекрасную жить….

*Б. Кудрин*
*21 марта 2001 г.*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Мои занятия случайностью начались с вопроса о том, какую роль играет в биологической эволюции случайный поиск, и первые публикации появились 30 лет назад [Чайковский, 1971; 1971а; 1972]. Вскоре они привели к вопросу о том, случайны ли мутации [Чайковский, 1976; 1977], и как распределены виды организмов по родам [Чайковский, 1981]. (В те же годы роль случайности в эволюции рассматривал в широком плане палеоботаник В.А. Красилов [1979].) Меня занимала и занимает случайность как явление природы, а не как дефект измерения или феномен знания и понимания. Поэтому так называемая логическая вероятность затрагивается далее лишь как способ описания действительности, но не как способ упорядочивать свои мысли; а субъективная вероятность лишь упоминается при необходимости разграничения понятий.

Имея перед собой чисто биологическую цель, естественно было стараться избегать уклонений в иные отрасли знания, но это оказалось не всегда возможно. Дело в том, что прежние известные мне попытки решить вопрос о роли случайности в эволюции остались безуспешны именно из-за того, что их авторы брали готовый понятийный аппарат других отраслей знания, а он был неадекватным. Прежде всего это касается математического аппарата, взятого из азартных игр, физики и социальной статистики. Основанное на нем "математическое моделирование эволюционных процессов", в основном, лишь пересказывает некоторые черты биологических процессов в терминах иных наук. Это не дало, на мой взгляд, ничего существенного для понимания самого феномена эволюции. Поэтому математическое моделирование биологических процессов, за несколькими исключениями (они перечислены в гл. 9), в книге не использовано.

Вообще, я историк науки, а не математик и не статистик – ни по образованию, ни по роду занятий. Если для математиков естественно стремление двигаться в сторону усложнения известных прежде схем, то мое стремление противоположно – углубиться в простейшую схему, чтобы выяснить лежащие в ее основе допущения и круг их применимости. Поэтому математика у меня взята простейшая из возможных.

Не проводится различия между простым и усиленным законами больших чисел, между простой и строгой устойчивостью распределений, между разными видами сходимости (за исключением пп. 3-4, 7-2 и 7-4). Почти нет речи о случайных процессах, поскольку обсуждаются, в основном, те вопросы о природе случайности, которые яснее видны при исследовании отдельных испытаний и их серий. Исключение сделано для простейших марковских цепей (случайного блуждания на прямой и процесса рождения и гибели). Зато серии исследуются подробнее, чем это принято делать.

Читатель, не привыкший выходить за рамки теории вероятностей, будет, вернее всего, разочарован, не найдя традиционных для него тем, зато видя много тем, для него посторонних. Кто-то, наверное, даже бросит чтение, однако мне известны люди, ждущие именно такую книгу, и их, надеюсь, не так уж мало. В основном они – не математики, и мне приходится разъяснять необходимые понятия достаточно подробно и популярно, т.е. нестрого, за что, надеюсь, математики, дочитавшие до конца, меня извинят.

Известно мнение: “Все замечательно в теории вероятностей Колмогорова, за исключением одного темного облака ... Этим облаком является вероятностная основа квантовой механики” [Хренников, 2003, с. 6]. Тем, кто хочет погрузиться в квантовую вероятность, рекомендую книгу А.Ю. Хренникова, моя же задача — показать столь же густую тьму *вне квантовой тематики*. Его книга, в отличие от большинства, уделяет внимание случайности как таковой, и автор справедливо отмечает, что в действительности закон больших чисел ничего не говорит о сходимости частоты к вероятности и что случайность, понимаемая как отсутствие алгоритма, мало говорит о случайности природных явлений. Однако всюду подразумевается, что любая случайность может быть охарактеризована своей вероятностью. Цель моей книги иная.

Одна из главных линий в книге – исследование случайности, не обладающей вероятностью. Мысль о том, что огромная (может быть, основная) масса случайных явлений не обладает вероятностью, заимствованная мной из брошюры Ю.И. Алимова [1980], чужда почти всем известным мне ученым, включая математиков.

Уверенность в том, что я не занимаюсь сумасбродством, мне придавало то сочувствие к основной ее установке, которое выразили мне устно два математика, близких к философии, – Ю.А. Шрейдер и А.Н. Паршин. Тот факт, что оба далеки от теории вероятностей, нисколько не умаляет важности их мнения. Когда книга была почти готова, мне позвонил еще один математик, С.А. Иванов – он прочел мою статью и тоже одобрил данную установку. Историк науки С.С. Демидов очень помог мне, раздобыв несколько редких изданий. Мне приятно выразить всем глубокую благодарность, но Юлий Анатольевич, увы, ее уже не услышит – он в 1998 году неожиданно умер.

Особо благодарен я энтузиасту нетрадиционной статистики Б.И. Кудрину, без усилий которого книга не только не появилась бы в свет, но и вряд ли была бы написана. И его верной сотруднице Г.А. Петровой, стоически и аккуратно выполнявшей все мои просьбы.

Однако никто из них рукописи не читал, и тем самым их авторитет не может служить оправданием недостатков моей работы.

Наконец, я весьма признателен тем, кто помог мне при компьютерной подготовке текста и рисунков к печати – моей жене Н.П. Кирилловой, нашему сыну Тимофею и сотруднику ВИЕТ К.И. Алексееву.

*Памяти Феликса Владимировича Широкова – Учителя,*
*когда-то приоткрывшего мне мир математики*

# ВВЕДЕНИЕ

Мир ли так устроен, что в глубине явлений лежат некие случайностные механизмы, или мы сами повсюду выискиваем случайности, вероятности и средние? В прошлом ходячие ответы на этот вопрос не раз менялись, а всерьез ответить на него нельзя, не выяснив, что такое случайность.

## 0-1. Этот загадочный полет монеты

Если вы хотите бросить монету один раз, то никто не сможет предсказать, какой стороной она упадет, но если вы бросите ее 500 раз, то любой скажет: она упадет гербом приблизительно 250 раз, поскольку вероятность выпадения герба равна 1/2. А знающий математику даже объяснит, в каком смысле понимать слово "приблизительно".

Однако почему так получается? Почему из непредсказуемых событий складывается предсказуемое? Где скрыта закономерность, не видимая ни в одном бросании, но видимая в их совокупности – в самой ли монете, в процедуре ли бросания или в свойствах больших чисел? Позже мы узнаем, что регулярность (устойчивость частот) складывается из всего вместе. Далее, обычно говорят, что непредсказуемость вызвана необозримой сложностью процесса полета монеты, но это неверно – ведь и колесо рулетки останавливается совершенно непредсказуемо, хотя движется очень просто. Непредсказуемость вызвана чем-то другим. Выяснение этих вопросов – основная тема части 1, пока же начнем с трех простых примеров.

Первый – известная игра в орлянку. Я бросаю монету и, если она упала гербом вверх, плачу вам рубль, а если цифрой, платите вы. Пусть мы хотим сыграть 500 партий. Чтобы игра не прервалась из-за нехватки денег, каждому достаточно иметь небольшую сумму (расчет показывает: это примерно 20 рублей), ибо игра симметрична, а большие уклонения очень редки. Это – типично вероятностное рассуждение, и мало кто задумывается – почему редки эти уклонения и почему мы ими можем пренебречь.

Второй пример. Если я, предложив кому-то сыграть в орлянку на крупную сумму, уроню на стол монету, не подбросив ее предварительно вверх, партнер запротестует – нет мол честной процедуры уравнивания шансов. Почему же нет? Ведь упав, монета подскочила и раз или два перевернулась. Пусть я не заметил числа оборотов и тем более не мог предугадать их, но, поскольку оборотов было мало, партнер подозревает, будто я что-то задумал. Ясно, что дело отнюдь не в дефиците случайности, а наоборот – в ее избытке: сравнительная простота траектории позволяет допустить, что я могу ею управлять, и строить различные предположения (вплоть до того, что я хочу оказать партнеру денежную помощь, не задев его самолюбие). Это – тоже вид случайности, но о вероятности здесь сказать нечего (подробнее см. п. 4-2).

Словом, случайности бывают совсем разные, и нужен какой-то способ определять, с какой из них мы в данный момент имеем дело. Этим мы займемся позже. А пока изменим правила орлянки: будем *суммировать* исходы — если к данному моменту выпало больше гербов, чем цифр, то рубль плачу я, если наоборот, то вы; а если поровну, не платит никто. (Как в шахматном матче: если при счете 3:1 партию выиграл второй игрок, то лидером остается первый.) В этом (третьем) примере игра осталась симметричной, однако без пятисот рублей играть в нее не садитесь — теперь значительная доля игр закончится почти полным или даже полным проигрышем одного из игроков. Точнее, в среднем в каждой пятой игре у одного из игроков останется не больше 12 рублей из пятисот, а в половине из *таких* игр проигрыш превысит 500 рублей. Но и в умеренных вариантах (один из них показан на обложке) один из игроков лидирует почти всё время.

Дело в том, что в первом варианте игры исходы независимы, частота каждого исхода устойчива (гербы составляют около половины всех исходов), и можно говорить о вероятности выигрыша, к которой эта частота приближается. При суммировании всё сложнее: исходы связаны в случайную цепь, и если превышение гербов составляет на данный момент n очков, то следующие n–1 раз вы выиграете обязательно, а на n-й раз – с вероятностью $1 - 2^{-n}$. В итоге процесс игры является *случайным блужданием по числовой прямой* и оказывается весьма неустойчивым (подробнее см. п. 7-3.1).

### 0-2. Талант и бездарь, или о пределах статистики

Но если так, то встает вопрос: с какими случайностями мы имеем дело обычно? Чаще всего мы этого не знаем. В учебниках неизменно пишут во введениях только одно – что «опыт показывает» устойчивость частот, а того, что он сплошь да рядом этого не показывает, вы там не прочтете. (Например, можно ли говорить о вероятности того, что завтрашний день будет солнечным?)

А вопрос более чем важный, от него зависит вся наша идеология – не только в науке, но и в жизни вообще: когда мы вправе рассуждать вероятностно и доверяться обычной математической статистике (МС), а когда нет? Мы часто не замечаем, что решаем судьбу, свою и окружающих, на основе жестких статистических установок.

Например, господствующий на Западе (и с трудом приживающийся у нас) суд присяжных основан на простой и необсуждаемой идее – если 12 человек пришли к единому выводу, то вероятность ошибочности этого вывода пренебрежимо мала; сама же эта идея основана на неявной уверенности, что все 12 принимают решение независимо – как друг от друга, так и от органов власти. Литература о том, что эта уверенность ошибочна, огромна.

Есть, однако, области, где статистическая природа явлений и принимаемых решений столь же существенна, но почти никому не известна. С тех пор, как в 1939 году французский математик Поль Леви доказал неизбежность огромных отклонений при случайном блуждании, математики не раз обращали внимание на статистическую природу казалось бы вполне детерминированных явлений, но их никто не хочет слушать. Вот один пример, который особо задел меня как преподавателя.

В любой группе из примерно 30 учеников (обычный школьный класс) найдется отличник, почти или вовсе не имеющий четверок, и столь же обычен безнадежный двоечник, почти или вовсе не получающий даже троек. Первому гарантированы поощрения, дальнейшее обучение и, как правило, легкое укоренение в жизни; второго, наоборот, ждут сплошные беды и, довольно часто, встреча с психиатром или с тюрьмой. Каково же было мое удивление, когда мне стало известно, что и «отличник», и «двоечник» практически всегда найдутся в модельном «классе», где «отметки» поначалу достаточно долго выставляются путем бросания монеты, а затем итоги начинают суммироваться.

В самом деле, рассмотрим описанное выше случайное блуждание как накопление учеником отметок «сдал» (выигрыш) – «не сдал» (проигрыш). Очевидно, что регулярное и значительное превышение среднего (нулевого) уровня должно быть столь же типично, как и регулярное отставание, и в «классе» оба варианта почти наверняка будут представлены. Так, после пяти случайных испытаний среди 32-х «учеников» в среднем один получит все 5 выигрышей, а один – 5 проигрышей. Это еще не крайние «отличник» и «двоечник», но поле для их появления уже задано. Стоит добавить в модель одно условие: что регулярное превышение повышает вероятность дальнейшего успеха, а регулярное отставание – неуспеха, и крайние варианты со временем обеспечены. На практике оно возникает почти неизбежно, поскольку преподаватели склонны суммировать прежние исходы и затем руководствоваться этим при дальнейших оценках.

Что тут можно поделать? Очевидно, что система обучения должна пресекать случайные блуждания отметок, регулярно возвращая учетную ведомость к нулю. Сам я для этой цели стараюсь придерживаться нескольких твердых правил: не спрашивать параллельных преподавателей о двоечниках, пока мой курс не окончен; не занижать отметок при сдаче задолженностей, а при сомнении – завышать; ставить отметку в ведомость и лишь потом раскрывать зачетную книжку сдающего и т.д.

Вообще же очевидно, что всюду, где содержится суммирование исходов (во всевозможных матчах вроде первенства мира по шахматам, рейтингах и подведениях итогов), мы обсуждаем не столько способности и достижения участников, сколько таблицы случайных чисел, причем с неустойчивыми частотами.

Впрочем, всё это частности. Главное же видится в оценке места статистики в наших суждениях. Тут мне больше всего нравится тезис: «Статистике часто принадлежит первое слово, но последнее – никогда», к которому мы еще обратимся. Иными словами, статистика может давать пищу для размышлений, но не выводы.

### 0-3. Случайности бывают разные

Первое, что приходит в голову – дать определение случайности. К сожалению, этот путь ни к чему, кроме бесконечных споров, не приведет: ведь речь идет об одном из базовых понятий, о том, что философы называют *категорией*. Категории определений не имеют, поскольку с них начинаются рассуждения и нет того более раннего, на что при этом можно опереться. Математики в таких случаях прибегают к помощи так называемых неопределяемых понятий, т.е. апеллируют к интуитивной очевидности, но здесь такой прием тоже ничего не даст – слишком различна в этом пункте интуиция разных людей. Достаточно сказать, что одни люди вообще отрицают наличие случайности как объективно существующего явления, тогда как другие ее признают.

Остается воспользоваться давним опытом философии – подробно обсудить интересующую нас категорию неформально, средствами обычного разговорного языка, чтобы стало ясно, о чем далее будет речь, а о чем не будет. Обсуждая категории, философы поступают более мягко, чем математики, и достигают главного – очерчивают поле, на котором могут действовать и философия, и все науки, в том числе и математика. Обсуждение смысла понятия «случайность» – одна из основных тем книги.

Мы будем говорить о случайности как явлении, которое можно наблюдать, но не как о чьем-то мнении или впечатлении, которого наблюдать нельзя. (Последнее тоже интересно, но это особая отрасль знания, известная как учение о субъективной вероятности [Кайберг, 1978; Gigerenzer e.a., 1989].) Даже под случайностью явления разные ученые подразумевают совсем разное. Вот места из работ весьма известных натуралистов разных эпох, касающиеся случайности в отношении всего одной темы – биологической эволюции (источники этих цитат см. [Чайковский, 1996а], курсив мой).

{1} "До сих пор я иногда выражался таким образом, как будто изменения... были делом *случайности*. Это выражение, конечно, совершенно неверно, но оно ясно обнаруживает наше незнание причины каждого конкретного изменения". – Ч. Дарвин, 1859.

{2} "...Уместно заметить, что все существа в значительной мере подвергаются и чисто *случайному* истреблению, почти или вовсе не имеющему отношения к естественному отбору". – Ч. Дарвин, 1872.

{3} <<Развитие жизни свидетельствует нам не столько о смене форм организмов, сколько о глубинном процессе обращения атомов в биосфере. Те виды, которые мы называем хорошо приспособленными к окружающей среде и выжившими в процессе эволюции – не *случайны*. Они увеличили "оборот" атомов в биосфере. Вымерли же те, которые этому не способствовали, – *случайные*>>. – В.И. Вернадский, 1928.

{4} "Реальный *случай* не есть *случай* теории вероятностей". – Он же, без даты.

{5} "Акцент на *случайный* характер изменчивости позволяет назвать, следуя Л.С. Бергу, дарвиновское понимание эволюции тихогенезом в противоположность номогенезу". – А.А. Любищев, 1963.

{6 }"Он (ботаник-дарвинист А. Кронквист, 1969 г. – *Ю.Ч.*) признаёт новое понимание *случайности* мутаций – случайность только в смысле невозможности контролировать и предвидеть мутации [...] Он склонен объяснять различие животных и растений тем, что весь организм животных более интегрирован и морфологически, и физиологически и поэтому менее терпим к *случайным* неадаптивным изменениям". – Он же, 1971. (Отмечу, что близкое Кронквисту понимание случайности мутаций бытует в дарвинизме поныне – см. цитату {9}.)

{7} "История любого вида животных может казаться *случайной*, зависящей от других видов и флуктуаций окружающей среды. Но трудно отделаться от впечатления, что общая структура тропического леса, например всё многообразие живущих там видов животных и растений, соответствует некоторому архетипу порядка" – И. Пригожин, И. Стенгерс, 1986.

{8} "Если исходным механизмом, приведшим к образованию первых биомолекул, была *случайность* типа борелевской обезьяны за пишущей машинкой, то история жизни была бы непостижимой" – они же, 1994.

К высказываниям этих авторитетов добавлю места из энциклопедии и учебника:

{9} "Мутации *случайны* – потому что они суть редкие исключения в регулярности репликации ДНК, ошибки копирования; – потому что они не являются результатом предустановленного процесса; – потому что нельзя предсказать, какой ген смутирует и в какой особи популяции". Однако если мутации происходят с частотой выше 1/5000, то они "не являются результатом одной лишь *случайности*" [Devillers, Gui, 1996, с. 2149].

{10} «...термодинамика буквально на наших глазах меняет всю картину Мира... энтропия является тем самым «сырьем», из которого диссипативные структуры могут создать (а могут и не создать – это дело *случая*!) более высокую, чем прежде, упорядоченность» [Еськов, 2000, с. 88].

Являются ли столь разные понятия обозначениями одного и того же явления (хотя бы в теории эволюции)? Очевидно, что нет.

На сегодня единой теории случайности не существует. В результате мы видим прямые противоречия – не только у разных авторов, но даже в одной статье, что особенно ясно из цитаты {9}, где слово применено сразу в трех смыслах, причем неочевидно, совместимы ли они. Нужно как-то классифицировать случайности. Прежде всего надо уметь разграничивать случайное и неслучайное. Традиционно случайность противопоставляют необходимости, но ее можно противопоставлять и иным понятиям.

В литературе мне не удалось найти классификации случайностей. В давнем докладе [Чайковский, 1983] была сделана попытка определить случайность через противоположные ей понятия, т.е. выявить *апории* случайности. Случайность была там противопоставлена не только необходимости, но еще и согласованности, информированности, выводимости, регулярности, целесообразности, свободе выбора (творчеству), чуду, измеримости, закономерности (общности), важности (существенности), понятности. Всего 12 апорий.

Апории (противоположения, антонимические пары) не могут поодиночке служить характеристиками случайности. Например, свобода выбора может быть противоположна как необходимости, так и случайности. Это хорошо известно юристам – полная ответственность наступает, если преступление совершено по собственной воле, тогда как случайное или вынужденное действие либо ненаказуемо, либо карается мягче. С другой стороны, для культуролога Освальда Шпенглера (1918 г.) случайность была "внутренне родственна принципу причинности", т.е. необходимости, в силу "неорганичности" обеих [Шпенглер, 1993, с. 222].

Тем самым, одно и то же реальное явление природы (не говоря уж о душевных актах) вполне может выступать и как случайное, и как неслучайное – в зависимости от точек зрения. Апории могут дать некоторое общее представление о том, какую роль в языке играет слово "случайность", но для более аккуратного анализа нужны другие методы. Мы займемся ими в главе 8 после того, как будут изложены фактические знания о том, что в языке носит имя случайности.

## 0-4. Случайность и алеатика

Попытки дать определение если не случайности вообще, то случайности как явлению, существуют. Самое широкое понимание в математике звучит так: "Событие *A*, которое при осуществлении комплекса условий *S* иногда происходит, а иногда не происходит, называется по отношению к этому комплексу условий *случайным*" [Колмогоров, 1956, с. 252]. Однако это определение не вполне математично (неоднозначен смысл слова "иногда"), и математики им предпочитают не пользоваться. Им пользуются только философы, тогда как математические руководства обычно упоминают только "случайное событие" теории вероятностей (ТВ).

В "Математической энциклопедии" (1985) есть следующие два определения: "Случайное событие – любая комбинация исходов некоторого опыта, имеющая определенную вероятность наступления" и "Вероятностей теория – математическая наука, позволяющая по вероятностям одних событий находить вероятности других"(*). Иных определений, касающихся нашей темы, тут нет.

Если принять такой подход, то к ТВ не может быть претензий о смысле случайности, но ясно, что нужна какая-то более общая "наука о случайном". Для нее недавно предложен термин "алеаторика" [Марков В.А., 1988], но он не вполне удачен, поскольку латинское "aleator" слишком узко (означает только "игрок в кости"), а в наше время алеаторикой именуют иногда особый род легкой музыки. Более подходит, по-моему, слово **алеатика** [Чайковский, 1996а].

Фактически алеатика давно существует, и привычная нам ТВ – всего лишь самая разработанная, но отнюдь не самая интересная и перспективная ее часть. Эта новая наука представляется необходимой для решения многих актуальных проблем, из которых мне наиболее близка проблема роли случайности в биологической эволюции.

Недавно я был рад узнать, что болгарский методолог Борис Чендов уже давно размышляет на темы случайности и предложил для новой науки название *индефинитика* [Чендов, 1974]. Это, в основном, аспект модальной логики, которая достаточно далека от темы данной книги. Можно сказать, что мы с Чендовым разматываем две разные нити мысли, тянущиеся от идей великого Лейбница, который по сути был основателем науки о случайном. После издания своей книги Чендов ушел еще дальше от наших тем [Чендов, 1994], но его книгу мы не раз вспомним.

В качестве иной, нежели ТВ, части алеатики, назову *алгоритмическую теорию случайности*. Ею мы займемся в главах 2 и 6, а здесь только обращу внимание на одно выявленное ею обстоятельство, неожиданное для начинающего. У многих авторов, касающихся темы случайности вскользь, можно прочесть, что все равновероятные варианты случайны в равной степени, что, например, расстановка томов энциклопедии от А до Я столь же информативна, сколь и любая другая (но однозначно заданная) расстановка, поскольку обе равно маловероятны. Так, "интуитивно случайная последовательность нулей и единиц представляется столь же простой, как и последовательность из одних единиц" [Соколов, 1990, с. 165].

Тут интуиция обманула автора: из равновозможности ни равная сложность, ни равная информация, ни равная случайность не следуют. И та же интуиция в иной ситуации говорит иное: встретив запись "в обществе состоит 100 членов", мы уверенно заключаем, что пишущий не сосчитал их числа (иначе написал бы "ровно 100 членов"). Ибо простое более вероятно, чем сложное.

Недаром одним из исходных положений алгоритмической теории случайности является такое: <<вместо тезиса "события, вероятность которых ни-

---

(*) Так полагал еще в диссертации 1846 г. П.Л. Чебышев: "Наука о вероятностях, известная под именем теории вероятностей, имеет предметом определение вероятности события по данным его связи с событиями, которых вероятности известны" [Майстров, 1980, с. 181].

чтожно мала, не происходят" выдвигается тезис "события, просто описываемые и имеющие ничтожно малую вероятность, не происходят">> [Шень, 1982, с. 40]. Т.е. короткий алгоритм назван менее вероятным. Это выглядит странно, но приводит к теории, тогда как никто из тех, кто приравнивал информативность равновероятных вариантов, не построил теории случайности.

## 0-5. Случайность и вероятность

Если определенной вероятности у события нет ("событие возможно, но вот и всё" [Brakel, 1976, с. 122]), то разве событие нельзя называть случайным?

Так, все планеты обращаются вокруг Солнца в одну сторону и все, кроме Венеры и Урана, в ту же сторону и вращаются вокруг своих осей. Любая теория эволюции Солнечной системы исходит из этой однонаправленности как закономерности, которую надо объяснить, тогда как особенности Венеры (вращается в обратную сторону) и Урана (вращается "лёжа на боку") рассматриваются как случайности, происшедшие в силу каких-то однократных древних возмущений, нарушивших действие общего закона. Ситуация всех устраивает, хотя о частотах возмущений сказать решительно нечего. А ведь если признать эти особенности неслучайными, то придется строить совсем другие теории эволюции. Анализ см. [Чайковский, 1987].

Могут возразить, что в математике речь идет не о природном событии, а лишь о термине ТВ; но что значит тогда "некоторый опыт", упомянутый, как мы видели в начале п. 2, в энциклопедии? Из какой науки он взят? Обычно в математике таких расплывчатостей не бывает, и в этом смысле ТВ – исключение.

У философов иногда бывает получше. Например: "Случайность – отражение в основном внешних, несущественных, неустойчивых, единичных связей действительности; выражение начального пункта познания объекта; результат перекрещивания независимых причинных процессов, событий; способ превращения возможности в действительность, при котором ... имеется несколько различных возможностей, ... но реализуется только одна из них" (Филос. энц. словарь, 1983). Удивляет лишь отсутствие в статье ссылки на понятие вероятности.

Оказывается, у этого взаимного невнимания есть давняя историческая традиция, хорошо отражающая трудную судьбу алеатики. "Общая литература по нашей теме отсутствует" – заключил такой эрудит, как О.Б. Шейнин [1988, с. 4]. Пусть от его взора и ускользнула интересная книга японского философа Шузо Куки [Kuki, 1966], но Шейнин в целом прав – проблема случайности как таковой почти не разработана.

Вероятность часто путают со случайностью (и даже выносят это смешение на обложки научных книг – например [Gigerenzer e.a., 1989]), хотя эти понятия очень различны как по истокам, так и по сути. А.Н. Колмогоров, один из основателей нынешней ТВ, подчеркивал, что *вероятность* – математическое понятие, мера случайного, о которой можно говорить только в отношении одного класса случайных явлений – того, в котором наблюдаются *устойчивые частоты*, что "такого рода явления естественно назвать вероятностно-случайными. Иногда их называют *стохастическими*" [Колмогоров, 1956, с. 254]. Однако он не сказал, какие еще бывают случайности, и, насколько мне известно, этот вопрос в математике почти не ставится и никогда всерьез не обсуждается, хотя фактически она с ними дело, разумеется, имеет.

Термин "стохастический" не вполне удачен – прежде это слово употреблялось для обозначения направленного процесса со случайной составляющей (*стохастикос* по-гречески значит "меткий, догадливый") [Чайковский, 1977]; а теперь им чаще всего обозначают случайное вообще. Однако в теории динамического хаоса обычно стохастическими называют именно явления, обладающие устойчивыми частотами, и мы воспользуемся этим термином. Будем называть **стохастическим по Колмогорову** случайное явление, в котором можно ввести вероятность как величину, к которой приближается частота (подробнее см. гл. 2 и 4).

Учебники и руководства по ТВ вопрос об устойчивости частот едва упоминают и никогда не обсуждают по-существу, оставляя тем же философам восклицать: "Однако главным остается вопрос: будет ли эта частота устойчива?" [Катасонов, 1993, с. 120].

Обсуждая со мною тему случайности в январе 1996 г., покойный Ю.А. Шрейдер, математик и философ, отметил грустно: "Курс теории вероятностей построен так, что учит студентов вычислять вероятности, но отучает от размышлений о случайности". Добавлю, что потом, выучившись, большинство уже не могут не только делать это сами, но и воспринимать размышления других. Проблему приходится ставить и пытаться решать нематематикам.

Вскоре после появления колмогоровской ТВ (1933 г.) некоторые философы и математики стали обращать внимание на то, что в ней нехватает какой-то "аксиомы вероятности", которая связала бы эту теорию с остальной наукой. Так, Пий Сервьен полагал, что обычная для ТВ "аксиома вероятности", вводящая вероятность без обращения к случайности, абсурдна, поскольку исходит из неопределяемой "равной вероятности" элементарных событий, и новая аксиоматика ничего тут не изменила. Не устраивал его и чисто статистический подход, когда законы случая пытаются извлечь исключительно из длинных серий испытаний или наблюдений. Акт "случайного выбора" навсегда останется внешним по отношению к математике [Servien, 1942, с. 23-24]. Затем Джон Литтлвуд писал: "Если вероятность должна иметь дело с реальным миром, в ней должны содержаться элементы, внешние по отношению к математике". Он полагал, что существует некая "аксиома вероятности", связывающая математическую вероятность с реально наблюдаемой в природе частотой [Литтлвуд, 1962, с. 59]. Далее (в главах 2 и 5) будут приведены варианты этой аксиомы.

Вероятность обычно вводится как непременная характеристика всякой случайности, и трудно объяснить, особенно – прикладникам, использующим статистические приемы, что наличие ее – вовсе не общее правило; что есть много явлений, где частота в длинном опыте устойчива и поэтому ее можно назвать вероятностью (падение монеты гербом; рождение мальчика, а не девочки, и т.п.), но есть много и иных, где устойчивых частот нет и потому неясно, что называть вероятностью. Для начала мы разделим случайные явления на два обширных класса – допускающие введение вероятности и не допускающие этого.

Любой бы удивился, если бы при бросании монеты герб стал выпадать нерегулярно (в одной сотне бросаний 4 герба, в другой 94, в третьей 2, в четвертой 70 и т.д.), но вот генетики, наблюдая нечто похожее – беспорядочность мутаций, – не удивляются, а вводят успокоительные термины – "грязный опыт", "мода на мутации" и им подобные. "Моду на мутации" описывают как резкое и без видимых причин повышение вероятности, а "грязный опыт" просто игнорируют. Не яснее дело в лингвистике: почти всякий текст, даже очень длинный, обладает тем свойством, что около половины слов встречается в нем всего однажды, так что частоту его ввести всерьез нельзя; да и у часто употребляемых слов частоты могут варьировать, даже в пределах одного автора и тематики, так сильно, что о вероятности (если понимать ее как устойчивую частоту) говорить нет смысла. Об этом пойдет речь в главе 9.

### 0-6. Вероятностями не обойтись

Будем вычислять корень из двух. Всем известно, что это число – иррациональное, т.е. выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Замечательно, что знаки этой дроби случайны в том смысле, что появление на данном месте (в данном знаке после запятой) той или иной цифры не зависит от того, какая цифра стоит на предыдущем месте. Вероятность появления любой цифры в любом данном (еще не вычисленном) знаке равна 1/10. Однако случайности тут нет в том смысле, что каждый знак можно однозначно вычислить.

Немецкий астроном, математик, физик и философ Иоганн Ламберт, отметив этот факт, заявил, что тем самым, "случайность есть не только в мире, но и в математике", что "в этих цифрах есть порядок связности [l'ordre de liaison] и что каждая с необходимостью расположена на своем месте; но очевидно также, что совсем нет порядка сходства [l'ordre de ressemblance] и что они следуют как случайные бросания". По его мнению, от ТВ будет мало пользы, пока математики не научатся различать эти два вида порядка [Lambert, 1772, с. 330–331].

Бывает иначе: частота неустойчива, и потому ее анализ с помощью вероятностей ничего путного не дает. Такова вся статистика общеупотребительных слов. Анализ см. [Арапов, 1988]. Причина неустойчивости частоты слова в тексте достаточно ясна: всякий текст является системой, поэтому каждое употребление слова определяется единым для текста смыслом, а вовсе не случайным исходом статистического опыта. Но ведь иррациональное число – тоже система, тоже целостность. Только поняв, в чем различие систем, дающих устойчивые частоты встречаемости своих элементов, от систем, такой устойчивости не дающих, мы приблизимся к пониманию природы случайности.

С вопросом о существовании вероятности тесно связан другой: что такое вероятность сама по себе? Всегда ли под этим словом понимается (хотя бы данным автором) одно и то же? К сожалению, нет: автор может, в зависимости от контекста, понимать ее как степень правдоподобия, как частоту, как меру или как предрасположенность (см. гл. 2). Но увы, математики не любят задумываться о природе изучаемых ими объектов, молчаливо полагая, что это должен делать кто-то другой. Кто именно?

В вопросах вероятности вышло так, что решать просто некому: математики уверены, что по принятии аксиоматики Колмогорова суть случайности им ясна, а ученые других специальностей вынуждены им верить или нет, ибо не владеют аппаратом. Но при каких условиях объекты, удовлетворяющие аксиоматике Колмогорова, существуют? Описывает ли она случайность? Существует же мнение, что вероятность есть всего лишь очередная "редукция случайного к неслучайному" [Byrne, 1968, с. 33], и высказывают его почему-то знатоки истории науки.

Американские методологи, рисуя отношение "идеальных математиков" к базовым понятиям, пишут: <<Что здесь значит слово "существуют"? – этот вопрос никогда не приходит в их головы; о смысле этого слова можно только догадываться, наблюдая работу клана профессионалов>> [Дэвис, Херш, 1993, с. 119]. Так обстоит дело и со случайностью – наблюдая работу математиков, легко видеть: обычно они просто игнорируют те объекты, где характер случайности не дает ввести вероятность.

Ясно видел границу круга задач "вероятностной случайности" А.Н. Колмогоров, однако и он сам, выступая как редактор, регулярно отвергал статьи, не ложившиеся в статистическую парадигму [Тутубалин, 1993, с. 101], а она целиком основана на ТВ. За прошедшие годы ситуация в сущности не изменилась.

## 0-7. Нужна история

Наука, не анализирующая своих основ, понемногу теряет смысл, превращаясь в то, что методолог Томас Кун называл решением головоломок. Такой, на мой взгляд, оказалась на сегодня судьба столь респектабельных научных дисциплин, как ТВ в математике и дарвинизм в биологии, а отчасти – и теория квантов в физике. При всем их различии как по предмету, так и по методу, они проявляют удивительное сходство в одном: в нежелании анализировать своё основное понятие – случайность.

Так, в биологии господствует (а лет 30 назад царило безраздельно) толкование эволюции как процесса отбора случайных наследственных вариаций, именуемое дарвинизмом. В этих рамках считается ненаучным вопрос о природе собственных, не зависящих от направления отбора, законов изменчивости; вариации случайны, и этим якобы всё сказано. Что значит "случайны", спрашивать не принято. Сам Дарвин так не считал (см. цитату {1}), но это вспоминают только противники дарвинизма. Почему?

Потому, отвечают они, что ссылка на случайность с древности и поныне служит оправданием отказа от обсуждения сути дела, законов природы. "Очевидно, биологические проблемы столь сложны, что в них завязают даже умы, привыкшие к исключительной строгости мышления", т.е. математики [Любищев, 1982, с. 159].

По-моему же, специфика биологии тут ни при чем, дело в мировоззрении эпохи. Ведь и в самой математике ситуация сходна: о природе случайного говорить не принято, вместо этого говорят (и то больше философы, чем сами математики) о природе вероятности, будто это одно и то же. А это, как мы уже видели, совсем не так. Но всегда ли так было?

В истории математики эти вопросы почти не исследованы. Как типичное можно указать исследование [Doob, 1994], где в качестве истории понятия случайности описано лишь становление формализма ТВ, хотя связь формализма ТВ с реальными частотами названа туманной, а в хронологическом списке упомянуты те работы, где исследовались именно реальные частоты (например, работа Р. Мизеса, о котором мы не раз будем говорить). Читая это, можно понять возгласы пессимистов, вроде цитаты {4}.

Если, однако, заглянуть в старые работы Колмогорова, то выяснится, что он был этой проблематикой озабочен: "Говорить о том, что событие *A* является вероятностно-случайным и приписывать ему вероятность ... можно только тогда, когда указан класс допустимых способов формирования серий испытаний" [Колмогоров, 1956, с. 271] («допустимые способы» – это отсылка к Мизесу, о чем мы узнаем в гл. 2).

Позже, в 1960-х гг., Колмогоров хотел построить общую теорию случайности и полагал, что идеи теории информации, построенной без обращения к ТВ, "могут лечь в основу новой концепции случайного, соответствующей естественной мысли о том, что случайность есть отсутствие закономерности" [Колмогоров, 1991, с. 32].

Однако на этом пути решения не оказалось: если понимать случайность текста как отсутствие алгоритма в последовательности его знаков, то, как известно, получается обычная, вероятностная, случайность – в этом состоит основной результат алгоритмической теории случайности. Ей давно пора войти в учебники ТВ, но путь к общей теории случайности лежит, по-моему, не здесь. Ведь эта теория касается лишь текстов в заданном алфавите, тогда как в конкретных науках выявление "алфавита" означает самый важный этап формализации.

ТВ не в силах даже поставить вопрос о выявлении "алфавита". Так, А.В. Скороход, ведущий специалист и автор руководств, предложил "правильную постановку вопроса: как часто в цепочке (серии испытаний – Ю.Ч.) будет происходить явление из данного класса? Именно в таких ситуациях мы будем говорить о случайности" [Скороход, 1989, с. 9]. С этого пункта он предложил начать формализацию, в действительности же вопрос "как часто?" имеет смысл только тогда, когда перечислены и в каком-то смысле приведены к одному масштабу все возможные для данного круга явлений варианты, т.е. когда почти вся формализация уже проведена. В главе 3 мы увидим, что как раз отсутствие заранее ограниченного круга вариантов может приводить к нарушению закона больших чисел, а с тем и к падению всей идеологии вероятностей.

Налицо познавательный тупик, выбраться из которого нельзя без экскурса в историю. Дело не только в том, что всякая проблема яснее видна, когда известны ее становление и ранние формулировки, – эта функция истории науки теперь достаточно известна. Главное видится в другом – в поиске утерянных альтернатив. Надо отбросить ту традицию, которая начинает историю науки о случайном с рождения ТВ (например, с переписки Б. Паскаля и П. Ферма в 1654 г.), а размышления предыдущих двух тысяч лет сводит к нескольким античным цитатам, никак не связанным с остальным текстом.

Такая традиция просто лишает нас возможности понять суть дела, поскольку как раз рождение ТВ и явилось моментом фактического окончания серьезной дискуссии о природе случайности. Обсуждать стали более частную проблему – "природу вероятности", обсуждали триста лет и добились в XX веке огромного успеха в самой ТВ. Но теория почему-то работает в одних областях, не работает в других, и никто не может толком указать границ ее применимости [Алимов, 1980; Тутубалин, 1993].

Суть анализа должна, на мой взгляд, состоять в поиске ключевых моментов развития алеатики, в выявлении основных альтернатив, из которых в прошлом производился выбор путей развития. Лишь после такого анализа можно надеяться понять, из какого понятийного тупика следует выбираться, каким из забытых альтернатив следовать.

По этому пути мы и двинемся, однако не следует искать в нижеследующем связную историю ТВ или других дисциплин – далее излагаются только ключевые моменты, в которые происходил, как мне видится, выбор дальнейшего пути.

### 0-8. Неясность исходных позиций теории вероятностей

В ТВ вопрос о природе вероятности не рассматривается: существование вероятностей вводится тут как некоторое априорное свойство изучаемых объектов. Правда, в предисловиях обычно говорится, что ТВ ограничивается такими явлениями, где имеет место устойчивость частот, но она тоже предполагается заданной и не обсуждается. Странно, но вопрос не обсуждается и в МС, хотя заданными тут считаются не вероятности, а именно эмпирические частоты – они тоже молчаливо предполагаются устойчивыми (даже если рассматриваются неограниченно растущие выборки). Принято считать: как бы ни велика была болтанка текущих частот, достаточное увеличение выборки позволит применить к ней аппарат МС. Это не так – не только в социальных науках, но даже в физике.

Касаясь процедуры первичного анализа опытных данных физики, математик В.Н. Тутубалин [1993] заявляет, что "в большинстве случаев эта процедура закончится печально: статистическая устойчивость будет отвергнута".

Неясно, каковы условия появления случайности в форме стохастичности, в явлениях какого типа ее следует ожидать, а в каких нет. Если в старых учебниках ТВ (Б.В. Гнеденко, В. Феллер) этот вопрос хотя бы обозначался во введениях, то затем он исчез вовсе. Вильям Феллер, прежде – соавтор книги [Cantelli e.a., 1939] по обоснованию ТВ, свел затем "анализ оснований" к реплике: "Философское рассмотрение основных понятий теории вероятностей должно быть отделено от математической теории и ее приложений в такой же мере, как рассмотрение наших интуитивных представлений о пространстве отделяется теперь от геометрии" [Феллер, 1964, с. 13]. Но если бы физики в самом деле отделяли интуитивные представления о пространстве от геометрии, было бы невозможно, например, построить теорию относительности.

ТВ часто именуют математикой случайного, но вот мнение Эдмунда Бёрна, не видевшего в ТВ ни случайности, ни даже вероятности: согласившись с более ранним тезисом Сервьена, что "так называемая теория вероятностей не имеет ничего общего с вероятностью и тем более со случайностью", он заключил, что в ТВ арифметические расчеты именуются вероятностными, "но это не более, чем этикет", что в действительности решаются задачи комбинаторики. Он имел в виду не только классическую ТВ, но и труды школы Бореля – Колмогорова [Byrne, 1968, с. 33, 12].

Ссылка Бёрна на комбинаторику опрометчива, ибо математик обычно не понимает (или делает вид, что не понимает) вопроса, и отсылает к изощренной теоретикомножественной интерпретации вероятности Колмогоровым(*). Весь пафос такой позиции сводится к тому, что аксиоматическая ТВ внутри себя безупречна, тогда как претензии тех, кто не видит в ней безупречной модели реальных событий, сумбурны и вообще к математике как таковой не относятся. Могу лишь ответить: да, сумбурны, но к математике относятся. Первые философские соображения великого Лейбница о вероятности (см. гл. 2) более чем сумбурны, и все же ТВ родилась именно из них.

---

(*)См. например, примечания редактора (весьма, замечу, доброжелательного) к моей работе [Чайковский, 1996], где он предлагает читателю искать обсуждение "глубокого вопроса о связи математической теории вероятностей с явлениями реального мира" в книгах, в которых об этом нет практически ничего. Например, в знаменитой монографии Колмогорова (1933 г.), недавно переизданной. Замечу, что сам Колмогоров, обсуждая эти темы, к ней не отсылал. Наоборот, в предисловии ко второму изданию монографии он предлагал читать его работу 1956 г., отмечая: "Но и здесь оставались невыясненными причины того, почему мы так часто встречаемся на практике с устойчивостью частот", после чего отсылал к работам по алгоритмической ТВ [Колмогоров, 1998, с. X].

Теория Бореля – Колмогорова, будучи блестящим обобщением комбинаторики на бесконечные (включая несчетные) множества элементарных событий, ни слова не говорит о связи вероятности как меры с вероятностью как частотой. (Есть в начале монографии [Колмогоров, 1998] небольшой параграф "Отношение к данным опыта", но автор сам отметил, что "дальнейшее изложение... не использует рассуждений этого параграфа". Да их в том виде и нельзя было использовать ввиду их расплывчатости. Он честно признал: «мы... сознательно оставляем в стороне глубокие философские изыскания о понятии вероятности в мире опыта», отсылок не дал, так что традиционные ссылки на этот труд как на философски обоснованнный странны.) Мы обсудим эту связь в главе 7. До этого нам придется исследовать в главе 4 феномен стохастичности по Колмогорову, казалось бы хорошо известный. Стохастичность оказывается далеко не самой беспорядочной случайностью.

В частности, наиболее интересные для теории эволюции случайности качественно более беспорядочны и не могут быть описаны никакими вероятностями (см. гл. 9). Надеюсь, что рано или поздно эти феномены привлекут внимание математиков.

Традиция различения случайности и вероятности не нова. Еще Куки, автор одной из немногих серьезных книг по проблеме случайности как таковой, писал в 1935 г.: "Для знания, исследующего только необходимость законов, норму ординарного мышления, или вероятность, [оказывается, что] случайность – всего лишь иррациональность, возбуждающая негодование с первого взгляда" [Kuki, 1966, с. 193].

Разумеется, проблема обоснования ТВ трудна. Считается, что ее решил в 1933 г. Колмогоров: "Поставив теорию вероятностей на... фундамент теории множеств и теории меры, Колмогоров одним махом дал не только логически удовлетворительное обоснование теории вероятностей, но и включил ее в кровеносную систему современной математики" [Реньи, 1970, с. 83]. Эта точка зрения царит поныне и препятствует всяким попыткам реального обоснования ТВ, т.е. попыткам увязать частоту и вероятность. А ведь именно Колмогоров сумел для одного случая увязать меру с частотой. Об этой "случайности по Колмогорову" далее будет сказано.

Почему математики-вероятники, при всем почтении к Колмогорову, напрочь отказываются учитывать его результаты по обоснованию ТВ в своей работе? Вопрос явно не к ним, а к методологам, которых большинство математиков вообще не считает учеными. Не жалуют их даже те немногие в школе Колмогорова, кто занят алгоритмической случайностью.

Так, в одной из лучших работ на эту тему, живой и историчной, тем не менее читаем, что проблема возникновения случайности в эксперименте "не относится к математике и поэтому останется без комментариев". Это неверно – она не относится лишь к ТВ в ее узком понимании.

Закончена же статья и вовсе странно: "мы пытались рассказать о математических понятиях и утверждениях, относящихся к вопросу о причинах применимости математической теории вероятностей... Впрочем вопрос этот принадлежит скорее не математике, а философии науки – и, следовательно, им следует заниматься специалистам в этой области" [Шень, 1982, с. 16, 41]. Если так, то элементарная научная корректность требовала отослать читателя к соответствующим работам, чего, однако, никогда не делается (как не делалось и самим Колмогоровым).

Причины такого невнимания будут рассмотрены в главе 5, пока же повторю – вопросы алеатики приходится ныне ставить нематематикам. В этом я и вижу некоторое оправдание своей самонадеянной попытки предлагаемого в данной книге анализа проблем случайности.

# ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. СТАНОВЛЕНИЕ АЛЕАТИКИ

## Глава 1. Рождение проблемы

Люсьен Леви-Брюль, ведущий этнолог, полагал, что "для первобытных людей нет ничего случайного", что они каждому событию готовы придумать причину [Леви-Брюль, 1999, с. 60]. Хотя сам же он признавал, что нынешних "первобытных" (т.е. не имеющих государственности) людей нельзя отождествлять с нашими первобытными предками, поскольку первые прошли столь же длинную историю, что и мы, однако за неимением иного материала все проводят явно или неявно это отождествление. В нашем случае параллель тоже уместна: первые письменные данные свидетельствуют, что древние авторы случайности не ведали.

Оставляя в стороне древний Восток и прочие регионы (к сожалению, их история мне почти неизвестна), начнем с древней Греции.

### 1-1. Смыслы слова "случайность" у греков

То, что греки поначалу отрицали случайность как таковую, довольно ясно видно из того, что те слова, которыми они впоследствии обозначили случайность, первоначально обозначали богинь – Тюхэ (богиня судьбы и случая) и Автоматия (богиня счастья и случая). Впрочем, вторая засвидетельствована поздно, у Плутарха [Liddell, Scott, 1940], а потому могла быть литературным вымыслом. Но так или иначе, в ранних текстах мы не видим случайности, а слово *тюхэ* означает, как видно из контекста, удачу и судьбу. Первое дошедшее до нас его употребление относится к середине VII века – это стих Архилоха, переведенный В. Вересаевым так:

Всё человеку, Перикл, судьба посылает и случай.

В подлиннике же здесь значится: *мойра кай тюхэ*, что, учтя теистические взгляды поэта, надо бы прочесть как плеоназм(*) "неизбежность и судьба". Аналогичны и другие ранние примеры, начиная с "семи мудрецов", живших вскоре после Архилоха: их афоризмы со словом *тюхэ* переводят как "Удаче молись" (Клеобул) и "...благодарен судьбе" (Фалес) [Фрагменты..., 1989]. Спустя столетие слово *тюхэ* впервые стало употребляться в двух смыслах – как судьба и как случайное стечение обстоятельств (у Софокла). Через сто лет оно потеряло связь с понятием судьбы (у Аристотеля), но впоследствии опять стало обозначать судьбу (у Полибия). Всё это сильно затрудняет выяснение понимания греками сути случайности.

Греки хорошо знали две случайностные процедуры – азартные игры и жеребьёвку, но видели в них не случайность, а знак судьбы. И уж вряд ли в

---

(*)Плеоназмы, т.е. речевые излишества (в данном случае – конъюнкция синонимов) довольно характерны для раннегреческой поэзии (Архилох творил в середине -VII века). Теизм – обозначение для любой религии, признающей божество в качестве управляющего всеми явлениями.

древности кто-нибудь понимал их как выбор одного из *равновозможных* вариантов – дошедшие до нас древние игральные кости на удивление несимметричны, а правила игр задавали выигрыши без связи с их вероятностями [Пятницын, 1976]. Бросание кости или извлечение жребия всегда было вопросом, заданным судьбе [Тайлор, 1989].

Кроме этой простейшей случайности, греки знали еще самопроизвольность (греч. сущ. *автоматидзон*, лат. прилаг. *spontaneus*), видимо введенную в науку Анаксагором [Фрагменты..., с. 518], а также случайное в смысле "привходящее", т.е. не задевающее сущности (греч. причастие *симбебэкос*, лат. сущ. *accidens*), широко использованное как философский термин Аристотелем. Эволюцию значений слов позволяют проследить словари типа [Liddell, Scott, 1940].

Рассуждения о роли случайности в мире появились задолго до попыток хоть как-то обрисовать саму случайность. Видимо, первым ввел ее в философскую картину мира около -500 года Гераклит: "Что такое Век?.. Дитя играющее, кости бросающее, то выигрывающее, то проигрывающее"; "Нет ничего непостояннней судьбы (Тюхэ), которая, словно при игре в пессейю (в кости – Ю.Ч.), оборачивает человеческую жизнь" [Фрагменты, с. 243]. Тут налицо пересказ мысли времен Архилоха, но он смещает смысл слова "тюхэ" от судьбы к случайности.

Еще через полвека Эмпедокл довольно ясно показал, что не может построить свою систему мира на чисто механических принципах и потому нужна случайность. Она имела у Эмпедокла самый смутный характер; так, во фрагменте В 53 по Дильсу [Фрагменты, 1989, с. 362] о космогоническом потоке эфира сказано:

Ибо так он случайно бежал иногда, а часто – иначе.

Слово "случайно" (*синекюрсе*), образованное от *кюро* – "наталкиваться", –первое дошедшее до нас буквально обозначение интересующего нас феномена. Такое понимание случайности дало Эмпедоклу возможность рассуждать о первичном появлении животных как столкновении и соединении разнородных органов (В 61, перевод Г. Якубаниса):

Множество стало рождаться двуликих существ и двугрудых,
Твари бычачьей породы с лицом человека являлись...
Женской природы мужчины, с бесплодными членами твари.

Но ни на что не годные гибли, а годные оставались жить (стихотворного фрагмента на сей счет не дошло, есть лишь свидетельство древнего комментатора).

Первое дошедшее до нас обозначение случайности в прозе принадлежит современнику Эмпедокла атомисту Левкиппу (фрагмент В 2 по Дильсу): "Ни одна вещь не возникает случайно (*матэн*), но все – со смыслом и по необходимости". Слово *матэн* буквально означает "попусту, без цели". Как видим, у Эмпедокла случайность понята как неожиданность, а у Левкиппа – как отсутствие цели.

Более полное и разнообразное понимание случайности оставил нам Анаксагор, тоже современник Эмпедокла: он понимал ее и как "причину, неясную человеческому рассудку", и как отрицание роли судьбы (богов), и как самопроизвольность природных явлений [Фрагменты, с. 522]. Интереснее всего цитата: "Ибо Случаем (Тюхэ) мы привыкли называть те события в жизни, которые не поддаются расчету людей. Если бы наши замыслы всегда удавались, то самого имени Случая не существовало бы" [Фрагменты, с. 535]; к сожалению, точно приписать ее Анаксагору нельзя.

Демокрит полагал (около -400 г.), что причину имеет всё и что случайность люди ввели, "чтобы оправдать свою глупость". Однако он же положил в основание своей натурфилософии беспорядочное движение атомов, из-за которого явления приходится фактически рассматривать как случайные. (Цитаты см. [Майстров, 1980, с. 12].)

Демокрит заявлял, что мир подчинен строгой причинности, тогда как случайность – фикция, следствие нашего незнания. То был новый взгляд на случайность, противоречивший прежним взглядам на нее (как на неожиданность, беспричинность и бесцельность), и все они бытуют поныне.

Платон, как известно, не любил Демокрита и никогда его не упоминал. Поэтому мы не можем ручаться, что изложенные им взгляды (явно демокритовские по сути) не пародируют мнение атомистов, но иного источника у нас нет. Говоря о возникновении живой и неживой природы, Платон назвал две позиции – что всё возникло либо "благодаря созидательной деятельности", либо "всё это природа порождает в силу какой-то самопроизвольной причины, производящей без участия разума"; при этом вторая позиция подана им как "убеждение и слова большинства" (Софист, 265с).

Говоря о создании мира "умом-демиургом", Платон добавил, что "следует привнести также и вид беспорядочной причины" (Тимей, 48а). Несколько раз Платон упомянул случай (*тюхэ*) как нечто, противопоставленное разумному действию, т.е. в контексте, исключающем употребление слова *тюхэ* в значении "судьба" (как мы теперь понимаем судьбу). Например: "Ты опытен – и дни твои направляет искусство, неопытен – и они катятся по прихоти случая" (Горгий, 488с).

К сожалению, Платон нигде, насколько знаю, не разобрал вопрос подробно, и мне остается лишь заметить, что платонов демиург творил мир предметов, взирая на мир идей как на инструкцию, так что "беспорядочная причина" выступает источником предметов, без идеи созданных. О них у Платона сказано: такие вещи, "как, например, волос, грязь, сор и всякая другая не заслуживающая внимания дрянь", в мире идей не представлены и поэтому "только таковы, какими мы их видим" (Парменид, 130 cd). Они появляются в указанном смысле случайно.

Алкиной, позднеантичный комментатор Платона, так формулировал взгляд Платона на случайность как свободу выбора: "Природа возможного помещается где-то между истиной и ложью; на этой по природе неопределенной возможности и основывается наша свободная воля. Истиной или ложью будет то, что получится после нашего выбора. [...] Но возможное не есть что либо из этого (из потенций – Ю.Ч,), а то неопределившееся и зависящее от нашей воли, что становится истинным или ложным в зависимости от того, какая из наших наклонностей возьмет верх" [Алкиной, 1994, с. 652]. К этой идее мы еще обратимся в связи с концепцией предрасположенности, а пока замечу, что спектр тогдашних пониманий случайности удивительно близок нынешнему.

### *1-1.1. Случайность у греческих врачей*

Возможно, что уже во времена Эмпедокла и Анаксагора случайность признавалась врачами-натурфилософами. Об этом есть свидетельство у довольно позднего (I век) доксографа (собирателя мнений), известного как Псевдо-Плутарх. Параграф "Почему у одних родителей дети похожи на них, а у других нет" начат у него фразой: "По мнению большинства врачей, дети получаются непохожими [на родителей] случайно и самопроизвольно (*тюхикос кай автоматос*), когда душа входит в семя мужское и женское" [Diels, 1879, с. 423]. Тут тоже плеоназм, но он фиксирует новый смысл слова *тюхэ* как синонима слова *автоматон* (самопроизвольность, беспричинность). К сожалению, нельзя сказать, о какой эпохе идет речь – далее дан взгляд Эмпедокла, но Псевдо-Плутарх не всегда располагал мнения в хронологическом порядке.

О случайности врачи думали не только в связи с наследственностью. Главное было в том, что при одинаковых симптомах и лечении один больной выздоравливает, а другой – нет. Книга Гиппократа "Прогностика" начата словами: "Мне кажется, что для врача самое лучшее – позаботиться о возможности предвидения", причем далее это предвидение трактуется без всякого элемента случайности, так, будто хороший врач при достаточном знании истории болезни может предсказать ее исход наверняка. Это характерно для раннего греческого мировоззрения (не различавшего судьбу и случай), но случайность то и дело просвечивает в конкретном материале.

Вот для примера "Афоризмы" Гиппократа: в целом они выдержаны в духе строгой причинности, но не все. Таков знаменитый первый афоризм: "Жизнь коротка, путь искусства долог, удобный случай скоропреходящ, опыт обманчив, суждение трудно...". Далее 31 афоризм (из 422) фиксирует отличие частого явления от редкого, в чем можно видеть первый подход к идее вероятности.

Наиболее для нашей темы важны 5 афоризмов Гиппократа (Афоризмы, I, 1; II, 19, 27, 52; III, 19), где изложено отношение автора к случайности. Там сказано, что "в острых болезнях нельзя дать совершенно верных предсказаний", что не следует доверять единичным неожиданным удачам и неудачам, что "болезни, конечно, являются всякие при всяких временах года", но каждое время имеет свои преимущественные болезни (дан их список). Видны первые проблески статистического взгляда на мир, а именно – зачатки статистического понимания вероятности. Увы, далее по этому пути Античность не продвинулась. Вероятным в древности именовалось лишь то, чему можно верить.

### 1-2. Случайность и вероятность у греческих философов

Вскоре после Гиппократа о смысле вероятности заговорили в кругу Платона. Платон сперва не жаловал ее: "И вместо того чтобы приводить неопровержимые доказательства, вы довольствуетесь вероятностью, а ведь если бы ... геометр стал пользоваться ею в геометрии, грош была бы ему цена" (Теэтет, 162 e), и противопоставлял истину правдоподобию (Федон, 92 d; Федр, 272 e).

Затем в Академии появился юный Аристотель, вскоре начавший исследовать логику. Он писал при этом, что полноценное знание о случайном невозможно, поскольку "если случайное [*симбебэкос*, т.е. привходящее] не есть ни то, что бывает большей частью, ни необходимое, то для него не может быть доказательства" (Вторая аналитика. I. 30, 25). Здесь мы видим сразу и что-то вроде определения (случайное – то, что происходит достаточно редко), и некое мнение – что знание о случайном (редком) должно неизбежно носить характер второсортного, в отличие от знания о вероятном (частом).

В греческом 3 слова обозначали вероятность: *ейкос (eikos*), *ейлогон* (*eylogon*) и *пифанотес* (*pithanotes*), и все означали вероятность в смысле убедительности. Они впервые зафиксированы в текстах времен старости Эмпедокла и юности Сократа (т.е. веком позже, чем обозначения случайности), а затем, у позднего Платона и у Аристотеля – в том смысле, который ныне именуют логической вероятностью.

Понятия вероятности в сколько-то близком к нашему смысле древность не оставила, со случайностью вероятность связана не была. Что касается столь привычного нам феномена равновероятности, то он приводил греков в замешательство. Там, где не было оснований предпочесть один из вариантов, останавливалось не только их рассуждение, но, по их мнению, и само движение (Аристотель. О небе, B 13).

Но вернемся к Платону. По-видимому, вероятностная проблематика вошла в быт Академии, что видно по поздним диалогам Платона. <<Удивительным образом, вся космология платоновского "Тимея" строится исключительно на понятии вероятности ... Платон считает необходимым на каждом шагу указывать, ... что хотя боги и космос представляют собою бытие абсолютное, тем не менее мы-то, люди ... можем представлять себе космос только на основе более или менее вероятных умозаключений>> – писал А.Ф. Лосев [Секст, 1975, с. 13]. Здесь речь шла о так называемой *логической* вероятности – о степени подтверждения некоторого мнения разнородными аргументами.

Английский исследователь Вильям Гатри, автор самого подробного анализа греческой философии, полагал, что в своем последнем диалоге "Законы" Платон признал роль случайности в порождении мира [Guthrie, 1975, с. 95, 361]. В самом деле, вот как диалог закончен. Изложив желаемые законы государства, Платон усомнился в том, что их сможет проводить в жизнь Собрание (т.е. правительство), состоящее из реальных, а не из идеальных, людей, и вложил в уста Афинянина такой пассаж:

"Согласно поговорке, друзья мои, истина лежит посередине. Если бы мы захотели рискнуть всем государственным строем, нам надо было бы поступить так, как говорят игроки: либо выбросить трижды шесть, либо три простых игральных кости. Я хочу рискнуть вместе с вами...". И, напомнив свои взгляды на воспитание, провозгласил: "Пусть и члены нашего собрания будут у нас смешаны между собой с самым тщательным отбором и надлежащим образом воспитаны" (Законы, XII, 968 е, 969 b).

Комментаторы справедливо сочли пассаж неясным, но, по-моему, сюжет был не вполне ясен и 80-летнему автору. Ясно лишь, что он нёс случайностную нагрузку и предлагал усредняющую процедуру. Видимо, в Академии тогда сложилось что-то вроде игрового жаргона, на который Платон и перешел, не имея более точного языка. Он, пользуясь знакомой ученикам лексикой, предлагал нечто, о смысле чего мы можем лишь догадываться. По-моему, он неуверенно намекал, что будущих правителей придется выводить скрещиванием, словно породу скота(*). Замечу, что скрещивание – статистическая процедура, в которой вероятностный язык так же уместен, как в играх.

Чтобы закончить с античной вероятностью, надо вспомнить школу скептиков, отрицавшую возможность достоверного знания. Среди старших скептиков (-III век) нам интересны те, кто позже получил имя "пробабилисты" (Аркесилай и др.). Они полагали, что точное знание невозможно и что цель мудреца – наиболее вероятное (самое близкое к истине) знание(**); выступали против самого принципа логического обоснования истины – никакое доказательство, якобы, невозможно, ибо ведет в бесконечность: каждое доказываемое положение основывается на другом, это – на третьем и т.д. Но какие-то представления нужны, и приходится искать вероятные точки зрения [Богомолов, 1985, с. 301–302; Целлер, 1996, с. 203-205]. Речь тут опять шла не о случайных событиях, а о логической вероятности, но в то время это различие никому заметно не было.

В целом античный анализ случайности шел без попыток оценить вероятность наступления случайного события. Понимание вероятности как некоей меры случайности целиком принадлежит Новому времени. Однако, увлекшись вероятностями, Новое время надолго забыло о тех аспектах случайности, которые не связаны с вероятностью.

Смешение различных пониманий вероятности продолжается до сих пор; и до сих пор бытует тот же, что у пробабилистов, прием: вместо поиска логических схем ссылаться на случайность и вероятность; особенно грешат этим

(*)Ранее Платон мечтал о селекции граждан под руководством правителей (Государство, 415bc; 459de; 468c; 546d). Но кто будет отбирать самих правителей? Тут был риск, и потому успех мыслился как случайный.

(**)Этот тезис заимствован ими у позднего Платона (Тимей, 44d).

космологи (*антропный принцип*) и дарвинисты (*принцип отбора случайных вариаций*).

### 1-3. Анализ случайности, не требующий понятия "вероятность"

Подробнее всего Аристотель рассмотрел случайность в "Физике" (книга 2, главы 4–6). К сожалению, этот труд, как и многие другие, является лишь записью лекций Аристотеля, причем видно, что писавшие плохо понимали лектора, так что текст распадается на слабо увязанные афоризмы, иногда противоречащие друг другу. Однако можно уверенно различить такие понятия, как случай (*тюхэ*) и самопроизвольность (*то автоматон*): "оба – и случай и самопроизвольность – как было сказано, суть причины по совпадению" (197 a 35), но "случай есть причина по совпадению для событий, происходящих по выбору цели" (197 a 6), тогда как самопроизвольно то, что совершается "не ради случившегося, [но] причина чего лежит вовне" (197 b 19). То есть слово "случай" относится только к тому, что сознательно выбрано, и "ни неодушевленная вещь, ни животное, ни ребенок ничего не делают случайно, так как они не обладают способностью выбора" (197 b 7). Самопроизвольное, наоборот, свойственна и животным, и вещам. Замечу: наше нынешнее словоупотребление почти противоположно (и ребенку в свободе выбора мы не отказываем), но само аристотелевское разделение терминов сохраняет смысл поныне, чем мы далее не раз воспользуемся.

Любопытны и приводимые Аристотелем мнения. Например: "Есть и такие, которые причиной и началом нашего Неба (мироздания – Ю.Ч.) и всех миров считают самопроизволюность" (196 a 25); здесь имелись в виду атомисты. Или: "Есть и такие, которым случай кажется причиной, только неясной для человеческого разуменья, будучи чем-то божественным и сверхъестественным" (196 b 6–7).

Затем Аристотель обратился к анализу роли случайности в природе. Исследуя своих предшественников (в основном – Эмпедокла и Демокрита), Аристотель сформулировал три точки зрения на случайность: 1) то, о чем говорят "это случайно", но что на деле имеет определенную причину; 2) мир возник случайно, но затем всё протекает по регулярным законам; 3) случайность как недоступная пониманию закономерность. Гатри отмечал, что для греков была очевидна "естественная необходимость, присущая каждому отдельному предмету", тогда как "их столкновение может быть случайно, хотя вызывается необходимостью". А третью точку зрения Гатри иллюстрировал вышеупомянутым изречением Демокрита: "Люди выдумали случайность, чтобы оправдать свою глупость" [Guthrie, 1965, с. 164, 419]. Последней идее, довольно поверхностной, суждена была долгая жизнь.

После смерти Платона, покинув Афины, Аристотель сменил и круг научных интересов – вместо логики и физики занялся зоологией. Описывая органы тела, он задался вопросом о назначении каждого из них. Роль селезёнки была ему неизвестна (ходячее тогда представление о ней как об источнике "черной желчи" он, видимо, отвергал), и Стагирит привлек, как мы бы сейчас сказали, соображения симметрии: "Всё возникает в двойном числе. Причиной является разделение тела, которое, будучи двойственным, стремится к единому началу: имеется ведь верх и низ, перед и зад, право и лево ... А относительно печени и селезенки по праву можно недоумевать. Причиной этого – то, что у животных, имеющих селезенку в силу необходимости, она покажется как бы побочной печенью; у имеющих же ее не по необходимости" она "чрезвычайно малая, как бы для отметки". Далее, "так как печень расположена больше на правой стороне, то [на левой] возникла селезенка, так что она в известной мере необходима для всех животных, но не очень". Это странное (в устах логика) заявление тут же кристаллизовано в парадокс: "Селезенка присуща животным, имеющим ее, в силу случайной необходимости (*ката симбебэкос екс ананкэс*)" (О частях животных, 670 а 31).

Случайная необходимость здесь – реализация некоторого вполне определенного (неслучайного) правила, но правило может быть как реализовано в данном объекте, так и не реализовано, и в этом состоит случайность. В такой экстравагантной форме Аристотель подошел к проблеме плана строения организма, живо обсуждаемой биологами поныне. То есть, закон может быть реализован так, а может иначе – случайным образом, но каждая реализация может приводить только к своему необходимому итогу. Приведу аналогию с нашей наукой: молекула воды может как диссоциировать, так и нет, но сама диссоциация возможна лишь на протон и гидроксил, а не на что-либо иное.

Близкое понятие отметил Гатри, описывая отношение греков к случайности: это – "необходимая случайность" (*ананкайя тюхэ*). Сперва оно попало в речь трагиков (Софокл, Еврипид), а затем – в диалог Платона (Законы, 806 а). Для Гатри это – свидетельство архаичности эллинского мышления, которое плохо отличало судьбу от случая и которое нам трудно понять [Guthrie, 1965, с. 164], но, по-моему, тут можно сказать большее. А именно, случайность ограничена рамками необходимости и наоборот – необходимость ограничена рамками случайности. Это понимание случайности целиком перешло в нынешний вариант номогенеза – см. главы 9 и 10.

Следующим после Аристотеля исследователем случайности был Эпикур. По его определению, "случайные свойства (*симптомата*) не имеют ни природы целого, которое мы, беря его в совокупности, называем телом, ни природы свойств, постоянно сопутствующих ему, без которых нельзя представить тело" (Письмо к Геродоту, 70). Едва ли не первым он прямо заявил, что предсказания оправдываются из-за "случайного совпадения обстоятельств" (*ката синкюрэма гинонтай*) (Письмо к Менекею, 115). По словам Цицерона (О границах добра и зла, I, 6), Эпикур "заявил, что атом якобы чуть-чуть отклоняется" в своем движении, отчего и "возникают сплетения, сочетания и сцепления атомов между собой, и в результате образуется мир и всё, что в нем содержится". Тем самым, более древняя идея (о том, что наблюдаемое разнообразие вызвано случайным взаимодействием неслучайных процессов) дополнена: случай получил первичный, онтологический статус.

Можно подумать, что, как и ранние философы, Эпикур обожествлял случай, но это не так: "Случай (*тюхэ*) мало имеет отношения к мудрому: все самые большие и самые главные дела устроил разум" (Главные мысли, XVI). Этим эпикуров атомизм выгодно отличался от демокритова, где хоть и отрицалась случайность, но тезис о бесцельных столкновениях атомов порождал у читателя мысль об основополагающей ее роли.

Атомизму Эпикура посвящена огромная литература, и мнения предельно различны: от уверенности, что весь он был "поверхностным просветительством" [Виндельбанд, 1902, с. 284], до заявления, что "нельзя умолчать о поразительном совпадении принципиального содержания идеи Эпикура – Лукреция о спонтанном отклонении с так называемым "соотношением неопределенности" современной физики" (С.И. Вавилов, в книге [Лукреций, 1947]). Что касается взглядов самого Эпикура, то его "отклонение" (*паренклизис*) известно, кроме реплик Цицерона, лишь от доксографов, едва упомянувших, что отклонение порождает "дрожание" (*палмос*) и "отскакивание" *(апопалмос*) атомов [Diels, 1879, с. 311]. Остальное додумано комментаторами.

### 1-4. Случайность у римлян

Немногим полнее осветил отклонение (clinamen) атомов Лукреций:

Собственным весом тела изначальные в некое время
В месте неведомом нам начинают слегка отклоняться,
Так что едва и назвать отклонением это возможно.
Если ж, как капли дождя, они вниз продолжали бы падать,
Не отклоняясь ничуть от пути в пустоте необъятной,
То никаких бы ни встреч, ни толчков у начал не рождалось
И ничего никогда породить не могла бы природа (II, 218).

Тему малых отклонений блестяще развил современник Лукреция неопифагореец Нигидий Фигул: "Повернув гончарное колесо с такою силою, с какою в состоянии был это сделать, он во время кружения его прикоснулся к нему два раза черною краскою с величайшею скоростию как бы в одном и том же месте. Когда движение колеса прекратилось, сделанные им знаки были найдены... на немалом расстоянии один от другого. Так точно, сказал он, при известной быстроте небесного круговращения, хотя бы один [заказчик гороскопа – *Ю.Ч.*] после другого рождался с тою же скоростию, с какою я два раза прикоснулся к колесу, это делает большую разницу в пространстве небесном; от этого, пояснил он, оказывается весьма значительное различие в нравах и случайностях жизни двойней" (Августин. О граде Божием, кн. V, гл. III).

Это – единственная в древности попытка, какая мне известна, связать случайность и механику. Лишь через две тысячи лет та же мысль повторена и развита в "рулетке Пуанкаре" (о ней см. гл. 6).

Поздняя античность оттачивала формулировки случайности. Например, "делом случая называют то, что не имеет никаких причин или происходит не в силу какого-нибудь разумного порядка; а делом судьбы – то, что случается в силу некоего неизбежного порядка, вопреки воле Божией и воле людской" (Августин. О граде Божием, кн. V, гл. I). Многие из тогдашних формулировок дожили в науке до XX века. Их анализ в связи с биологией см. [Берг, 1977, с. 52–77; 108–110; 179–181].

Римский неоплатоник Порфирий, комментируя логику Аристотеля, ввел (около 270 г.) систему классификации признаков, известную как "древо Порфирия", в которой любой объект имеет пять типов свойств – признаки рода и вида, видовое отличие, собственный признак и несобственный (случайный) признак [Богомолов, 1985, с. 333]. Здесь случайное (привходящее, accidentia) есть свойство, которое может как быть у объекта, так и не быть, не меняя этим его отношений к другим объектам (пример: лысина).

Объясняя через 250 лет Порфирия, последний римский философ Северин Боэций писал: акцидентальные различия "производят только инаковость (alteratio), но не создают чего-либо другого", а собственные (субстанциональные) отличия "не только изменяют вещь, но и делают ее другою (aliud)" [Боэций, 1990, с.79].

Мысль Боэция важна до сих пор. Если бы биологи в массе своей умели проводить это логическое разграничение, вряд ли мог бы, например, возникнуть *дарвинизм*. Ведь его основное положение утверждает, что наблюдаемые различия между особями одной популяции являют собой материал (и притом неограниченный) для эволюции; т.е. индивидуальным случайным вариациям (акциденциям) приписан субстанциональный статус. На этот изъян критики указывали много раз, но Чарлз Дарвин и его сподвижники, судя по всему, просто не поняли, в чем дело. (В наше время говорят, что дарвинистов больше интересуют различия между организмами, чем сами организмы – итог господства статистического подхода к природе – см. гл. 5.)

Около 400 года блаженный Августин описал свою беседу с врачом, "стариком острого ума", который отвергал возможность предсказания будущего, а на вопрос, почему предсказания астрологов часто сбываются, отвечал, что "это делается силою случая, всегда и всюду действующего в природе", причем давал этому два совсем различных объяснения. Первое: "Если человеку, гадающему по книге поэта ... часто выпадает стих, изумительно соответствующий его делу, то можно ли удивляться, если человеческая душа по какому-то побуждению свыше ... изречет вовсе не по науке, а чисто случайно то, что согласуется с делами и обстоятельствами вопрошающего". Второе: "Предсказатели не знают того, что произойдет, но, говоря о многом, натыкаются на то, что действительно произойдет" (Августин. Исповедь. IV, 7; VII, 8). Первая позиция по сути отрицает случайность. Наоборот, второе объяснение врача на ней основано, но это вовсе не привычная нам случайность, имеющая частоту повторений, а случайное "побуждение свыше". (В наше время тут любят говорить о предпочтении или предрасположении.) Августин стал "наблюдать за близнецами", чтобы убедиться, что идентичные условия рождения не дают идентичности судеб. Увы, вместо изложения этого статистического наблюдения, Августин лишь напомнил о различии судеб Исава и Иакова, библейских близнецов (там же, VII, 10), – исход реального наблюдения его не интересовал. Средневековье вступало в права.

Позже Августин бросил мельком: "мы знали близнецов, которые не только различались своею деятельностью... но и болезням подвергались различным". Теперь он полагал, что если предсказания сбываются, то – "по тайному внушению недобрых духов", т.е. опять стал отрицать случайность (О граде Божием, кн. V, гл. II, VII).

Через сто лет Боэций, "последний римлянин", изложил (в тюрьме, в ожидании казни), самую яркую и точную формулировку античного взгляда на случайность [Боэций, 1990, с. 274-275]. В нынешних терминах она звучала бы так: случайность – не подлинное явление, а результат скрещения независимых друг от друга процессов, каждый из которых имеет вполне определенную (неслучайную) причину. Такое понимание случайности (восходящее, как мы видели, к Аристотелю) широко распространено до сих пор, но в наше время уже не является общепризнанным, поскольку, как мы узнаем в главе 5, понемногу распространяется понимание многоплановости феномена случайности.

### 1-5. Первые количественные подходы

Средневековье включило античную проблематику в свою систему понятий, труды Августина и Боэция широко читались, но прогресса в понимании случайности не обнаружилось вплоть до Возрождения. Зато была поставлена новая проблема – численного анализа случайности.

Первая попытка подсчитать возможные исходы игры в три кости известна в X в. в Англии, а Франция (будущая родина ТВ) дала в XIII в. миру первый результат, нужный для ТВ: священник Ришар де Фурниваль изложил в стихах полный подсчет, тоже для трех костей, способов, какими может реализоваться каждое число очков [Kendall, 1956]. Вскоре случайностью и вероятностью заинтересовался великий теолог и философ Фома Аквинский. Историк Эдмунд Бёрн посвятил этому вопросу книгу [Byrne, 1968], где счел Фому предтечей не только логической, но и статистической вероятности. Другие историки видели у Фомы лишь логическую вероятность [Kendall, 1956; Brakel, 1976].

Не будем вступать в спор – по-моему, гораздо интереснее понять, что Фома мог читать Ришара и у него усвоить. Дело в том, что Ришар в дни юности Фомы был лицом заметным (настоятелем строившегося Амьенского собора, крупнейшего во Франции) и рукопись его широко читалась. У Ришара налицо первый подход к *априорному* пониманию вероятности, т.е. к пониманию ее как отношения благоприятных исходов ко всем мыслимым исходам, причем исходы мыслятся как равновозможные. У обоих авторов мы видим общий ключевой термин – virtus (стойкость, энергия, сила), примененный для характеристики вероятности. Ришар обозначал им число способов, каким достигается данное число очков [Kendall, 1956, с. 13], а Фома – силу аргументации.

Разделив, по Аристотелю, случайное (редкое) и вероятное (частое), Фома формулировал для вероятного: "чем интенсивнее сила (virtus) природы, тем реже она не достигает своего результата", причем как "в природных вещах", так и "в процессе размышления" мы находим некоторую степень достоверности [там же, с. 12].

По-моему, Аквинат взял аргумент у новой теории (зарождавшейся теории азартных игр) для уточнения античной (логической) теории. Так это или нет – в любом случае надо признать, что ТВ на 400 лет старше, чем принято думать. Нам, однако, важен не приоритет, а суть дела: по-видимому, и в XIII, и в XVII веках подсчет числа комбинаций в игре интересовал философов не сам по себе, а как средство распространить идею численной оценки с "природных вещей" на "процесс размышления". Если так, то следует признать, что обсуждались тогда не только зачатки будущей ТВ (как пишут историки), но и *наиболее общие вопросы алеатики*.

При этом давнее смутное понимание логической вероятности вольно или невольно отождествлялось с новооткрытой чёткой игровой вероятностью, допускавшей расчет. Возникла путаница, бытующая по сей день, о чем у нас пойдет речь в главе 2.

Около 1440 года немецко-итальянский теолог и философ Николай Кузанский написал книгу "Об учёном незнании". Этим термином он обозначал, многое, в том числе и пробабилизм: "суть вещей, истина сущего, непостижима в своей чистоте, и, хоть философы ее разыскивают, никто не нашел ее как она есть. И чем глубже будет наша учёность в этом незнании, тем ближе мы приступим к истине" (Уч. незн., 10). Трактуя случайное свойство привычным для перипатетиков образом (как привходящее), он тем не менее видел самый акт случайного выбора как некую самодовлеющую сущность: "У всякого творения от Бога – единство, отличённость и связь со Вселенной, ... но что его единство осуществляется во множественности, отличённость – в смешении, а связь – в разногласии, то это не от Бога и не от какой-то положительной причины, но потому, что так ему случилось быть" (там же, 99). Суждение для XV века замечательно смело.

Однако на вопрос – почему данный конкретный выбор произошёл так, а не иначе, он отвечал расплывчато. Вот, пожалуй, самое определенное суждение на сей счёт: "То, что этот мир произошёл из возможности на разумном основании, необходимо должно было получиться оттого, что у возможности была прилаженность(*) стать только этим миром... Так и Земля, и Солнце, и всё

(*) В лат. оригинале *aptitudo* (от *apto* – прилаживать). Переводить его словом *предрасположение* неверно, поскольку оно несёт на нынешнем языке (после К.Поппера) отсутствующий остальное: если бы они не таились в материи в неким образом определённой возможности, то не было бы большего основания, почему бы им скорее выйти в актуальность, чем не выйти" (там же, 138). Как видим, здесь для "выхода в актуальность" мало одной возможности, нужна еще некая "прилаженность", причем у чего она высока, то и выйдет наверняка.

Рассуждая о числах, философ ни разу даже не намекнул, что у случайности можно что-то измерить. Через полвека, в 1494 году, итальянский математик Лука Пачоли как бы восполнил этот пробел. Он описал задачу "о разделе ставки": как игрокам следует разделить банк, если игра прекращена ранее, чем было условлено? Притом задачу придумал не он – она известна еще из рукописи, написанной лет за сто до него и, возможно, восходит к арабскому источнику [Entwicklung..., 1988, с. 9; Секей, 1990, с. 19].

Пачоли предложил делить банк пропорционально очкам, набранным игроками в уже сыгранных партиях, независимо от числа оставшихся партий [Пачоли, 1994, с. 199]. Обычно это решение признают неверным ("Пачоли решал эти задачи без учета вероятностных соображений" [Майстров, 1980, с. 29]), но такие выводы поверхностны – задача многоаспектна и допускает разные представления о справедливом разделе; так что "при любом способе решения задачи здесь найдутся поводы для споров", как верно заметил в 1556 году математик Никколо Тарталья [там же, с. 35].

По-моему, именно в подходах к этой задаче и выявились принципиально различные понимания феномена случайности. Дело в том, что Пачоли рассматривал не только *азартные* (игра в кости), но и *спортивные* игры (стрельбу, мяч), где нельзя перечислить комбинации, поэтому мог исходить лишь из того, что сыгранные партии уже выявили способности игроков, каковым опытом и следует при разделе воспользоваться, т.е. делить банк пропорционально числу уже одержанных побед. Опыт как бы уже выявил *предрасположенности* (оказываемые игровой ситуацией каждому игроку), которые сохранились бы и в будущих партиях.

Последующие авторы, сохранив тематику (раздел ставки), анализировали только азартные игры и потому строили свои решения иначе – перечисляя возможные исходы каждой партии и полагая, что возможности игроков в каждой из несыгранных партий равны(*), а потому полагали: тем больше мне причитается, чем меньше партий мне осталось играть до выигрыша всего банка.

Та же вычурная задача раздела ставки легла в основу знаменитой переписки Паскаля и Ферма (1654 г.), о чем мы узнаем в главе 2.

---

в оригинале вероятностный смысл.

(*) Т.е. заменяя идею предрасположенности идеей равновозможности. Первым на необходимость учета вероятностей выигрышей в несыгранных партиях фактически (не применяя понятия вероятности) указал Джироламо Кардано, младший современник Луки [Пачоли, 1994, с. 200].

## Глава 2. Что такое вероятность

Сорок лет назад польский методолог Стефан Амстердамский отмечал: "В рамках аксиоматического исчисления само понятие вероятности не имеет развернутого (explicite) определения. Оно рассматривается как не получившее определения исходное понятие, поставленное в условия системы аксиом" [Закон..., 1967, с. 14]. Ныне это замечание столь же актуально, и наш историк физики пишет: <<Формально доминирующим считается "аксиоматический подход" А.Н. Колмогорова... рассматривающий теорию вероятностей как сугубо математическую дисциплину (частный раздел теории меры)... Единственным его недостатком является то, что сам термин "вероятность" при таком подходе вообще не определяется – он объявляется первичным понятием теории... Этим путем приходится идти и авторам соответствующих курсов теории вероятностей, лишь иллюстрируя (но не определяя) понятие "вероятность">> [Андреев, 2000, с. 214].

Действительно, согласно Колмогорову, "вся математическая теория вероятностей с формальной стороны может быть построена как теория меры... Тем не менее, по существу решаемых задач теория вероятностей остается самостоятельной математической дисциплиной; основные для теории вероятностей результаты (речь идет о законе больших чисел и других предельных теоремах – Ю.Ч.) кажутся искусственными и ненужными с точки зрения чистой теории меры". Сказав о формальной применимости теорем о независимых случайных событиях к неслучайностным задачам, он добавил: всё это имело бы мало интереса, если бы "не находилось в связи со свойствами реально независимых (в причинном смысле) явлений" [Колмогоров, 1956, с. 274, 272].

Уточню мысль А.В. Андреева: обычное для математиков выражение "вероятностью называется счетно-аддитивная мера..." для иных ученых бессодержательно и потому не служит им определением. Они вынуждены пользоваться различными (старыми, но до сих пор математически не продуманными) пониманиями вероятности, многие из которых как раз и описаны у Андреева. Как такое получилось, нам надо выяснить.

### 2-1. Ранние смыслы термина "вероятность"

Хотя слово "вероятность" в наше время означает меру случайности, однако прежде имело иной смысл. В прежние времена *вероятным* называли то, 1) во что можно верить, что может оказаться правдой; 2) что можно проверить; 3) на что можно надеяться. Если пользоваться нашим нынешним языком, то Аристотель *случайным* называл то, что происходит редко, а вероятным – то, что происходит часто. Для событий, которые могут с равной возможностью как происходить, так и не происходить, термина тогда не было, а сама такая ситуация приводила, как уже говорилось, греческих философов в замешательство. Во II-III веках, у младших скептиков, возник термин *изостения*, который переводят как равносилие, равновесие, равнозначность [Виндельбанд, 1902, с. 293; Целлер, 1996, с. 226]. Его можно перевести и как равновероятность, но с той оговоркой, что имеется в виду только логическая равновероятность, т.е. равнозначность утверждения и отрицания какого-то высказывания (а не, например, равная частота выпадения монеты гербом и цифрой, о чем в древности речи не было).

Как уже говорилось, никакого представления о *частоте* повторяющегося события, которую можно измерить, древность, по-видимому, не знала. Считалось, что исход случайного испытания определяется судьбой. В азартных играх использовались резко несимметричные кости в качестве справедливых, а наибольший выигрыш назначался за далеко не самый редкий исход. Слово "вероятность" не имело ничего общего с нынешним термином ТВ.

Надо выяснить, каким образом древнее слово *probabilitas* (вероятность) получило новый смысл. Без этого мы рискуем повторить судьбу прежних авторов, не сумевших договориться о смысле понятия "вероятность", поскольку этим словом одновременно обозначались совсем разные вещи. Происхождение термина "вероятность" расмотрено в работе [Чайковский, 2001], здесь же отметим самое необходимое.

Еще в средневековом банке произошло осознание феномена *статистической закономерности*. Оно широко использовалось, но в середине XVI века банковская система рухнула, и статистическая традиция пресеклась. Подробнее см. главу 5. По всей видимости, идея заново родилась в 1662 г. в поразительной небольшой книге Джона Граунта, торговца сукном, и тут же была подхвачена научным сообществом.

Граунт подошел в одном месте к идее вероятности: "Поскольку многие люди живут в большом страхе и опасении чего-то самого ужасного и предстоящих скверных болезней, я только укажу, сколько людей умирает от каждой: соответствующие числа, будучи сравнены с общим [числом умерших] 229250, дадут этим людям лучше понять вероятность [the hazard] этого" [Graunt, 1939, с. 31]. Очевидно, что здесь *the hazard* подразумевает *статистическую* вероятность умереть от данной причины.

В том же году в Париже вышла анонимная книга "Логика, или искусство мыслить", где вероятность (probabilité) была понята не только как степень уверенности, а и в других смыслах. Например: "для каждого (игрока – Ю.Ч.) вероятность проиграть один экю относится к вероятности выиграть девять экю как девять к одному" [Арно, Николь, 1991, с. 362]. Это – так называемая *априорная* вероятность. К ее связи со статистической мы и должны сейчас обратиться.

### 2-2. Кардано, ученый игрок

В главе 1 говорилось, что средневековые мыслители подошли к так называемому априорному (классическому) пониманию вероятности, описывая число способов, какими достигается тот или иной исход. Гораздо большего успеха добился Джироламо Кардано, один из "титанов Возрождения", давший в середине XVI века науке о вероятностях главные идеи. Он наиболее известен изобретением карданного шарнира для морского компаса (сходный работает в автомобиле) и формулой корней кубического уравнения, сам же себя он считал прежде всего врачом. В старости он больше всего говорил о болезнях и ценил свои знаменитые рецепты, но в молодости он был страстный игрок.

Около 1564 г. Кардано написал небольшую книжку "Liber de ludo aleae" (это заглавие можно перевести двояко: или "Книга о том, как играть в кости", или "Книга о случайных играх"). Хотя основная ее часть посвящена описанию самих игр (не только в кости), разоблачению способов мошенничества и рассуждениям о судьбе, но ее можно назвать также первым трудом по ТВ. Она ждала публикации сто лет, однако по-видимому современники знали ее содержание [Hacking, 1975, с. 54; Hald, 1990, с. 41]. Латинский подлинник опубликован в книге [Cardano, 1663] на с. 262-276 in folio, а английский перевод – в книге [Ore, 1953], где переводчик (Сидней Гулд) местами излишне модернизировал старинный текст.

Кардано впервые сопоставил то, что мы теперь называем априорной вероятностью, с тем, что мы называем статистической вероятностью. Он настолько уверенно рассуждал на эти темы, что Гулд то и дело использовал, переводя его книгу, слово *probability*, прямого эквивалента которому у Кардано нет. Его прозрения, порой блестящие, не следует модернизировать еще в одном плане: он не выходил за рамки азартных игр, он рассматривал не случайные явления вообще, а исходы в играх, и ныне не вполне ясно, искал ли он законы природы или магические формулы (вроде "тройка, семерка, туз" – у Пушкина в "Пиковой даме"). Во всяком случае, он вряд ли проводил между ними сознательное различие.

Столь же неясно, различал ли он хоть в какой-то мере априорную и статистическую вероятности, но историю обоих понятий нельзя понять без обращения к его трактату.

Но вот что несомненно: Кардано действительно первым понял, что надо не только вычислять шансы, но и много раз бросать кости. Именно из этого родилась впоследствии наша идеология – что в играх, кроме комбинаторики, нужна еще и статистика, т.е. подсчет реальных исходов. И он вовсе не ошибался, когда приходил к выводам, которые для нас нелепы – он просто исходил из иной картины мира. Об этом см. главу 5.

Он уточнил мысль о частотах: не надо думать, что, бросая кости много раз, мы получим точно требуемое число очков, "но при бесконечном числе бросаний это должно случиться почти обязательно, ибо в большом числе повторений проявляется течение времени, которое указывает все формы (in infinito tamen numero jactum id contingere proxime necesse est, magnitudo enim circuitus, est temporis longitudo quae omnes formas ostendit)" [Ore, 1953, с. 204] ([Cardano, 1663, стл. 267л]).

Эта загадочная фраза достойна комментария. Подробно это сделано в работе [Чайковский, 1989], и здесь надо добавить немногое. Фраза – первый известный серьезный подход к основному положению ТВ – *закону больших чисел*. Суть закона состоит в том, что многообразие случайных значений можно при определенных условиях заменить на их среднюю величину. Этим законом мы займемся в главе 3.

Здесь же нам важен тезис Кардано о "всех формах" (обсуждаемый историками как *whole circuit* [Hacking, 1975, с. 54; Brakel, 1976, с. 129; Hald, 1990, с. 38]) – он, по-моему, говорит об уверенности автора в том, что равновозможные варианты рано или поздно будут все исчерпаны, и что (надо полагать) всё начнется заново.

В 1539 г. Кардано опубликовал свое решение задачи о разделе ставки, основанное на той мысли, что существенно не число одержанных данным игроком побед, а число побед, недостающее ему до выигрыша всего банка. Его доводы нынешний историк полагает невразумительными, однако признаёт, что они впервые носили вероятностный характер и что Кардано "видимо попросту использовал симметрию между игроками" [Hald, 1990, с. 36]. Именно *замена идеи предрасположенности идеей симметрии и представляется мне исходной в становлении идеологии ТВ*.

Логик и методолог Иан Хакинг увидал у Кардано первую частотную концепцию вероятности [Hacking, 1975, с. 53-54]. Историк статистики Андерс Хальд, наоборот, писал: "Странно, что Кардано, столь же практик, сколь и математик, не привел в "De ludo aleae" никаких опытных данных и даже ни одной относительной частоты" и объяснил это тем, что Кардано, как и последующие ученые, "считал теорию вероятностей математической дисциплиной, основанной на аксиомах" [Hald, 1990, с. 40]. Оба в какой-то мере правы – хотя прямых статистических данных в книге нет, статистический дух ее пронизывает, а ключевые аксиомы, пусть и неявно, тоже присутствуют. Но главная заслуга Кардано, по-моему, упущена.

Позже и по иному поводу Хакинг написал, что "по прошествии достаточно долгого времени и после изменения теории один из взглядов на мир может быть совершенно непонятен для более поздней эпохи" [Хакинг, 1998, с. 9]. По-моему, именно это мы и видим в приведенном выше противостоянии точек зрения – оба автора исходили из того, что титан Возрождения думал о том же, что они, только ошибался.

Поэтому анализу обычно подвергают лишь те места книги Кардано, где речь идет о привычном нам материале – частотах и шансах. ("Мы должны упомянуть лишь самые важные верные результаты и оставить без внимания многие неясные утверждения [Кардано] и ошибочные числовые примеры" [Hald, 1990, с. 38]). Но отбрасывание ошибок незаметно ведет к додумыванию за автора, к поиску у него наших взглядов, а при этом легко свести анализ мысли Кардано к пародии.

Так, его биограф Ойстейн Оре был уверен, что Кардано оперировал с понятиями "вероятность" и "равные вероятности", но это основано лишь на модернизированном переводе Гулда. Например, там, где Кардано писал (продолжая античную традицию равносилия, упомянутую в п. 1), что событие "может равным образом как произойти, так и не произойти" [Cardano, 1663, стл. 265л], в переводе читаем, что событие может "встретиться или нет с равной вероятностью" [Ore, 1953, с. 196]. Если поступать так, то легко найти у него и наши теоремы.

Например, отметив, что при игре в две кости существует 6 возможностей выпадения пары одинаковых очков (1 и 1, 2 и 2 и т.д.), что составляет 1/6 от общего числа (36) возможных здесь пар, Кардано добавил: "...При большом числе игр оказывается, что действительность весьма приближается к этому предположению". Тем самым, здесь использовано, хоть и не сформулировано, априорное понятие вероятности (6/36 = 1/6) выпадения одинаковых очков и отмечено, что близкое отношение можно получить, если бросать кости много раз. Из этого Оре сделал странный вывод, что Кардано фактически говорил, будто если вероятность есть $p$, то большое число повторений дает $m = np$ [Ore, 1953, с. 170-171].

По-моему, Кардано говорил не это. Чтобы говорить о частотах и вероятностях, сперва надо принять точку зрения на ряд случайных испытаний как на естественный процесс, в котором что-то можно подсчитывать. Царил же тогда извечный взгляд на случайность как на знак судьбы или на вмешательство нечистой силы. Историк культуры Эдвард Тайлор (Tylor) отметил, что данный взгляд преобладал даже у образованных людей до середины XVII века; он привел, в частности, мнение Джереми Тэйлора (Taylor), королевского капеллана, который около 1660 года писал: "Бог дозволил вмешиваться в азартные игры дьяволу, который делает из них всё дурное, что только может..." [Тайлор, 1989, с. 72]. Именно эту точку зрения по сути и опровергал веком ранее Кардано.

Особенно хорошо это у него видно в таких главах, как "Мошенничество", "Условия, при которых стоит играть", "Об одной ошибке...", "Об обманах...", "О характере игроков" и т.п. В частности, он заметил, что игральная кость с крупными выемками очков падает не вполне одинаково часто на каждую грань [Ore, 1953, с. 191]. Из таких замечаний видно – в игры играют реальные люди. Кардано первый писал, что численный расчет возможен только при "честных костях" – это было ново. Однако он же рассматривал резко асимметричную кость (астрагал) в качестве честной – это можно считать данью старине.

Через полвека после Кардано, в 1619 году, английский пуританский священник Томас Гетэкер в книге "О свойствах и употреблении жребиев" прямо отвергал ту точку зрения, что "расположение жребия исходит непосредственно от Бога" [Тайлор, 1989, с. 71]. Без такой черновой работы нескольких поколений мыслителей Паскалю просто нечего было бы обсуждать с Ферма. И уже намного после них математики дошли до понятий, которые мы записываем в виде таких величин, как $m = np$.

### 2-3. Вероятность у Паскаля

Рождение ТВ принято видеть в переписке, которую вели в 1654 г. французские математики Блез Паскаль и Пьер Ферма. Она не раз описана историками – например [Hacking, 1975; Майстров, 1980; Entwicklung..., 1988; Hald, 1990], и мне остается сделать лишь несколько замечаний.

В основу переписки легла та же вычурная задача "О разделе ставки", что у Пачоли и Кардано (см. конец гл. 1), и уже сам этот факт говорит о возможном преемстве. Вопрос о нем, насколько знаю, не исследован, но, начиная с первого руководства по истории вероятностей (где ранние итальянские работы названы "грубыми примерами", не имевшими "ни критики, ни истории" [Gouraud, 1848, с. 3]) принято всякое преемство игнорировать. Получается блестящая сказка о гениях, почти мгновенно создавших новую дисциплину. В действительности становление ТВ имело гораздо более длинную историю.

Паскаль писал в том же 1654 г.: "В последнее время я занимался исследованием совершенно неизученной еще области, а именно, случайными комбинациями, которым подчинены азартные игры.... Это тем в большей мере должно определяться усилиями разума, чем в меньшей мере может быть найдено из опыта. Ведь неопределенный исход явления теснее связан со случайностью, чем с законами природы".

Данное поразительное признание говорит, что автор решал отнюдь не ту задачу, какую ему обычно приписывают, т.е. не исследовал природу случайных явлений; наоборот, он прямо противопоставил законы природы и случайность, поскольку в последней как таковой не видел закономерности. Что же Паскаль искал? Он искал ключ к шифру и нашел – в своем знаменитом треугольнике.

Цитата противоречит всему, что принято писать о рождении ТВ, и взята из первой книги по методологии вероятностей [Курно, 1970, с. 95]. Написана книга в 1843 г., и интересно посмотреть, как французский автор начал излагать ТВ. В отличие от нынешних учебников, начинающих с расплывчатой речи о падении монеты и частотах, Огюст Курно назвал в своей книге главу 1 "О комбинациях и порядке" и начал словами: "Среди идей, которые человеческий разум не создает по своему произволу, но которые ему внушает сама природа вещей, идея комбинаций представляется одной из наиболее общих и простых. Рассматривая индивидуальные вещи, каждую в отдельности, мы замечаем, что эти вещи, в зависимости от их природы, сочетаются одна с другой либо парами, либо тройками и т.д., составляя некоторые системы...". (Так же, с комбинаторики, начата популярная книжка [Колмогоров и др., 1982], где нет несуразностей, обычных в начале многих книг. К сожалению, основные трудности и тут не разъяснены, а лишь обойдены.) Вот эти-то "системы" Паскаль и исследовал, и только в связи с ними Курно его упоминал.

Проще говоря, Паскаль вычислял, сколькими способами может достигаться каждый мыслимый в азартной игре исход. Вопреки его утверждению о "совершенно неизученной области", область эта была к тому времени подробно изучена, и он вполне мог что-то об этом слышать, а также читать что-то в рукописях. Но "избегание предтеч" – феномен обычный [Чайковский, 2000], и здесь не он интересен. Важнее, что Паскаль, человек глубоко религиозный, рассматривал тем не менее игру как естественный процесс, в который Бог не вмешивается, и этим шел в ногу с эпохой. О взгляде на игру как на естественный или сверхъестественный процесс мы еще будем говорить в главе 3.

В понятиях Паскаля, вероятность должна определяться не из опыта, а "усилиями разума". Отсюда ведет начало *априорное* понимание вероятности как отношения числа благоприятных случаев к числу всех возможных случаев. Оно практически определяется, исходя из внешней симметрии генератора случайности – монеты, кости, колоды карт, поскольку случаи мыслятся как равновозможные.

Естественно, родилось убеждение, что само понятие априорной вероятности годно только для азартных игр подобных им ситуаций. Поэтому теория была забыта на 60 лет, словно "фортуна поставила задачу задушить в зародыше открытие Паскаля" [Gouraud, 1848, с. 17]. Это убеждение в искусственности априорной модели вероятности, увы, живо поныне, а потому нам важно ознакомиться с мыслями Лейбница и Я. Бернулли, видевшими в идее априорной вероятности более широкий смысл.

### 2-4. Вероятность у Лейбница

История ТВ много раз описана, но обычно из внимания выпадает тот факт, что в годы ее становления шли споры о сути вероятности, позже на двести лет заглохшие. Главной фигурой в них был Готфрид Вильгельм Лейбниц, великий философ и математик.

В те годы широко обсуждалась знаменитая со Средних веков дилемма "Буриданов осел": находясь на равных расстояниях от двух одинаковых охапок сена, осел, якобы, должен умереть с голоду, ибо не имеет оснований для выбора между ними. Жан Буридан, французский физик и логик XIV века, которому традиция приписывает эту дилемму (в его трудах ее нет), жил в аристотелевом мировоззрении, где каждый акт должен иметь свою причину, и дилемма указывала ограниченность этого мировоззрения, не давая, разумеется, реальной альтернативы.

Характерно, что великий новатор Лейбниц, нащупывая пути к созданию ТВ, продолжал рассуждать по Аристотелю; отрицая реальную возможность упомянутой дилеммы, он писал: "Универсум не имеет центра, и его части бесконечно разнообразны; следовательно, никогда не будет случая, когда всё на обеих сторонах станет одинаковым и будет производить на нас равное влияние" (Письмо к Косту "о необходимости и случайности"). То есть ослы якобы должны всегда выбирать правую охапку, если она чем-то хоть чуть лучше.

Конечно, на деле ослы себя так не ведут. Тем не менее, именно Лейбниц ввел в оборот *принцип равновозможности* – основу ТВ [Hacking, 1975]. (Принцип лёг и в основу того, что много позже было названо *статистическим мировоззрением*.) С его позиции мы решаем дилемму просто: в массовом опыте около половины ослов выберет правую охапку, а оставшаяся часть ослов – левую. Мы настолько уверены в исходе, что сам опыт нам даже неинтересен. Но для Лейбница было иначе, причем для понимания его позиции надо обратиться к французскому оригиналу.

В 1695 г. философ-публицист Пьер Бейль, рассуждая о "буридановом осле", писал: "Существует по крайней мере два пути, которыми человек может освободиться от обмана равновесия. Первый... состоит в прельщении себя приятной мечтой, будто каждый есть владыка самого себя и не зависит от объектов... При этом человек будет поступать следующим образом: хочу предпочесть это тому, потому что так мне хочется". Тут Лейбниц возражал: такие слова "уже выражают склонность (le penchant) к нравящемуся предмету" (Теодицея, 306), а не равновесие.

"Второй путь – тот, когда судьба или случай, [т.е.] жребий(*) решит дело" – писал Бейль, но и это не нравилось Лейбницу: "Это подмена вопроса, ибо тогда решать будет не человек" (Теодицея, 307 [Leibnitz, 1734, с. 178]). Вот первый раз, когда случайность как бросание жребия противопоставлена (пусть здесь, у Лейбница, и смутно) случайности как свободному выбору. О нем речь пойдет в главе 7.

Не вдаваясь в существо спора Бейля и Лейбница, отметим, что оба, как бы вторя Николаю Кузанскому (см. гл. 1), противопоставляли случайности предрасположенность (склонность). Интерес к ней спорадически возникал и позже, а в XX веке Карл Поппер прямо предложил понимать вероятность как предрасположенность. (См. гл. 5.

Занимаясь вероятностями с юности [Курно, 1970, с. 41], Лейбниц "не сделал серьезного формального вклада в теорию вероятностей, но имел длительный и глубокий интерес к проблеме. Он был, несомненно, первым философом вероятности(*) ... пытался развить арифметику вероятности, не основанную на азартных играх и тем самым потенциально более общую в прикладном смысле" [Hacking, 1975, с. 57].

---

(*) У Бейля: *la courte paille* (буквально: *короткая соломинка* – термин из идиомы "tirer a la courte paille" – тянуть жребий).

(*)Хакинг имел здесь в виду только вероятность математическую, ибо сам упоминал в той же книге более ранних философов вероятности, начиная с Фомы Аквинского, касавшихся логической и моральной вероятности, но не частотной и не априорной.

В 1704 г. Лейбниц писал, что при анализе как игр, так и смертности наблюдаются те же принципы, что и в финансовых задачах: "Основой всех этих теоретических построений является так называемый *простаферезис*, т.е. берут среднее арифметическое между несколькими одинаково приемлемыми предположениями. Наши крестьяне, следуя природной математике, уже давно пользуются этим методом. Когда нужно, например, продать ... кусок земли, они составляют три группы оценщиков ... [и] берут сумму третьих частей каждой оценки. Это аксиома: aequalibus aequalia – равно принимать в расчет равноценные предположения. Но когда предположения неравноценны, то их сравнивают между собой. ... Я уже не раз говорил, что нужен новый раздел логики, который занимался бы степенями вероятности ..." [Лейбниц, 1983, с. 478–479].

При внимательном чтении этого пассажа (и других, близких) видно, что кроме априорного и апостериорного, у Лейбница смутно обрисованы еще два понимания вероятности – моральное (сравнение мнений) и неотличимое тут от него логическое (степень подтверждения). Лейбниц полагал, что во всех случаях можно говорить о некоей единой вероятности, которой должен быть посвящен "новый раздел логики".

Легко видеть, что "аксиома aequalibus aequalia" – это **аксиома равновозможности**, основа нашей нынешней ТВ. В нынешних курсах ТВ ее упоминают только в связи с монетами, костями и другими внешне симметричными атрибутами, здесь же она впервые высказана в более общем плане. Еще более общий вид придал ей, как увидим далее, знаменитый математик Якоб Бернулли (он состоял с Лейбницем в переписке). Вот он – "новый раздел логики": равновозможности введены там, где их не видно, и положены в основу новой науки. Это позволило получить ее основной результат, известный в наше время как закон больших чисел. Мы им займемся в главе 3.

### 2-5. Четыре понимания вероятности у Якоба Бернулли

В начале XVIII века произошло рождение термина *probabilitas* в привычном нам смысле. Породил его Бернулли в своей знаменитой книге "Ars conjectandi", вышедшей посмертно в 1713 году.

Бернулли дал вероятности формальное определение, но оно туманно: вероятность есть "степень достоверности (gradus certitudinis) и отличается от нее как часть от целого"; до него Лейбниц в письме 1678 года определил вероятность как степень возможности [Бернулли, 1986, с. 24, 96], и влияние Лейбница на Бернулли несомненно.

Но на деле воспользоваться таким "определением" затруднительно, и далее оно автором не использовано. Фактически Бернулли ввел вероятность не определением, а вербальным описанием. Подлинный смысл термина "вероятность" выясняется лишь по мере чтения книги Бернулли, и оказывается, что тот первый (да по сути и последний) попытался увязать в едином рассуждении четыре понимания вероятности:

*моральное* – как степень уверенности говорящего в своем мнении, которое он, вообще говоря, не готов считать истинным;

*априорное* (классическое) – как отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов;

*логическое* – как степень подтверждения данного утверждения доводами или фактами;

*статистическое* (апостериорное) – как частоту появления данного события в неограниченно длинной серии испытаний.

Поскольку латинское "certitudo" означает как достоверность, так и уверенность, возник соблазн перевести бернуллиево определение так: вероятность есть "степень уверенности и относится к достоверности как часть к целому" [Реньи, 1970, с. 80], а с тем и отнести самого Бернулли к творцам морального понимания *всякой* вероятности. Несмотря на явное насилие над латинским текстом, отбросить эту линию мысли нельзя: Бернулли действительно говорил обо всем вместе. Однако в разных местах книги он имел в виду разные понимания, и мы их можем разъединить.

Бернулли ясно разделил моральное и логическое (в нашем нынешнем смысле) понимания вероятности – повсюду в его рассуждениях логический аспект подчеркивается подбором данных в пользу одного из вариантов, который и объявляется "нравственно достоверным", причем вероятностный подход в этих местах текста отвергается(*). Наоборот, моральную вероятность (сравнение мнений) он так и оставляет в форме дроби: "Так, может случиться, что нечто имеет 2/3 достоверности, между тем как ему противоположное – 3/4, почему каждая из противоположных возможностей будет вероятной, и, однако, первая – менее вероятной... в отношении 2/3 к 3/4 или 8 к 9" [Бернулли, 1986, с. 38].

Моральную и логическую вероятности часто смешивают, поэтому нужно пояснение. Моральная вероятность исторически старше и в быту важнее; в ходе исследования она может меняться, но все-таки ее можно грубо оценить дробью p ($0 < p < 1$); этим она отчасти сходна с априорной и статистической вероятностями. Наоборот, логическая вероятность, если накапливать данные за и против утверждения, для проверяемой гипотезы стремится к нулю или к единице – гипотеза отвергается или принимается. (Недаром в курсе Б.В. Гнеденко [1961, с. 20] логическая вероятность вынесена из общего списка.) Сохранить значение p ($0<p<1$) она может только в том случае, если гипотеза оказалась не-

(*)Так, Бернулли [1986, с. 39] писал о подлогах: "Из 50 нотариусов едва ли найдется один, который дерзнул бы совершить такую гнусность". Казалось бы, дается оценка вероятности иметь дело с бесчестным нотариусом, но автор повернул аргументацию в другую сторону – привел доводы в пользу лживости данного нотариуса и заключил: "Ибо если я полагаю нотариуса бесчестным, то тем самым полагаю, что он... есть именно тот пятидесятый". Для тогдашних сочинений характерно, что первейший вопрос – возможен ли нотариус, постоянно совершающий подлоги – не поставлен.

проверяемой. Тогда логическая вероятность действительно смыкается с моральной.

Различия этих двух вероятностей подробно исследовали польские методологи Стефан Амстердамский и Ян Ежи Славяновский [Закон..., 1967]. Последний писал: "Если бы мы доказали, какую историю действительно имеет система, то... мы начали бы использовать особое распределение, приписывающее вероятность равную единице этой истинной истории и равную нулю – всем другим" [Закон..., 1967, с. 330].

Приведу близкий мне пример: утверждение "Гомер вероятно был неграмотен" носит моральный характер (доводов "за" больше, чем доводов "против", но последние отбросить нельзя, и они никогда не исчезнут), а утверждение "Описанная Гомером микенская культура вероятно имела письменность" – логический (хотя единственное у Гомера описание письма расплывчато и скорее говорит о пиктограмме, а не о письменности, т.е., согласно старым представлениям, $0<p<1/2$, однако микенская письменность в XX веке была обнаружена археологами, и утверждение стало достоверным, т.е. теперь $p = 1$).

В отношении априорного понимания Бернулли высказался совершенно определенно: "Я предполагаю, что все случаи одинаково возможны... Иначе необходимо уравнять их и вместо каждого легче встречающегося случая считать столько других, насколько он легче имеет место, чем прочие". Он полагал, что такую процедуру можно провести всегда, для любых случайностей [Бернулли, 1986, с. 34]. Подробнее см. след. пункт.

Столь же определенно выразился Бернулли и об апостериорном понимании: "И что не дано вывести a priori, то, по крайней мере, можно получить a posteriori, т.е. из многократного наблюдения результатов в подобных примерах. Потому что должно предполагать, что некоторое явление впоследствии в стольких же случаях может случиться или не случиться, в скольких при подобном же положении вещей раньше оно было отмечено случившимся или неслучившимся" [Бернулли, 1986, с. 41].

Бернулли был уверен (как и многие уверены теперь), что все 4 понимания относятся к одному и тому же акту(*) . Научную дисциплину, призванную изучать это явление, Бернулли назвал "Искусство предположений, то есть угадывания" (Ars conjectandi sive stochastice), а главной ее целью считал нахождение вероятностей [Бернулли, 1986, с. 27, 89]. Тем не менее, сам термин *вероятность* стал центральным в математике случайного только после классического труда Пьера-Симона Лапласа [Laplace, 1812]. Лаплас ничего не добавил к пони-

(*)Достаточно задать вопрос: к акту, происходящему в природе (внешней по отношению к ученому), или к акту познания (производимому ученым) – и станет ясно, что надо говорить о различных явлениях, а не просто о различных пониманиях. У Бернулли такой вопрос не задан.

манию вероятности (по сравнению с четырьмя пониманиями Бернулли), но именно после него соответствующая наука называется теорией вероятностей.

Эти несколько экскурсов в этимологию были необходимы потому, что всякое обращение к трудам прошлого (а мы будем совершать их часто) осмысленно лишь при ясном понимании тогдашнего значения слов.

### *2-5.1. Равновозможности и их исчерпание*

Во Введении говорилось, что для применения ТВ необходима некая аксиома, связывающая понятие вероятности с реалиями мира. Первой такой аксиомой явилась старинная *идея равновозможности*: априорная вероятность, работающая в играх, определяется отношением числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов, а исходы мыслятся как равновозможные – даже там, где нет внешне заметной равновозможности. Эта идея фактически лежит в основе ТВ.

Выше приведена цитата из Бернулли: "Я предполагаю, что все случаи одинаково возможны... Иначе необходимо уравнять их и вместо каждого легче встречающегося случая считать столько других, насколько он легче имеет место, чем прочие". Именно данное понимание равновозможности позволило применить априорное понимание вероятности ко всем возможным случайным явлениям. Тем самым, мы подошли к самой сердцевине вероятностной проблематики.

Принято считать, что априорное понимание малополезно по двум причинам: во-первых, тут вероятность искомого события определяется через равные вероятности элементарных событий, т.е. налицо порочный круг, а во-вторых, нигде, кроме простейших примеров вроде салонных игр, равновозможностей не бывает. Венгерский математик Альфред Реньи писал: <<В действительности же недостаток этого определения состоит не в том, что ему свойствен порочный круг (как утверждают иногда и теперь), а в том, что оно не является определением. На вопрос, что такое вероятность, оно не отвечает, дает лишь метод ее вычисления в простейших случаях (по современной терминологии, в случае "классических вероятностных полей")>> [Реньи, 1970, с. 81].

Не буду спорить, пока не выяснено, что такое "классическое вероятностное поле". Если оно относится только к азартным играм, то Реньи прав, но если нет – нет. Так вот, бернуллиева процедура уравнивания вводит "классическое вероятностное поле" в качестве универсального понятия, годного для любой вероятностной задачи.

Правильная кость падает на каждую грань с равной частотой, которую можно отождествить с вероятностью. Это пишут во всех учебниках, но можно пойти дальше: если кость несимметрична, ее можно заменить на симметричную, у которой число граней больше: если на разные грани кость падает с частотами p1, p2,..., pN, то надо привести эти дроби к общему знаменателю Q, изготовить симметричную Q-гранную кость (это может быть, например, длинная симметричная Q-гранная призма) и приписать каждый номер (от 1 до N) стольким граням, какова доля соответствующей грани исходной кости в величине Q. Новая симметричная кость будет демонстрировать номера 1, 2,..., N с теми же вероятностями, что и исходная кость. Это значит, что принцип равновозможности исходов работает далеко за пределами внешне симметричных генераторов случайности. См. Добавление 1.

### 2-6. Частота и вероятность – от Граунта к Мизесу

Паскаль и Ферма, по-моему, не имели вероятностных интересов (хотя Хакинг считал о Паскале иначе [Hacking, 1975, с. 23]) и, получив удовольствие от решения чисто комбинаторных игровых задач, больше к данной тематике не возвращались. Вскоре вероятностные идеи овладели людьми, которых, наоборот, вообще не занимали азартные игры, а вероятность была для них лишь одной из средних величин (средней частотой).

Люди давно обратили внимание: статистика благоприятных исходов вполне работает не только в азартных играх, но и во многих массовых процессах. Прежде всего это стало ясно из статистики населения.

Первый шаг к математике случайного в статистике сделал упомянутый выше Граунт – в 1662 г. он открыл, что в массовых единообразных записях смертности лондонских жителей имеет место *устойчивость частот*. Разумеется, сам по себе этот факт был давно известен (например, банкирам), но только Граунт сделал его достоянием науки и широкой публики. Этим он породил ТВ как основу статистики, но математическое осмысление феномена началось всерьез лишь через двести лет, когда появилось само понятие устойчивости частоты. См. об этом главу 4.

Граунт вычислил, что на 14 мальчиков в среднем рождается примерно 13 девочек, и придал этому факту особый смысл: Бог-де предусмотрел повышенную смертность мужчин в войнах, путешествиях, "от руки правосудия" и т.п. Он не был ни математиком, ни философом ("homme sans geometrie" [Gouraud, 1848, с. 16]), но тем не менее оказался одним из основателей ТВ. Дело в том, что известно два способа ее построения – когда первично понятие вероятности и когда первично понятие средней величины, а вероятность вводится как средняя частота [Уиттл, 1982]. В наше время общепринят первый способ, однако метод средних исторически старше, он идет от Христиана Гюйгенса.

Его книга "О расчете в азартных играх" (1657 г.) – первая специальная публикация по ТВ. В ней исходным является понятие среднего, и если бы наука пошла тогда за Гюйгенсом, то математика случайного называлась бы, вернее всего, не ТВ, а *теорией средних*, и трудности у нее сейчас были бы иные. Прежде всего, было бы общим местом то, что исходная для исследования случайности процедура (прямо вытекающая из идеи баланса) – усреднение, а вовсе не подсчет исходов и их комбинаций. Усреднительный подход к ТВ стал обычным только начиная с работ Чебышева [Колмогоров, 1956, с. 266; Ширяев, 1989, с. 13], но и после них роль средних была осознана преимущественно в связи с предельными теоремами, тогда как нас будут больше интересовать текущие значения величин (см. гл. 7). В этом отношении мы последуем за Гюйгенсом и Граунтом.

Граунт вычислил вероятность лишь однажды, как бы делая уступку обывателю. Я приводил это место в п. 1: "вероятность умереть" означала у него то, что ныне именуют *статистической* вероятностью.

Прочтя Граунта, Гюйгенс занялся задачами, по форме игровыми, а по сути статистическими. Вот одна из них: "Мужчина 56 лет женится на женщине 16 лет, сколько времени они могут жить вместе, до смерти одного из них? Если мне обещали 100 франков в конце года, который проживут они оба, за сколько было бы справедливо выкупить это обязательство?" [Майстров, 1980, с. 73]. Под справедливой платой здесь понималось ожидаемое (среднее) значение, т.е. игровые задачи ставились там, где не видно равновозможных вариантов.

Решение Гюйгенса основано на составленной его братом таблице смертности, которая основывалась на данных Граунта. В таблице приводилось число переживших и умерших для каждого возраста по десятилетиям: 6, 16, 26 и т.д. до 86 лет (когда умер последний из выборки). Гюйгенс положил, что каждый член воображаемой супружеской пары каждые 10 лет играет в лотерею, билеты которой делятся на выигрышные и проигрышные соответственно упомянутой таблице [Hald, 1990, с. 108-110].

Так, в таблице значилось: в возрасте16 лет умерло 15 и пережило 40 лиц, поэтому в лотерее 16-летнему игроку полагается как бы тянуть билет из урны, в которой 40 выигрышных и 15 проигрышных билетов. По этому принципу Гюйгенс вычислил, что ожидаемая предстоящая жизнь двух супругов, вступивших в брак в 16 лет, равна 29,22 лет. Хальд резюмировал: "Это хороший пример раннего применения того фундаментального принципа, что ожидание ЕТ может быть найдено как ожидание условного ожидания ЕТ/Тх".

Для нашей же темы самое важное – понять, насколько мысли Гюйгенса повлияли на современников. Его расчеты не были опубликованы, но, по словам Хальда, витали в воздухе. Хальд обратил внимание на то, что сам Гюйгенс не стал решать задачу для 56-летнего и 16-летней, тогда как Я. Бернулли вскоре (1686 г.) решил именно ее. Из этого можно сделать вывод, что он мог знать о письме Гюйгенса брату, где эта задача поставлена (письма ученых друг другу тогда ходили по рукам, выполняя роль научной периодики), и это нам еще понадобится (см. гл. 3).

Что касается прогресса понимания вероятности как частоты, то он начался лишь через полтораста лет после выхода "Ars conjectandi". Первым, кто стал анализировать частоты как таковые, был английский логик Джон Венн (1866 г.). В те годы английская наука была охвачена энтузиазмом освоения нового миропонимания – статистического, о чем у нас пойдет речь в главе 5. От старомодной статистики как способа суждения ученые быстро переходили к статистике как сути самих природных процессов, к статистике в смысле Максвелла и Дарвина. Эту-то статистику Венн и ввел в обиход вероятностных рассуждений.

Венну наука обязана четким пониманием роли и возможностей ТВ. Он первым осознал, что понятие вероятности относится не ко всякой повторяющейся случайности, а лишь к хорошо организованной. Он счел, что слова *the randomness* и *at random*, которые всегда фигурируют, когда речь идет о вероятности, описывают некую действующую силу (agency): "Эта сила предполагается фиксированной и детерминированной вне определенных рамок, внутри же них предполагается распределенной равномерно" [Venn, 1876, с. 64]. Что, например, значит "стрелять беспорядочно (at random)"? Задана ли при этом плоскость стрельбы или сектор? А если задан сектор, то равновозможны ли углы в его пределах? В науке, по Венну, понятие равномерного распределения дается через идеализацию понятия беспорядочности (randomness): например, говоря, что человек взял наугад книгу с полки, мы делаем весьма сомнительное допущение, что все углы были для его руки равноценны.

Здесь Венн сделал первую попытку преодолеть господствовавший до тех пор в обосновании ТВ прием, известный как *принцип индифферентности Лапласа* – он гласит, что при отсутствии каких-либо сведений о предпочтительности исходов, эти исходы надо полагать равновероятными. Принцип оказывается совершенно непригодным для использования [Кайберг, 1978, с. 47, 82]. Взамен этого принципа Венн и призвал определять вероятности из опыта; более того, именно он положил считать вероятностью предел частоты в однородной бесконечной серии испытаний. Существует ли такой предел и каким математическим аппаратом его можно исследовать, было тогда неясно. Через полвека (1919 г.) призыв Венна начал получать воплощение в работах немецкого математика и физика Рихарда Мизеса.

Нам теперь очевидно, что Мизес вел речь только об одной из форм вероятности – статистической (апостериорной), однако сам н простодушно заявил, что никакой другой вероятности, кроме предела частоты, быть не может. Этим он грубо смешал понятия, но все-таки именно он сделал первый серьезный шаг к пониманию вероятности через случайность, а не наоборот. Вот основные положения Мизеса.

<<1. О вероятности можно говорить только в том случае, если налицо имеется твердо определенный и точно отграниченный коллектив.

2. Коллектив есть массовое или повторное явление, удовлетворяющее следующим двум требованиям: относительные частоты отдельных признаков должны обладать определенными предельными значениями, и эти последние должны оставаться неизменными, если отобрать часть элементов совокупности произвольным выбором нумеров.

3. Выполнение последнего требования мы называем также принципом иррегулярности или принципом невозможности системы игры.

4. Нечувствительное к выбору нумеров предельное значение относительной частоты, с которой появляется определенный признак, мы называем "вероятностью" появления этого признака в пределах рассматриваемого коллектива>> [Мизес, 1930, с. 37].

Легко видна ошибка: надо ограничить произвол в выборе номеров, дописав в конце тезиса 2 слова: "не зависящим от значения выбираемого символа" (иначе можно, например, выбрать последовательность из одних нулей). Из-за этой оплошности многие отказались от анализа схемы Мизеса, не заметив главного новшества – требования иррегулярности в качестве исходного свойства. (К сожалению, у математиков широко принято отказываться от обсуждения нежелательной темы, ссылаясь на любую встреченную ошибку, даже не имеющую отношения к сути дела.)

Такое отношение сохранилось поныне, и даже новейшее исследование его идей, вдумчивое и благожелательное, кончено цитатой из книги В.Н. Тутубалина, которая аттестовала вероятностную концепцию Мизеса как "мертвый язык" [Григорян, 1999, с. 219]. Не могу согласиться – Колмогоров не раз говорил, что многим обязан Мизесу. Именно идеи Мизеса привели Колмогорова к его обеим аксиоматикам, о чем у А.А. Григоряна нет ни слова. С тем же правом можно назвать мертвым языком любую старую концепцию, которая подверглась изменениям.

До Мизеса был известен, кроме принципа индифферентности, только один (да и то никем явно не сформулированный) прием обоснования ТВ – *принцип исчерпания равновозможностей (см. выше),* когда каждое возможное элементарное событие берется ровно один раз. Благодаря этому принципу, *ТВ не столько решает проблему случайности*, *сколько обходит ее*. Для тех, кого интересует природа случайности, именно такая ТВ (а вовсе не попытка Мизеса) является "мертвым языком".

Мизес впервые предложил конкретную альтернативу исчерпанию равновозможностей: положения 2 и 3 означали, что вводится конкретная аксиома, призванная "оживить" науку о случайном. Эту аксиому позже назвали аксиомой случайности (см. ниже, п. 9). Закончу цитатой из классического курса: Феллер писал про нерегулярность, из-за которой нельзя предсказать исход будущего испытания, как про "*фундаментальное свойство случайности, которое присуще наглядному представлению о вероятности. Значение этого свойства усиленно подчеркивалось Мизесом*" [Феллер, 1964, с. 209]. Поэтому к Мизесу мы еще не раз обратимся.

## 2-7. Вероятность как тенденция

В 1933 г. Колмогоров писал, что он в вопросах "приложимости теории вероятностей к миру действительных событий... в значительной мере следует выводам Мизеса". А именно: "Можно практически быть уверенным, что если комплекс условий S будет повторен большое число n раз и если при этом через m обозначить число случаев, при которых событие A наступило, то отношение m/n будет мало отличаться о P(A)", т.е. от вероятности наступления A [Колмогоров, 1998, с. 5]. Тут впервые позиция Мизеса изложена без упоминания предела, и это оказалось решающим.

Впоследстиии Колмогоров пояснил: "Если освободить Мизеса от излишнего предельного перехода (что и было предложено в... моей книге), то можно сказать, что Мизес правильно *описывает* способ проявления вероятностных закономерностей при повторных испытаниях. Но принципиальная ошибка Мизеса заключалась в запрещении... ставить вопрос о том, почему в природе так часто выполняются условия, введенные им в понятие коллектива" [Колмогоров, 1952, с. 5]. Ответа на данный вопрос у самого Колмогорова тогда еще не было, зато тему отсутствия предела он вскоре уточнил: "Повидимому, с чисто формальной стороны о вероятности нельзя сказать ничего больше следующего: вероятность P(A/S) есть число, вокруг которого, при условиях S и при предусмотренных этими условиями способах формирования серий, имеют тенденцию группироваться частоты" [Колмогоров, 1956, с. 275].

Вот и найдено нужное слово – *тенденция*(*) . И Колмогоров объяснил, как ее понимать: "при возрастании численности этих серий в разумных пределах, не нарушающих однородности условий, эта тенденция проявляется со все большей отчетливостью и точностью, достигая достаточных в данной конкретной обстановке надежности и точности при достижимых численностях серий". Заметьте: достаточной точности, но не предела. Итак, вероятность – *не предел частоты, а тенденция частот группироваться в небольшой области*.

Говоря строго, Колмогоров был неправ, когда утверждал, что "с чисто формальной стороны о вероятности нельзя сказать ничего", кроме как о "тенденции" – как раз с чисто формальной стороны и как раз по Колмогорову вероятность есть *мера*. В основном тексте данной статьи речи о мере вообще нет, а в параграфе "Дополнительные замечания об основных понятиях теории вероятностей" о ней сказано лишь, что теоретикомерная аксиоматика "избавляет от соблазна" определять вероятность "способами, претендующими на соединение их непосредственной естественно-научной убедительности с приспособленностью к построению на их основе формально строгой математической теории".

Тезис известный, но вот что удивительно: в цитируемой программной и парадной статье (1956 г.) Колмогоров построил ТВ не "по Колмогорову", а как раз "по Мизесу", подправив одиозного в те годы немецкого математика лишь в одном – заменив предел на тенденцию. Дело в том, что "избавиться от соблазна" самому Колмогорову не удалось: вскоре он начал исследование алгоритмической ТВ, где одним из понятий является ныне "случайность по Мизесу – Колмогорову" [Успенский, Семенов, 1987, с. 203]. Имя Мизеса перестало

(*)Замечу, что тенденция, т.е. нечеткая, хоть и очевидная закономерность, является важным понятием диатропики [Чайковский, 1990]. Мы обратимся к тенденциям в главе 8.

быть одиозным [Lamblagen, 1987], и можно лишь сожалеть, что наши историки и философы науки этого до сих пор не замечают.

Однако вопрос о вероятности как тенденции решен тогда не был. Казалось, что частотное понимание вероятности ущербно по-существу и его следует заменить на иное – например, считать вероятность понятием субъективным [Mellor, 1971, с. 50].

### *2-7.1. Тенденция при падении монеты*

В 1970 г. английский математик Питер Уиттл писал в своем учебнике (в методическом плане он нравится мне больше других): "Очевидно, здесь (бросая монету – Ю.Ч.) мы не имеем дела с пределом в обычном математическом смысле, так как нельзя гарантировать, начиная с некоторого достаточно большого n, что флуктуации p(n) будут меньше некоторого фиксированного уровня", хотя частота и проявляет "тенденцию стремиться к некоторому предельному значению". Он прямо поставил вопрос, можно ли тут в принципе "избавиться от разнообразия", т.е. получить предел, и честно признал: "Этот философский вопрос лежит в основе детерминизма, но если он разрешим вообще, то не в простых терминах. В теории вероятностей мы исходим из той предпосылки, что существует определенное разнообразие, которое мы не можем объяснить, но должны принять" [Уиттл, 1982, с. 10, 12]. Ныне, спустя 30 лет, полного объяснения все еще нет, но кое-что объяснить уже можно.

Опыт действительно говорит об устойчивости частот, но он не говорит о пределе. Есть ли какой-то конкретный предел у частоты, из опыта не узнать. Попытки показать сходимость частоты к вероятности путем многотысячных бросаний монеты привели к невразумительным результатам: внешне симметричная монета падала на одну из сторон с частотой около 0,5005-0,5077 [Майстров, 1980, с. 98]. Существенно, что последний результат, демонстрирующий наибольшее отклонение от 1/2, получен для самой длинной серии испытаний (более 80 тыс бросаний). Значит ли это, что следует искать в монетах, служивших для подобных опытов, незаметную неправильность формы или же монеты симметричны, а уклонения случайны?

Типичный ответ таков: «предположение о равновозможности герба и решки... кажется вполне удовлетворительным, однако... вполне возможен вывод, что выпадение герба и решки в отдельных случаях не одинаково вероятно» [Колмогоров и др., 1982, с. 28]. Он столь же невразумителен. Попробуем разобраться.

Сто лет назад Карл Пирсон, бросив монету 24 тыс. раз, в самом деле получил частоту герба, очень близкую к 1/2, а именно, 0,5005 (ошибка 0,1 %). Его упрекали в подтасовке, но, быть может, ему досталась самая симметричная монета? Или ему просто повезло?

Увы, дело проще: Пирсон простодушно прекратил опыт в тот момент, когда частота максимально приблизилась к 1/2. Вот как изложил дело Тутубалин: "Пирсон реабилитирован ... на самом деле было так: сначала Пирсон бросил монету 6000 раз, но результат ему не понравился. Тогда он бросил ее еще 6000 раз и опять не понравилось. Пришлось бросить монету еще 12000 раз, и результат (всех бросаний) оказался замечательным" [Тутубалин, 1992, с. 119].

Добавлю: если бы Пирсон бросил монету еще столько же раз, итог был бы почти наверняка много дальше от 1/2 (на то есть известный "закон арксинуса" [Феллер, 1984, с. 470], которого Пирсон еще не знал), так что уместен вопрос: что же именно мерил Пирсон и чему так рад Тутубалин? Ведь очевидно, что "замечательный результат" – вовсе не предел частоты, а специально подобранное (путем выбора момента окончания опыта) число. Если результат "замечателен" тем, что очень близок к 1/2, т.е. к априорной вероятности для симметричной монеты, то замечу, что монета Пирсона вовсе не была симметрична – у нее на одной стороне выдавлен герб, а на другой цифра.

Как раз для «идеальной монеты» (компьютерная серия независимых испытаний) получается вовсе не такой "замечательный" результат: [Феллер, 1964, с. 32]: при 10 тыс. испытаний ошибка составляет 0,4 % и не проявляет, после первой тысячи, единой тенденции к снижению. Зато, выбирая для окончания опыта нужную тысячу испытаний, можно извлечь из таблицы Феллера еще лучший результат, чем у Пирсона: 0, 5001 по первым восьми тысячам. Однако Феллер делать этого не стал, причем был прав – точное совпадение частоты с 1/2 (иными словами, возврат в начальную точку при случайном блуждании на прямой) достигается и при слегка несимметричной монете.

Вариацией момента окончания опыта с симметричной монетой можно получить отнюдь не любую частоту, а лишь число, близкое к 1/2. Это значит, что есть некоторая небольшая финальная область, из которой Пирсон и мог выбрать свой "замечательный" результат. Финальными областями мы займемся в главе 6.

## 2-8. Вероятность как мера

Как сказано во Введении, еще Ламберт отметил, что знаки (цифры) иррационального десятичного числа могут быть статистически независимы и служить аналогом серии бросаний симметричной десятигранной кости. Будем называть данное свойство чисел *случайностью по Ламберту*. Очевидно, что это – чисто математический феномен, не имеющий отношения к каким бы то ни было случайным испытаниям. От него тянется линия в ТВ, трактующая данную дисциплину как чисто математическую.

Долгое время считалось, что факт случайности следования цифр в иррациональном числе имеет место в силу какой-то несоизмеримости (стороны и диагонали квадрата, окружности и ее диаметра и т.д.), и только Борель заметил, что цифры статистически независимы в почти всяком действительном числе [Borel, 1909], т.е. что случайность тут имеет общий характер. В главе 4 мы остановимся на смысле этой классической работы подробнее. А пока ограничимся замечанием, что этим он заложил основу понимания вероятности как меры. Наиболее простая *мера* – это обобщение понятия длины, и вероятность при этом понимается как суммарная длина тех кусочков единичного отрезка, попадание на которые считается благоприятным исходом.

Колмогоров в 1933 г. завершил усилия Бореля и его коллег, создав то, что известно как *первая аксиоматика Колмогорова*. Она явилась изящным обобщением бернуллиевой схемы на бесконечное число испытаний. А именно, исходом именуется здесь указание на определенную точку – точнее, на бесконечно малую часть единичного отрезка, а вероятностью события называется суммарная длина тех бесконечно малых частей, какие благоприятны для этого события. Подробнее см. рассказ о рулетке Пуанкаре и мере в главах 4 и 6. Мера, а с тем и вероятность, существует не для всякой случайностной схемы – мы узнаем это в главе 7.

Данная аксиоматика (она излагается в любом учебнике ТВ) удобна для построения теории, но остается неясно, к каким явлениям полученная теория приложима. Этим вопросом мы займемся далее, здесь же надо отметить: приложимость очевидна лишь для вероятностей, определяемых априорно, поэтому то и дело совершаются попытки свести остальные понимания вероятности к априорному. Так, по Чендову [1974, с. 212], вероятность как степень возможности (модификация "степени достоверности" Бернулли) может быть выражена в терминах меры (впрочем, конкретно это им не показано). Наоборот, вероятности как степени уверенности или правдоподобности он в такой выразимости отказал, назвав их субъективным, т.е. "самым низшим пониманием вероятности" [Чендов, 1974, с. 192]. Для нашей темы тут важно одно – признание того, что различные понимания вероятности несводимы друг к другу и что теоретико-мерное представление возможно не для всех пониманий вероятности.

### 2-9. Алгоритмическая вероятность и нестандартный анализ

Обратимся теперь к упомянутой не раз "аксиоме случайности". Вот ее оценка, самая благосклонная, какая мне известна в рамках традиционной ТВ: "Весьма существенную роль при этом (формировании ряда испытаний – Ю.Ч.) играет так называемая аксиома случайности. Она утверждает, что эмпирическая вероятность события не изменится, если из имеющейся потенциально бесконечной последовательности наблюдений выбросить некоторые, не зная наперед результатов отбрасываемых наблюдений. Мизес определяет затем математическую вероятность как предел относительной частоты события, когда число наблюдений неограниченно растет. Этим Мизес дал толчок современному развитию теории вероятностей"; однако "определение математической вероятности по Мизесу приводит к трудностям логической природы" [Шметтерер, 1976, с. 33].

В чем состоял толчок, а в чем трудности, не говорится, и это, к сожалению, обычно. Вместо объяснений дана отсылка к коллективному труду [Cantelli e. a., 1939] по обоснованию ТВ, хотя Л. Шметтерер писал четверть века спустя, когда ТВ обрела уже совсем иное обоснование (с ним мы познакомимся ниже). Отсылка символична: 1939 год был последним, когда логики отрицали логику Мизеса. В 1940 г. произошел перелом.

Перелом коснулся всей проблематики случайного и за следующие четверть века породил новую дисциплину – *алгоритмическую ТВ*. Дело в том, что Мизес не мог сказать, существуют ли "коллективы" и как их выявлять. Первого успеха тут достигли в США математик Абрахам Вальд (1937 г.) и логик Алонзо Чёрч (1940 г.), показавшие, что случайная последовательность знаков может существовать [Ширяев, 1998, с. 116]. Затем выяснилось, что последовательность знаков (цифр) почти любого иррационального числа может служить коллективом по Мизесу и заменять собой случайные бросания симметричной монеты (кости) [Шень, 1982; Успенский, Семенов, 1987; Philosophy..., 1993].

Этим был завершен долгий этап в понимании вероятности. После книги Колмогорова (1933 г.) чебышевское умонастроение (вычислять по одним вероятностям другие, и только – см. Введение, прим. к п. 1) стало господствовать в ТВ безраздельно. Оно привело к блестящим результатам, но к 1960-м годам выродилось в то, что методолог Томас Кун в те же годы (но не имея прямо в виду ТВ) называл решением головоломок. "И дело здесь не в том, что какие-то исследователи целиком стоят на неверном пути. Просто по пути, который они избрали, нельзя идти достаточно долго" [Кайберг, 1978, с. 7]. Нужно исследовать иные линии.

Параллельно чебышевской развивалась другая линия, видевшая ТВ как естественнонаучную дисциплину и идущая как минимум от Венна. Ставя в 1900 г. свои знаменитые проблемы, Давид Гильберт предлагал аксиоматически построить ТВ в рамках аксиоматизации физики. Вероятность как физическое понятие трактовали тогда многие, а некоторые трактуют до сих пор [Алимов, Кравцов, 1992]. По этому пути и двинулся Мизес, желавший видеть вероятность как предел частоты.

К сожалению, вероятность как предел дроби m/n вряд ли является удачным понятием – неясно, в каком смысле тут говорить о пределе. По верному замечанию В.Н. Катасонова, историка философии, "если бы даже мы имели возможность произвести эту, конкретную бесконечную серию испытаний и получили бы некоторую частоту, то совсем не очевидно, почему другая бесконечная серия испытаний должна давать то же значение предельной частоты" [Катасонов, 1993, с. 121]. Один из смыслов бесконечных частот был прояснен в 1960-е годы в рамках *нестандартного анализа* – концепции, работающей с актуальными бесконечностями.

Исходные позиции нестандартного анализа популярно объяснил В.А. Успенский [1987]. Число a>0 называется бесконечно малым, если оно меньше любого 1/n, где n – натуральное. Тогда 1/a – бесконечно большое число (число, а не предел последовательности!), и когда такое число целое, его называют *ги-*

*пернатуральным.* В этих обозначениях вероятность по Мизесу естественно определить как p = M/N, где M и N – гипернатуральные числа.

И бесконечно малые, и бесконечно большие числа являют собой представителей множества *гипервещественных* чисел, составляющих предмет изучения нестандартного анализа. Тут можно развить свое исчисление вероятностей [Albeverio e.a., 1986], но нам достаточно того очевидного факта, что разные бесконечные серии бросаний одной кости эксплицируются *разными* гипернатуральными числами. В такой интерпретации особенно хорошо видно, что вопрос о существовании вероятности (т.е. вопрос об устойчивости частоты) и вопрос о существовании предела по Мизесу (предела дроби m/n) – различные вопросы, тогда как сам Мизес видел здесь только один.

В знаменитой статье [Kolmogorov, 1963] (русский перевод [Колмогоров, 1982]) сделана попытка "осмыслить частотную интерпретацию Р. фон Мизеса". Там было введено понятие случайности как устойчивости частоты: <<Если для таблицы[*] достаточно большого размера N по крайней мере один простой тест на случайность... с достаточно большим размером выборки n показывает "значительное" отклонение от принципа постоянства частот, мы немедленно отвергаем гипотезу о "чисто случайном" происхождении рассматриваемой таблицы>>. Легко видеть, что "чисто случайным" тут названо то, что в статье 1956 г. названо стохастическим. (Колмогоров, работая в Индии, не имел под рукой своих статей.) Тем самым, случайность по Колмогорову и стохастичность по Колмогорову – синонимы, пока речь идет о частотном подходе; этого нельзя сказать о развитом вскоре сложностном подходе, который привел к понятию хаотичности по Колмогорову [Шень, 1992, с. 125-126].

В статье 1963 г. доказано, что для определенного класса алгоритмов, проводящих тесты, случайная таблица (цепь) существует для любого N, не меньшего, чем некоторое n. Колмогоров особо оговорил, что не использует понятий ТВ (если не считать ими элементы комбинаторики), чтобы иметь возможность обсудить "область применимости теории вероятностей". Этим он впервые пошел вразрез с традицией Мизеса – Чёрча, где устойчивость частоты принималась как исходный факт. См. Добавление 2.

После данной статьи сам Колмогоров и другие математики стали развивать несколько иной подход – рассматривать связь случайности со сложностью в аспекте теории информации: сложность цепочки знаков, записанных по определенному алгоритму, оценивают минимальной возможной длиной алгоритма, дающего эту последовательность. При этом максимально сложной называется последовательность, которую нельзя выразить короче, нежели записав ее саму целиком. Ее называют случайной по Колмогорову и связывают это с интуитивным пониманием случайности как отсутствия алгоритма. Равноценные ре-

---

[*]Таблицей названа записанная в строку конечная последовательность (*цепь*) нулей и единиц.

зультаты получил шведский математик и логик Пэр Мартин-Лёф в рамках теории меры, показавший к тому же, что основная часть цепей случайна. Принципиально то, что множества цепей, случайных в обоих смыслах, оказались эквивалентны, поэтому говорят о случайности по Колмогорову – Мартин-Лёфу [Шень, 1982, 1992; Успенский, Семенов, 1987; Ширяев, 1998].

В некотором (пусть и узком) смысле линии Ламберта и Венна сошлись: частоту тоже можно рассматривать как математический объект. Более очевидным это станет после рассмотрения странных аттракторов.

### *2-9.1. Первое реальное обоснование ТВ*

Колмогоров писал, что случайные в его понимании последовательности подчиняются теоремам ТВ. Действительно, например, для знаков двоичного вещественного числа (последовательности нулей и единиц, моделирующей серию бросаний идеальной монеты) выполняется закон больших чисел. Тем самым, ТВ получила частичное обоснование. Иногда всю эту концепцию называют *второй аксиоматикой Колмогорова* [Тутубалин, 1977].

Позже Колмогоров [1991, с. 32, 42] еще и писал, что алгоритмическая ТВ объясняет, "почему в природе так часто наблюдается устойчивость частот", а вот это надо бы показать, поскольку неалгоритмический характер случайности природных явлений априори неочевиден. Мы отложим этот вопрос до главы 6 (где рассмотрим случайность как число).

Итак, аккуратное **обоснование феномена вероятности** (два других будут описаны в гл. 4) дает алгоритмическая ТВ, где случайность трактуется как отсутствие алгоритма. Она в руководствах по ТВ не упоминается, а жаль: отсутствие алгоритма как статистическая основа ТВ весьма наглядно. Когда-то методолог Терренс Файн вполне резонно (но безуспешно) призвал [Fine, 1973, с. 90] заменить в учебниках ТВ туманные фразы об "эмпирическом факте сходимости частоты к вероятности" четкой отсылкой к результатам алгоритмической ТВ.

И хотя алгоритмические числа в основной своей массе тоже являют собой довольно-таки случайные последовательности цифр, однако алгоритмическая ТВ выявила важнейший для алеатики факт: показано место стохастичности по Колмогорову. А именно, показано, что отсутствие алгоритма порождает именно *вероятностную* случайность. Этот факт представляется мне важным математическим открытием.

Однако что общего, например, между устойчивостью частот при случайности по Ламберту и при радиоактивном распаде? Объяснения этому в рамках алгоритмической ТВ дано не было. По-моему, дело тут в симметрии – именно она открывает связь устойчивости частот вычисленных и измеренных. Этим мы займемся в главе 4.

### 2-10. О логической вероятности

В предисловии к своей книге Венн прямо заявил: к ТВ относится та форма логики, которая изучает "не законы мысли, а законы вещей" [Venn, 1876, с. X]. Через сто лет логик Б.Н. Пятницын [1976, с. 306] (единственный, у кого я нашел осмысленное изложение идей Венна по-русски) увидал в этой фразе плохое различение природных событий от высказываний, мне же здесь видится, наоборот, четкое различение: логическая вероятность по сути отлична от других вероятностей, описывает иные феномены и требует иных методов анализа.

Вот что полагал об этом Рудольф Карнап, логик и методолог: "частотное понятие вероятности, называемое также статистической вероятностью, является хорошим научным понятием, вводится ли оно путем явного определения, как в системах Мизеса и Рейхенбаха, или... без всякого определения, как это делается в современной математической статистике". И далее: "Логическое понятие вероятности – ... полностью иной природы, хотя и одинаково важное" [Карнап, 1971, с. 78].

Могу добавить: вероятность как "закон вещей" подчиняется аксиомам ТВ, тогда как с логической вероятностью это не выходит без явных насилий над материалом, что тоже наводит на мысль о ее особой природе.

Это значит, что единого ответа на вопрос "Является ли вероятность физической величиной?" [Алимов, Кравцов, 1992] не существует. Логическая вероятность ею не является, но вероятность, понимаемая как физическая частота (например, при бросании монеты), вполне претендует на статус физической величины. Правда, отождествление частоты с вероятностью мы вводим волевым актом, но такая вероятность, на мой взгляд, столь же физически реальна, сколь реален никем не наблюдаемый кварк. Его некоторые считают фикцией, вводимой для удобства классификации частиц, большинство же признаёт физической реальностью.

## Глава 3. Закон больших чисел и нормальное распределение

Среди методологов преобладает то мнение, что, изучая вероятность, надо вести речь о различных интерпретациях (пониманиях) одного и того же явления; лучше всего это выразил логик и методолог Генри Кайберг [1978]. Наоборот, итог предыдущей главы можно выразить так: четыре понимания вероятности относятся к четырем различным явлениям природы и познания. Мне более интересны явления природы.

Различие позиций хорошо видно при попытке понять смысл *закона больших чисел* (ЗБЧ) и его место в алеатике. Стороннику первой позиции он либо просто неинтересен (Кайберг), либо видится одной из частных теорем ТВ (например, как эргодическая теорема, утверждающая сближение средних по реальной серии и по воображаемому ансамблю независимых испытаний [Алимов, 1980]).

Со второй же позиции ЗБЧ – не только основная теорема ТВ, но и одно из главных утверждений алеатики в целом, так как ЗБЧ ограничивает область приложимости ТВ: она работает (и служит основой для МС) там и только там, где работает он. К сожалению, прикладники используют стандартную МС и вне этой области, что, на мой взгляд, вызвано именно непониманием сути и места ЗБЧ.

### 3-1. Кардано: первые аксиомы и длинный тупик для теории

Как говорилось в главе 2, Кардано первым понял, что надо не только вычислять шансы, но и много раз бросать кости. Именно из этого родилась впоследствии наша идеология – что в играх, кроме комбинаторики, нужна еще и статистика, т.е. подсчет реальных исходов. Символизирует данную идеологию (как увидим, не вполне законно) именно ЗБЧ. Суть его состоит, вольно говоря, в том, что многообразие случайных значений можно при определенных условиях заменить на их среднюю величину.

Кардано не только призывал, он и сам, по всей видимости, многократно бросал кости. Об этом говорят некоторые его замечания – например, что кость, у которой очки обозначены крупными *выемками*, падает с разными частотами на разные грани [Ore, 1953, с. 191]. Замечание интересно и в том отношении, что непонятно, как такое наблюдение могло быть сделано: строго говоря, из опыта его вывести затруднительно. Вернее всего, Кардано (или его информатор) истолковал какую-то удачную серию (в которой самая легкая грань, шестерка, выпадала чаще) как следствие асимметрии. Это важно как первое свидетельство физического подхода к полету кости.

Зачем математик берется бросать кости? Разве нужно измерять соотношение сторон прямоугольного треугольника? Нет, оно и без того известно из теоремы Пифагора, которая имеет доказательство, вытекающее из аксиом Евклида. Но из каких аксиом выводить ЗБЧ? Речь, разумеется, должна идти не об аксиомах ТВ, которая позволяет "по одним вероятностям вычислять другие", а об аксиомах, связывающих вероятность с частотою. О двух таких аксиомах мы говорили в главе 2 – это аксиома равновозможности исходов и аксиома исчерпания равновозможностей. Там же сказано, что со времен их неявного утверждения в ТВ математика не столько решает проблему случайности, сколько обходит ее.

Так представляется мне историческая линия от Кардано к Колмогорову – линия, безраздельно царящая ныне и в ТВ, и в философском анализе случайности. Там, где две названные аксиомы работают, работает и ТВ, чему посвящена основная часть данной главы. Но как быть с теми реальными явлениями, где они не работают? В рамках ТВ вопрос просто бессмыслен, и это – прямое следствие того исторического выбора, который сделал Кардано, когда отверг решение Пачоли задачи о разделе ставки: именно тогда идея предпочтения уступила идее симметрии. Путем Кардано – Колмогорова пройти было необходимо, и он привел к блестящим успехам, но, на мой взгляд, он на сегодня исчерпан и является тупиком. Почему, будет ясно в части 2.

### 3-2. Якоб Бернулли: симметрия множества случайных событий

Итак, ЗБЧ нельзя доказать, не договорившись о каких-то аксиомах. Первой такой аксиомой явилась, как сказано выше, аксиома равновозможности. Безразлично, ставить ли на герб или на цифру, на туз или на валета и т.д. – справедливость гарантирована равновозможностью вариантов. Поскольку аксиома доказательства иметь не может, неизбежны споры о ее истинности и сущности.

В случае монеты одни уверены, что равновозможность вытекает из ее симметрии, другие, что она основана на отсутствии информации о предпочтительной стороне падения, третьи, что на многовековом опыте. Каждый имеет свой резон, однако достаточно вспомнить l'ordre de ressemblance Ламберта (см. Введение), чтобы понять, что вопрос гораздо глубже: по-моему, равновозможность – такое же *свойство природы,* как принцип наименьшего действия в физике или иррациональность в математике. Остается поаккуратнее описать его и очертить область истинности.

Первое, на что люди обратили внимание, – статистика благоприятных исходов вполне работает не только в азартных играх, где равновозможность налицо, но и во многих массовых процессах, в которых никакой равновозможности не видно. Прежде всего это стало ясно из статистики населения, начавшейся, как мы видели в главе 2, с работы Граунта, затем Гюйгенс явным образом увязал это с игровыми задачами.

Следующий шаг в этой увязке сделал Лейбниц, введя, как мы видели в главе 2, свою аксиому aequalibus aequalia – равно принимать в расчет равноценные предположения. Однако главного успеха добился Я. Бернулли. Сперва он уточнил Лейбница, прямо сформулировав: "Я предполагаю, что все случаи одинаково возможны... Иначе необходимо уравнять их и вместо каждого легче встречающегося случая считать столько других, насколько он легче имеет место, чем прочие". В этом уравнивании, редко упоминаемом, и состоит суть дела.

Бернулли полагал, что такую процедуру можно провести всегда, для любых случайностей [Бернулли, 1986, с. 34]. А затем, пользуясь столь широко понимаемой равновозможностью, доказал свою знаменитую теорему – первый вариант ЗБЧ. Ею мы займемся в п. 3, а здесь наша тема – сама равновозможность. Схему, которую анализировал Бернулли и для которой доказал теорему, можно представить так.

Даны N одинаковых симметричных t-гранных игральных костей, грани которых занумерованы (от 1 до t на каждой кости). Разложим их в ряд и отметим, на какой грани лежит каждая. Различных рядов (способов раскладки) костей будет $t^N$ Закрасим на каждой кости r граней – число способов раскладки не изменится, но теперь про каждую кость можно еще вдобавок отметить, лежит ли она на закрашенной или незакрашенной грани. Бернулли вычислил долю костей, лежащих на закрашенных гранях, и нашел, что она с ростом N приближается к r/t – в этом и состоит смысл его главной теоремы. Ни о какой случайности, как видим, тут речи нет – одни раскладки, одна комбинаторика.

Зато Бернулли первый фактически провозгласил три важных тезиса. Во-первых, соответствие игровых и неигровых задач может быть не просто отмечено, но и измерено, притом тем точнее, чем больше опытов поставлено. Во-вторых, в игровых задачах измерение можно успешно произвести, игнорировав случайность, т.е. саму процедуру игры (положив, вместо игры, что каждый мыслимый исход реализуется ровно один раз). И в-третьих, неигровые задачи допускают принципиально такое же измерение, если положить, что и в них тоже действует принцип равновозможности.

Последнее означает: если монета симметрична, то она – как двугранная кость (точнее, у нее r = t/2), если же она несимметрична, ее следует рассматривать как симметричную t-гранную кость, у которой r близко к t/2. Тем самым, равновозможность работает в очень широких пределах, она – не редкий частный случай, а единица измерения, нечто вроде наибольшего общего делителя.

Подход Бернулли замечателен тем, что тут вовсе не нужно знать реально эти равновозможности: достаточно, чтобы сама идея равновозможности была в принципе допустима, чтобы исследуемое событие можно было в принципе рассматривать как бросание симметричной кости, пусть с очень большим (но ограниченным) числом граней и с произвольной закраской граней. Так, выбор пола ребенка при зачатии можно представить как бросание 27-гранной кости, на которой 14 граней соответствуют мальчику, а 13 – девочке (или, кому так понятнее: извлекается один билет из урны, где 14 билетов имеют надпись "мальчик", а 13 – "девочка"). Это совсем не то, что принято писать о равновозможности в начале учебников ТВ.

Следуя идеологии Бернулли, надо полагать в качестве "аксиомы вероятности" не саму устойчивость частот, а более общее свойство случайного явления (или, если угодно, системы, порождающей случайность). Это свойство выступает у Бернулли как равновозможность воображаемых элементарных исходов; именно из них составляются серии, каждая из которых берется ровно один раз, т.е. введена еще и аксиома исчерпания равновозможностей. А с более общей точки зрения речь здесь идет о симметрии и измеримости.

### 3-3. В чем смысл "золотой теоремы"

ЗБЧ имеет множество формулировок. Без понимания сути и пределов его выполнимости нельзя понять, что такое вероятность. Это не раз отмечалось, но понимание от этого ничуть не продвинулось. На мой взгляд, главная причина неуспеха в том, что за почти три века своего существования ЗБЧ несколько раз менял и форму, и содержание, так что анализ его без обращения к истории не-возможен. И хотя добротные исторические труды о рождении ТВ существуют, но в одном пункте анализа по-существу в них дано не было, и исследователи вязнут в неадэкватном употреблении понятий. Этот пункт – суть той теоремы, которую сформулировал и доказал Якоб Бернулли и которая совсем непохожа на "теорему Бернулли" из учебников.

В истории математики мало утверждений, о которых высказано столько противоречивых суждений, как эта теорема Бернулли. Одни называли ее "золотой теоремой" [David, 1962], другие – занимательной задачей комбинаторики с довольно бедным содержанием [Кац, 1963, с. 32]; одни считали ее точной и строгой, другие видели в основе ее порочный круг; одни приписывали ей главную роль в приложениях, другие говорили, что это самообман; одни видели в ней только априорную вероятность, другие – только статистическую. (Литературу см. [Чайковский, 1989].)

Причина разнобоя, на мой взгляд, в том, что одни видели в ней раскрытие природы случайности, тогда как другие не видели. Только в одном все дружно сходятся – что теорема Бернулли описывает результат серии независимых друг от друга опытов. Соответственно, нынешняя формулировка теоремы такова: если вероятность наступления события *A* в последовательности независимых испытаний постоянна и равна p, то при достаточно большом числе n испытаний число m наступлений *A* будет почти наверняка сколь угодно близко к p; или, с помощью формулы: если n стремится к бесконечности, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$

$$P\{|(m/n) - p| < \varepsilon\} \to 1. \qquad (1)$$

Однако вот какую формулировку дал сам Бернулли: <<Пусть число благоприятных случаев относится к числу неблагоприятных точно или приближенно как r к s , или к числу всех случаев – как r к r+s или r к t, каковое отношение заключается в пределах (r+1)/t и (r–1)/t. Требуется доказать, что можно взять столько опытов, чтобы в какое угодно данное число раз (*c* раз) было вероятнее, что число благоприятных наблюдений попадет в эти пределы, а не вне их>> [Бернулли, 1986, с. 56].

Как видим, никаких "независимых испытаний" здесь нет. Более того, в отличие от позднейших формулировок, здесь только однажды упоминается вероятность – в слове "вероятнее". Никакого определения одной вероятности (p) через другую (P), вроде присутствующего в формуле (1), здесь тоже нет. Наконец, если бы не слово "вероятнее", то сама теорема имела бы чисто комбинаторную формулировку, и даже от этого слова вполне можно избавиться, поскольку оно не использовано при доказательстве.

Доказательство Бернулли, хоть и длинное, в сущности просто. Сперва проведено рассуждение об уравнивании неравновозможных событий, которое мы обсудили (в терминах кости с закрашенными и незакрашенными гранями) выше, в п. 2. Затем величина $t^N$ записывается в виде $(r+s)^N$, где s=t–r есть число незакрашенных граней, и раскладывается на слагаемые по формуле

$$(r+s)^N = r^N + Nr^{N-1}s + ... + C_N^k r^{N-k}s^k + ... + Nrs^{N-1} + s^N, \tag{2}$$

известной в наше время как бином Ньютона. В этой формуле в правой части первый член означает количество раскладок, в которых все кости лежат на закрашенных гранях; k-й означает число раскладок, в которык ровно k костей лежат на незакрашенных гранях, а последнее слагаемое – число раскладок, где все кости лежат на незакрашенных гранях.

Суть доказательства в том, что в этой сумме отыскивается самое большое слагаемое – естественно, оно соответствует тем раскладкам, где ровно rN/t костей лежат на закрашенных гранях; далее выясняется, что при достаточно большом N почти вся сумма приходится на те несколько центральных слагаемых, которые означают типичные раскладки (в которых ровно или почти rN/t костей лежат на закрашенных гранях). Другими словами, доля закрашенных оснований близка к r/t почти во всех мыслимых раскладках.

Историк Лорейн Дастон верно отметил: "Теорема Бернулли является первой математической попыткой выразить отношение вероятностей к наблюдаемым частотам событий, которые нельзя уверенно положить равновозможными" [Daston, 1988, с. 231]. Однако не стал объяснять, в чем состояла попытка, предпочтя, как и все, исследовать теорему "в нынешних понятиях", т.е. стал комментировать формулу (1). Среди новых книг изложение теоремы самого Бернулли и ее доказательства я нашел только у Хальда, но и он уверен: "Теорема предполагает, что *p* известно" [Hald, 1990, с. 263]; на самом деле в ней фигурируют текущие доли, а не вероятности. Один лишь Марк Кац, математик и методолог, увидел у Бернулли то, что есть – "занимательную задачу комбинаторики". Это в чисто математическом плане соответствует истине, однако сам Бернулли видел в теореме гораздо больше, чем доказал.

В п. 2 схема Бернулли изложена в терминах раскладки множества костей. Сам ли Бернулли придумал данную модель целиком или в чем-то заимствовал ее? Здесь могу только напомнить, что Гюйгенс, описывая дожитие до определенного возраста как лотерею (см. гл. 2), фактически рассуждал о том же: ведь 40 переживших и 15 умерших тоже могут быть представлены как грани 55-гранной симметричной кости.

Бернулли доказал, как видим, всего лишь некоторое интересное свойство бинома Ньютона, не имеющее само по себе никакого отношения к случайности. Но больше у Бернулли ничего по теме ЗБЧ нет, остальное уже относится к интерпретациям. Первую интерпретацию дал сам Бернулли, и ее часто цитируют: "... Если бы наблюдения над всеми событиями продолжать всю вечность (при чем вероятность, наконец, перешла бы в полную достоверность), то было бы замечено, что все в мире управляется точными отношениями и постоянным законом изменений, так что даже в вещах, в высшей степени случайных, мы принуждены были бы признать как бы некоторую необходимость, и, скажу я, рок" [Бернулли, 1986, с. 59]. Другими словами, автор видел в своей арифметической теореме некоторый всеобъемлющий закон природы. Почему?

Потому, видимо, что свой арифметический результат он понимал на языке равных возможностей: если все раскладки равноправны, то любая из них должна встречаться одинаково часто. Бросив N костей на стол как попало, мы обязательно получим одну из раскладок, получающихся при методическом раскладывании. Так не надо их бросать, надо подсчитывать раскладки. Если все раскладки равновозможны, мы ожидаем встретить их одинаково часто – вот Бернулли и взял их в своем доказательстве ровно по одному разу. Арифметический смысл налицо, но случайностный утерян.

Было бы наивно думать, что великий Бернулли сделал это по недомыслию – приведенная выше цитата довольно ясно говорит, что случайности как таковой в его мировоззрении просто не было места. Таково было детерминистическое миропонимание, свойственное его эпохе. И все-таки, сделанное им для ТВ столь велико, что Колмогоров именно его считал ее основателем [Бернулли, 1986, с. 4]. Добавлю: призыв "уравнять" исходы, которые не обладают сами по себе равновозможностью, уточнял Лейбница и явился тем философским шагом, который ввел ТВ в мир природных и социальных явлений. (Если Гюйгенс вывел ее за тесные рамки игорного дома, то Бернулли провозгласил весь мир игорным домом.)

Мысль эта была затем утеряна наукой. Мне известна всего одна заметка на эту тему: "Научное значение и перспективы идеи равновозможности" (1944 г.), ждавшая публикации полвека. В ней А.Я. Хинчин, один из классиков ТВ, критикуя Мизеса, заметил, что тот был неправ, отвергая идею равновозможности как возможную основу для определения вероятности. Мизес указывал, что кость может быть несимметричной, но все-таки каждая грань будет обладать определенной вероятностью выпадения; а Хинчин возражал: идею равновозможности можно модифицировать – по-видимому, можно доказать, что вероятность выпадения каждой грани несимметричной кости может быть вычислена, исходя из распределения масс в материале кости [Хинчин, 1995, с. 547-550]. Это верно, однако идея Бернулли гораздо более обща.

### *3-3.1. Независимость без случайности*

Почему же все комментаторы дружно видят в теореме Бернулли независимые испытания, которых там нет? Дело в том, что идея независимости лежит в основе нынешней ТВ, фактически заменяя в ней отсутствующую идею случайности. Как писал в 1933 г. Колмогоров, без понятия независимости ТВ осталась бы просто частью теории меры и не могла бы "доставить никакого базиса для развития большой оригинальной теории". Независимость он ввел просто – отказавшись обсуждать философский смысл явления[*] , он дал определение:

---

[*]"...Одной из важнейших задач задач философии естественных наук, после разъяснения пресловутого вопроса о сущности самого понятия вероятности, является выяснение и уточнение тех предпосылок, при которых можно какие-либо данные действительные явления рассматривать как независимые. Этот вопрос выходит, однако, за рамки данной книги".

испытания *называются независимыми,* если вероятность их совместного наступления равна произведению вероятностей этих испытаний [Колмогоров, 1998, с. 10–12].

Если так, то у Бернулли надо было найти только одно – подходящие произведения. И они, естественно, нашлись. Его теорема доказана не для случайных бросаний, а для методичных раскладок, но если разделить обе части равенства (2) на $t^N$, то получится очевидное равенство: сумма вероятностей всех возможных раскладок равна 1, если положить, что каждое произведение вида

$$C_N^k \quad r^{N-k}s^k$$

есть вероятность раскладки, в которой k костей легло на незакрашенные грани, а (N–k) – на закрашенные. Если же вероятность совместного наступления событий выражается через произведение этих событий, то события, как мы видели, *называются* независимыми.

(Замечание для математиков: правило перемножения вероятностей свидетельствует вовсе не о физической (или, шире, онтологической) независимости событий, а о выполнении некоторого свойства ортогональности для множества функций, именуемых случайными величинами. Об этом мимоходом писал Алимов [1980, с. 32]: "С математической стороны, теорема Бернулли и другие формы ЗБЧ... представляют собой не что иное, как теоремы об ортогональных функциях". Данным свойством, в частности, обладает полное множество раскладок, не содержащее никакой случайности, и это совпадение позволило видеть в чисто комбинаторной теореме Бернулли первый вариант ЗБЧ.)

Итак, независимость испытаний – лишь одна из интерпретаций "золотой теоремы", случайностная интерпретация неслучайной процедуры. "Мы на самом деле не знаем, что такое независимость, но чем бы она ни была, если она имеет смысл, она должна обладать следующими свойствами" – записали двое методологов и тут же повторили колмогоровское определение независимости [Кац, Улам, 1971, с. 72]. Это верно, но следовало бы добавить: отнюдь не всякая совокупность событий, обладающая этим свойством, являет независимость в обычном понимании. То есть налицо достаточность, а необходимости нет. Мы вернемся к этому вопросу в главе 6, когда пойдет речь о роли независимости в теории динамического хаоса.

Я уже приводил фразу: "И что не дано вывести a priori, то, по крайней мере, можно вывести a posteriori, т.е. из многократного наблюдения". Оптимизм Бернулли странен с нашей нынешней позиции (вероятность по выборке не восстанавливается, ибо частота к вероятности не сходится – на этом обжегся Мизес). Но оптимизм вполне естествен с позиции реализации "всех форм" Кардано: если та "многогранная кость", о которой мы выше вели речь, действительно существует, то рано или поздно конкретное число "раскладок" укажет на нее с любой наперед заданной точностью; и, что не менее важно, дальнейшее удлинение раскладок не отклонится от ранее найденного r/s (чего не скажешь о частотах при реальных бросаниях).

Поэтому и саму "золотую теорему" можно условно назвать *теоремой Кардано – Бернулли.* Случайность в ней не столько описана, сколько обойдена, отчего и возникла потребность в интерпретациях, спор о которых не затих до сих пор. Это важно помнить потому, что общепринятая схема Колмогорова развила именно схему Бернулли, которая, как видим, была чисто детерминистической.

Точнее, у Бернулли бином Ньютона являл собою всего лишь форму записи всех подмножеств множества элементарных событий. В системе понятий, где число событий несчетно, аналогичное множество строится сложнее (но в принципе так же) и именуется борелевским полем событий, или сигма-алгеброй. В схеме Бореля – Колмогорова, как и у Бернулли, каждое элементарное событие взято ровно один раз т.е. случайность вновь не столько описана, сколько обойдена. Обеим вероятностям (P и p) в формуле (1) теперь приписан один и тот же статус – обе понимаются как меры. Эту унификацию математики восприняли как успех в понимании вероятности, хотя, на мой взгляд, его тут не было, а была лишь спутана частота со степенью уверенности.

### 3-4. Нормальный закон и центральная предельная теорема

Получилось так, что теорема Кардано – Бернулли, чуждая какой-либо случайности, явилась первой предельной теоремой ТВ. Она показала на одном примере, что вместо случайной величины можно рассматривать ее среднее значение. Дальнейшее движение мысли приняло два направления – усиление самого ЗБЧ и поиск более сильного, чем он, утверждения относительно свойств случайных величин. Первое привело к теоремам, показавшим, что для сходимости достаточно существование дисперсии, т.е. чтобы разброс случайной величины не был слишком велик.

Второе направление привело к открытию *нормального распределения*, которым можно пользоваться вместо очень широкого класса распределений случайных величин. Здесь главную роль играет предельная теорема, которая утверждает, что очень широкий класс сумм случайных величин сходится к нормальному. Это – *центральная предельная теорема* (ЦПТ). Первый шаг к этой теореме сделал Абрахам де Муавр в 1733 г., первый частный ее случай нашел Лаплас в 1809 г. (теорема Муавра – Лапласа, гласщая, что распределение частот в серии испытаний Бернулли можно приближенно представить нормальным распределением), в качестве центрального положения ТВ она была осознана после публикации работы Чебышева (1886 г.), а самые общие ее формы найдены лишь в середине XX века. Подробнее см. [Чайковский, в подготовке].

Первый шаг Муавра состоял в нахождении наибольшего члена бинома и оценки отклонения от него, т.е. он следовал за тем доказательством ЗБЧ, какое дал Бернулли. И интерпретацию дал тоже по Бернулли, заменив лишь "рок" на "первичный план": "Хотя Случай порождает беспорядочности, но когда число опытов неограниченно велико, то с течением Времени эти беспорядочности станут несравнимы с повторностью, естественно следующей из ПЕРВИЧНОГО ПЛАНА". Это обстоятельство было для него столь же важным, как закон инерции, и вместе они, по Муавру, говорят "о мудрости и благости божией" [Adams, 1974, с. 26–27].

Нормальный закон первоначально был понимаем как закон распределения ошибок измерений, т.е. закон отклонений измеряемой величины от ее истинного значения. Историю вопроса прекрасно исследовал Вильям Адамс [Adams, 1974], и ключевые для нас пункты его работы будут воспроизведены мной в другом месте [Чайковский, в подготовке]. Поэтому здесь надо сделать лишь одно замечание: идеология исчисления ошибок повлияла на идеологию ТВ самым решительным образом, порою приводя к отождествлению всех случайностей мира с одной-единственной – той, что вызвана ошибками опыта, и этот перекос виден до сих пор. О влиянии идеологий на работу ученых мы будем специально говорить в главе 5.

Путь к анализу ошибок был начат в 1755 г., когда Томас Симпсон поставил казалось бы наивный вопрос: почему среднее арифметическое оказывается ближе к истине, чем отдельное наблюдение? [Adams, 1974, с. 34]. Первый вариант ответа был получен уже через полвека (о чем скажу ниже), но осознан гораздо позже.

Понимание исключительной роли нормального закона пришло нескоро. В 1781 г. молодой Лаплас развил анализ ошибок, начатый Даниэлем Бернулли (племянником Якоба), но оба они описывали распределение ошибок странными для нас функциями – например, Бернулли пользовался полукруглой:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

[Adams, 1974, с. 38]. Лишь в 1809 г. Карл Гаусс смог высказать и обосновать (нестрого) фундаментальное интуитивное соображение: если допустить, что равные по абсолютной величине ошибки равновероятны (снова, заметим, аксиома равновозможности), то наиболее вероятно, что плотность распределения ошибок выразится функцией $\exp(-x^2)$. Эту кривую теперь называют *гауссоидой*, а идею Гаусса – методом наибольшего правдоподобия. Мы вернемся к ней в главе 4.

ЦПТ почти во всех ее вариантах является *интегральной предельной теоремой*, т.е. утверждает сближение функций распределения, а это не всегда гарантирует сходство их плотностей, каковое обычно и интересует прикладников. Теорема Муавра – Лапласа имеет как интегральную, так и локальную формы(*), но для многих предельных теорем это не так. Тем не менее, даже интегральная ее форма достаточна для первого ответа на вопрос Симпсона, к чему мы сейчас и обратимся.

(*)Локальную форму хорошо иллюстрирует рис. 1: гауссоида близка к плотности биномиального распределения.

## 3-5. Суммирование случайных величин

Очень многие виды случайностей, если суммировать их в большом количестве, образуют итоговую случайную величину с одной и той же плотностью распределения – гауссоидой. Поэтому гауссоида оказывается наиболее важной плотностью распределения, отчего само гауссово распределение получило имя нормального.

Сто лет назад французский математик Анри Пуанкаре [1999, гл. 10–11] подробно исследовал феномен гауссовости и пришел к выводу, что его широкая распространенность – итог объективного существования в природе суммирования малых величин. Это объяснение негласно царит до сих пор.

Для читателей, далеких от ТВ, поясню смысл суммирования независимых случайных величин, поскольку это важно для понимания дальнейшего. Вероятность совместного осуществления пары исходов независимых испытаний по определению равна произведению вероятностей этих исходов; эти произведения надо, для получения функции распределения суммы двух независимых случайных величин, сложить, а если величины непрерывны, проинтегрировать. Плотность распределения суммы, получаемая интегрированием произведения плотностей двух складываемых случайных величин, называется *свёрткой*. Для получения плотности распределения трех независимых случайных величин надо произведение свертки (двух величин) на плотность третьей величины снова проинтегрировать, т.е. получить свертку свертки. При этом порядок суммирования (какую величину считать третьей) не имеет значения. То есть для изучения суммы $n+1$ независимых непрерывных случайных величин надо получить $n$-кратную свертку. Формулы можно найти в разных учебниках, из которых рекомендую [Шметтерер, 1976, с. 85; Тутубалин, 1992, с. 89].

Смысл ЦПТ удобно пояснить двумя примерами. На рис. 2 показано, как гауссоида образуется из *совсем не похожих на нее* прямоугольников. Если случайная величина $\boldsymbol{X}_1$ распределена равномерно на интервале $-1<x<1$, то плотность ее распределения изобразится отрезком $y=1/2$ (график всякой плотности распределения содержит под собой фигуру единичной площади). Если случайная величина $\boldsymbol{X}_2$ распределена точно так же, причем принимает отличные от нуля значения на интервале $-1<x<1$ независимо от $\boldsymbol{X}_1$, то их сумма распределена согласно треугольной плотности: пределы возможных изменений расширятся ($-2<x<2$), а центральные значения окажутся более вероятными. Аналогично, сумма трех таких величин обладает гладкой плотностью $y(x)$, образованной отрезками парабол, причем область изменения суммы снова расширилась: $-3<x<3$. Вот почему мы ограничиваемся на практике тремя измерениями (простаферезис Лейбница – см. гл. 2): в большинстве реальных процедур измерений среднее по первой тройке измерений дает основную информацию об измеряемой величине; усреднение больше чем по трем точкам полезно лишь для тех редких случаев, когда хотя бы одно из первых трех слагаемых дало сильное отклонение от истины. Заодно здесь виден и ответ на вопрос Симпсона.

Вот почему мы пользуемся одними и теми же приемами (например, оценкой Муавра, т.е. $\sqrt{n}$) всюду, где видим многократную однотипную случайность. Как видим, ТВ вполне подтвердила ту "природную математику", о которой писал Лейбниц.

Однако подтверждение это может быть иллюзорным. Пример, изображенный на рис. 3, показывает, что безоглядно верить в ЦПТ не следует. Здесь суммируются величины $Z_i = X_i^2$, где $\boldsymbol{X}_i$ – одинаковые независимо распределенные нормальные случайные величины. $\sum Z_i$ – хорошо известное в статистике распределение "хи-квадрат". Казалось бы, здесь сходимость к гауссоиде должна быть лучше, чем на рис. 2, но выходит не так.

Рассмотрим случайную величину $\boldsymbol{Z}$, значения которой z являются квадратами величин x. Если случайная величина X принимает любые числовые значения, то $\boldsymbol{Z}$ – только неотрицательные, поэтому ее плотность g(z) имеет максимум при z=0 и монотонно убывает с ростом z (как говорят, является *однохвостой*). Чтобы найти g(x), надо вспомнить, что реальный вероятностный смысл имеет функция распределения, тогда как плотность распределения (ее производная) – скорее иллюстративный.

*Функция распределения* G(z) случайной величины $\boldsymbol{Z}$ есть вероятность того, что

$x^2 < z$. Имеем: если $x^2 < z$, то $-\sqrt{z} < x < \sqrt{z}$, а потому

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\sqrt{z}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Введя переменную $z = x^2$, получим:

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} \frac{\exp\left(-z/2\right)}{\sqrt{z}} dz,$$

где функция под знаком интеграла как раз и есть функция g(z).

Удивительно и, пожалуй, контр-интуитивно то, что g(z) при z=0 обращается в бесконечность. Однако при суммировании даже двух таких случайных величин получаем ограниченную плотность, а плотности всех последующих сумм обращаются при z=0 в нуль, что тоже неожиданно.

Плотности величин $\boldsymbol{Z}_i$ на рис. 3 резко асимметричны ("однохвосты") за счет того, что отрицательные значения аргументов *x* случайных величин $\boldsymbol{X}_i$ отображаются в положительные значения аргументов z величин $\boldsymbol{Z}_i$. Поэтому симметрия суммы складывается медленно и нечетко, приближение ее к гауссоиде достигается путем расползания самой этой гауссоиды и смещением ее вершины вправо [Варден, 1960, с. 118; Шметтерер, 1976, с. 93]. Хотя формально ЦПТ и тут верна, пользоваться ею практически нет возможности.

Поскольку сама по себе сумма $S_n$ случайных величин с ростом n стремится, как правило, к бесконечности, вместо нее в ЦПТ рассматривается *нормированная* сумма

$$s_n = (S_n — M(S_n))/D(S_n),$$

где $M(S_n)$ – математическое ожидание суммы $S_n$, а $D(S_n)$ – ее дисперсия.

В нынешней формулировке ЦПТ – очень сильная теорема. В частности, в ней не требуется, чтобы случайные величины были распределены одинаково. Она в форме, какую придал ей финский математик Ярл Линдеберг (1922 г.), звучит так: нормированная сумма взаимно независимых случайных величин имеет распределение, сходящееся к нормальному, если дисперсии слагаемых равномерно ограничены (т.е. не превосходят некоторого общего для всех слагаемых числа $D_0$).

Независимость величин не является необходимой – существуют различные виды зависимости слагаемых, не нарушающие ЦПТ (см. например, работы, указанные у Феллера [1984, с. 304], и гл. 7 книги [Ширяев, 1989]). Наоборот, ограниченность дисперсий необходима [Феллер, 1984, с. 301]. Мы вернемся к этому в главе 4.

Изменился и ЗБЧ: он выражается теперь формулами типа (1) и мало похож на ту теорему, что доказал Я. Бернулли. Индивидуальное испытание исчезло: вместо него исследуется распределение вероятностей случайной величины. Само существование вероятности этим постулируется, так что прежний смысл (существование предела, к которому стремится частота в длинной серии испытаний) утрачен, и встает вопрос: в чем же теперь смысл ЗБЧ? Только в выяснении условий сходимости? А разве возможна вероятность, к которой частота не сходится? (Этим вопросом мы займемся в гл. 4.) В частности, выяснено, что для сходимости частоты к вероятности достаточно, чтобы дисперсия этой частоты существовала, т.е. не обращалась в бесконечность при бесконечном числе испытаний.

Это условие не является необходимым – существуют более слабые требования, например, в теореме Хинчина. Она гласит: если независимые случайные величины распределены одинаково, то их нормированная сумма сходится к пределу (математическому ожиданию) даже если их дисперсии бесконечны [Тутубалин, 1992, с. 100; Стоянов, 1999, с. 152]. (ЗБЧ в форме сходимости частоты к вероятности и в форме сходимости суммы к мат. ожиданию равносильны.) Теорему Хинчина мы рассмотрим в главе 7.

ЗБЧ – более широкое утверждение, чем ЦПТ: есть много случайных величин, у которых частоты сходятся к вероятностям, но суммы этих величин к нормальному распределению не сходятся. Дело, как легко понять, в том, что для дисперсий при этом не существует единого числа $D_0$. Точнее см. [Феллер, 1964, с. 260]. Это важно помнить, чтобы не применять (как часто делают) ЦПТ ко всем стохастическим случайностям.

### 3-6. От Лапласа к Пуассону – изменение смысла вероятности

Лаплас [Laplace, 1812] дал новое изящное доказательство теоремы Кардано–Бернулли. Еще через 25 лет проблему фундаментально разработал Симон Пуассон [Poisson, 1837]. Он обратился к вероятностям в связи с правовыми задачами. Статистическое понимание вероятности он увязывал не с априорным, а с моральным (со степенью уверенности). Пуассон начал книгу с того, что отделил "абстрактную вероятность", или шанс (chance), от "субъективной, или моральной вероятности", которую далее в основном и рассматривал просто как вероятность (probabilité).

Пуассон был уверен, например, что каждому судье можно приписать вероятность вынесения им правильного приговора. В чисто математическом смысле его занимало обобщение теоремы Кардано–Бернулли на те ситуации, когда вероятность меняется от опыта к опыту (например, от судьи к судье). Ему это удалось (путем введения средней вероятности), и тем самым познавательный статус ТВ очень вырос: теперь стало понятно, почему ее результаты применимы к сложным процессам.

Данное чисто аналитическое достижение Пуассона заслонило от историков тот факт, что столь же сильно изменилось само понимание вероятности: вместо априорной и апостериорной вероятностей, так или иначе измеримых, главным стало внеопытное, так сказать, внутреннее понимание вероятности. Ведь никакие наблюдения или вычисления не помогут нам исчислить, например, вероятность (хотя бы среднюю) вынесения верного приговора, ибо нет критерия верности.

В ТВ является классическим мысленный эксперимент с урной, из которой надо извлекать, не глядя, шары различных окрасок. Вероятность при этом вводится просто: если в урне находятся 30 шаров, 20 из которых – белые, то вероятность извлечь белый шар равна 2/3. (Отсюда и был сделан первый шаг к пониманию вероятности как меры.) Схема опыта настолько проста, что кажется очевидной, хотя в сущности все вопросы, возникающие в отношении полета монеты или кости, попросту упрятаны здесь во тьму урны. Как и все, Бернулли, Лаплас и Пуассон широко пользовались урновой схемой, но смысл извлекали из нее различный. Если Бернулли перечислял равновозможности и, исчерпав их, писал итоговую формулу, то Пуассон как бы извлекал из урны мнения.

Идея равновозможности оказалась весьма продуктивной, так как основанный на ней ЗБЧ в форме Кардано – Бернулли выполняется с достаточной точностью на практике (но не абсолютной – частота к вероятности не сходится). Проведя вычисления, можно оценить, насколько редко возможна серия из 500 бросаний, в которой число гербов не уложится в интервал от 200 до 300. Это, оказывается, приблизительно одна из 100 тысяч серий по 500 бросаний в каждой. Проверить это практически невозможно – если речь идет не о компьютерном эксперименте, а о реальных бросаниях реальной монеты. Поэтому в

ЗБЧ приходится верить, и тут становится ясно, зачем Бернулли употребил в своей формулировке слово "вероятнее".

Если теперь обратиться к нынешнему ЗБЧ, т.е., например, к формуле (1), то придется признать, что вероятности p и P имеют различный познавательный статус: первая – частота, которую можно извлечь из опыта, тогда как вторая – мера уверенности, извлечь которую из опыта нереально. Как же тогда пользоваться подобными формулами? Да очень просто – ими все пользуются только тогда, когда из самого смысла задачи ясно, что степень уверенности высока, т.е. достаточно близка к единице. Но именно при этом ее оценка опытом нереальна [Fine, 1973, с. 88]. По-видимому, это и имел в виду Бернулли, когда вероятности-частоте дал чисто арифметическую формулировку, а вероятности-уверенности – описательную ("вероятнее"). Хотя в схеме Бернулли обе вероятности можно выразить на языке комбинаторики, сам он предпочел этого не делать, ибо видел в теореме больше, чем доказал, – всеобщий закон природы, где вероятность-уверенность понемногу обращается в рок.

Пуассон сделал следующий шаг – предпочел даже вероятность отдельного исхода (в наших терминах: p из (1)) трактовать не как частоту, а тоже как внутренний параметр индивида (уверенность, предрасположенность и т.д.). Возник вековой спор о смысле вероятности, унаследованный через сто лет философией квантовой механики. Не вступая в него, отметим лишь, что следует отличать ЗБЧ в его первичной форме Кардано – Бернулли от того ЗБЧ, который выражается формулой (1) и фигурирует в нынешних книгах. Хотя Пуассон не знал еще подобных обозначений, в сущности идея формулы (1) идет от него: придав вероятности субъективный характер, он открыл математикам путь к формулировкам, определяющим одну вероятность через другую, без попытки объяснить, что же это такое.

Как бы то ни было, ЗБЧ фигурирует в форме (1) и ей подобным; мы будем далее называть эту форму *теоремой Бернулли – Пуассона.* Пуассону, кстати, принадлежит и сам термин "закон больших чисел".

В литературе две формы ЗБЧ не различают, а зря: в одной массовая случайность выступает как исчерпание равновозможностей, а в другой – как соединение душевных актов (суждений, оценок, надежд). Естественно, различно и их математическое содержание: первая – чисто комбинаторный результат, а вторая определяет связь заданных величин p и P, смысл которых до сих пор обсуждается. Обе теоремы едины лишь в том, что обходят феномен случайности. Мы будем там, где не сказано иное, иметь в виду ЗБЧ в его исходной форме Кардано – Бернулли.

### 3-7. Последующие интерпретации вероятности и ЗБЧ

Как отметил Колмогоров [1956, с. 262], понимание вероятности как частоты возможно и для P, "но это не позволит нам совсем освободиться от необходимости на последнем этапе обратиться к вероятностям в примитивном грубом пониманииии этого термина", т.е. как степени уверенности. Через 20 лет логик Б.Н. Пятницын с горечью заметил, что вероятность относится к тем понятиям, о которых сказано: "чем больше о них говорят, тем меньше знают, что это такое" [Пятницын, 1976, с. 88].

Как же так получилось? Мое мнение: главная ошибка состояла а отказе от анализа самого понятия вероятности. Все забыли, что в основе ТВ лежит термин, имеющий сразу четыре смысла. Еще Лейбниц был неправ, объединяя их. Разумеется, это не в упрек ему – едва ли в то время было возможно осознать, что ТВ, понимаемая как "новый раздел логики", не даст учения о частотах, а комбинаторика мыслимых исходов не даст гуманитарных пониманий вероятности (логического и морального). Нелепо упрекать и Бернулли – он сделал попытку спасти единое понимание вероятности тем, что отнес гуманитарные понимания к ситуациям, в которых такие вероятности всегда получаются очень близкими к нулю или единице. Если виноваты, то последователи, равнодушные к анализу понятий.

Лаплас дал, как выше сказано, новое изящное чисто биномиальное доказательство теоремы Кардано – Бернулли. Однако его знаменитые работы, определившие облик ТВ на столетие, никак не продвинули исследуемую нами проблему. Скорее наоборот – у математиков стало (и продолжает быть до сих пор) нормой и даже некоторым шиком углубляться в аппарат ТВ, не помышляя о сути применяемых понятий.

Новую интерпретацию вероятности содержала книга Пуассона, о чем выше сказано. В XX веке это понимание перешло в концепции субъективной вероятности [Кайберг, 1978; Gigerenzer e.a., 1989], которыми мы заниматься не будем. Незаметная смена смыслов связана, как мы увидим в главе 5, со столь же незаметной сменой познавательных моделей, господствующих в обществе. Здесь же нам важно следствие – поскольку почти никто не задумывается о смысле ЗБЧ (а тех одиночек, кто задумывается, научный мир всерьез не воспринимает), от "золотой теоремы" мало что остается. Иногда даже "встречаются в современной литературе утверждения, что статистическая устойчивость имеет место в силу ЗБЧ" [Алимов, 1980, с. 27]. Вот пример: "Существование предела этих частот есть следствие... закона больших чисел" [Синай, 1981, с. 78]. Жаль, что вывод этого "следствия" нигде не прочесть. Нет и самого предела (см. п. 2-7).

Интерпретация ЗБЧ остается внутренне противоречивой. Составитель сборника по философии вероятности французский методолог Жак-Поль Дюбю воспроизвел точку зрения Хакинга, согласно которой "сама концепция вероятности подобна Янусу: статистическая сторона занята статистическими законами случайных процессов, а эпистемическая сторона занята степенью рационального убеждения – в терминах, возможно чуждых статистического содержания" [Philosophy..., 1993, с. XII]. Если так, то Хакинг не заметил ни симметрийной стороны ЗБЧ, ни сущностного (а не только понятийного) различия в разных пониманиях вероятности. Это, по-моему, прямой итог отсутствия в книге Хакинга [Hacking, 1975], в иных отношениях добротной, анализа доказательства "золотой теоремы".

Изложив мысль Хакинга, Дюбю с грустью отметил, что эти два понимания, остающиеся без всякой связи с 1660 г., объединены в концепции Колмогорова, но – ценой многих передержек (distortions) [Philosophy..., 1993, с. XII]. На мой взгляд, Дюбю прав в том смысле, что

1) первая аксиоматика Колмогорова без всякого обсуждения узаконила пуассоново отождествление p и P (хотя Пуассон придавал обеим статус моральных, а Колмогоров – теоретикомерных);

2) вторая аксиоматика Колмогорова не вполне правомерно отождествила случайность с длиной алгоритма. Ближе к истине были, на мой взгляд, Венн и Карнап (см. конец гл. 2), увидавшие в двух интерпретациях два разных природных явления. Однако интерпретации берутся не из вакуума. Основную роль в них играют господствующие в обществе воззрения (см. гл. 5). Среди интерпретаций главную роль, по-моему, играет *презентизм* – направление в истории науки, оценивающее труд прошлого с позиций нынешней науки (о презентизме см. [Демидов, 1994]). Точнее – дело здесь в желании видеть у автора прошлого лишь то, что вошло в последующую науку. А теорема Кардано – Бернулли не вошла, и ее не видят.

На самом деле Бернулли видел всякое случайное событие как падение некой многогранной кости определенной гранью и при доказательстве исходил не из какой бы то ни было "доверительной" оценки, а из схемы исчерпания равновозможностей. Если следовать за его логикой, то легко понять, что никакого представления о случайности явлений мира ни у него, ни в ТВ действительно не отражено. В XX в. родилось понимание ЗБЧ в рамках теории веществ. числа (пп. 4-5, 4-8), несколько прояснившее его случайностный смысл.

### 3-8. Место нормального закона

Пора отметить, что и ЦПТ, и вся идеология суммирования независимых случайных величин лишь иллюстрируют важную роль гауссоиды, но вряд ли могут служить обоснованием этой роли. Советские учебники ТВ дружно иллюстрировали свои положения разбросом попаданий при стрельбе в цель, и вряд ли это было лучше, чем прежняя установка Гаусса – Пуанкаре, видевшая главным примером случайного события совокупность ошибок измерений. Есть ли у ТВ что-то более общее?

Принято считать, что это общее состоит в способе формирования случайности:как ошибка при измерении или стрельбе складывается из большого числа малых влияний (откуда и следует, якобы, нормальный закон), так и прочие случайные явления складываются из незаметных влияний. Делается, например, такое обобщение: "Встречающиеся на практике случайные величины во многих ситуациях возникают как следствие большого числа малых неконтролируемых влияний"; и хотя "наблюдаемая величина *X* может формироваться довольно сложным путем как результат этих по отдельности малых воздействий", но из-за их малости "суммарное воздействие в первом приближении можно считать линейной функцией" [Золотарев, 1984, с. 19].

На мой вопрос – почему разнородные влияния именно суммируются и почему порядок малости их взаимосвязи более высок, чем сами влияния, один сторонник вышеприведенной позиции ответил, что иначе бы нормальный закон не был распространен столь широко; и тут же с улыбкой признал тут порочный круг(*). Однако в большинстве практических задач ни малость и линейность влияний, ни их суммируемость ничем не обоснованы, и А.А. Марков (старший) еще в 1898 г. писал, что "представление ошибки в виде суммы многих независимых ошибок следует отнести, как я полагаю, к области фантазии" [Марков, 1951, с. 248]. Тем более фантастичным представляется такой подход вне теории ошибок.

Для понимания сути и места нормального закона нужна более общая основа. Можно думать, что широкое распространение гауссоиды и близких к ней плотностей среди явлений природы связано с тем, что она служит предельной формой не только для сумм, но и для других функций многих случайных величин. Такое предположение, насколько знаю, почти не исследовано (см., впрочем, туманную ссылку на работы М. Фреше [Леви, 1972, с. 163]), и остается исходить из успехов в анализе суммирования.

В 1954 году В.П. Скитович доказал, что если случайные величины независимы и независимы их линейные комбинации (со сплошь ненулевыми коэфициентами), то эти величины распределены нормально [Феллер, 1984, с. 98]. Данный результат наводит на ту мысль, что вообще следует ожидать тесной связи нормальности и независимости и, следовательно, искать скрытую зависимость между случайностями всюду, где налицо резкое отличие наблюдаемых распределений от нормальных. Этим мы займемся в части 2, но прежде надо понять, как устроена простейшая случайность.

## Глава 4. Вероятностная случайность и симметрия

Напомню, что Колмогоров называл вероятностно-случайными, или сто-хастическими, случайные явления, обладающие устойчивыми частотами (см. Введение). Рассмотрим свойства такой случайности (стохастичности по Колмогорову), чтобы понять, откуда берется феномен вероятности.

---

(*)Курьезность ситуации не в самом обращении к опыту, а в обращении дважды – как априори, при постулировании устойчивости частот и прочих исходных положений ТВ, так и в ходе рассуждений.

## 4-1. Реализационная симметрия и равновозможность

В главе 3 мы видели, что ЗБЧ гласит: в массовых процессах частота мало отклоняется от своей средней величины, которую именуют вероятностью. Понятие вероятности при этом вводится на основе идеи равновозможности (а вовсе не как предел частоты). Известное утверждение о том, что ЗБЧ связывает формальную ТВ со статистикой, ни на чем математическом не основано. Принципиально то, что равновозможность работает не только там, где есть что-то симметричное по форме, но всюду, где присутствует нечто неизменно сохраняющееся от опыта к опыту, что можно (пусть приближенно) разбить на равные "клеточки", т.е. измерить.

Чтобы разбить объект "на равные клеточки", надо найти в нем какую-то симметрию. Аксиома равновозможности как раз и есть утверждение симметрии случайного акта в качестве его исходного качества. В предыдущих главах эта симметрия именовалась (для облегчения восприятия читателями разных специальностей и интересов) исчерпанием равновозможностей, а теперь пора дать ей более точное название – **реализационная симметрия**, чтобы подчеркнуть и ее основное качество (каждый вариант берется один раз), и симметрийный характер этого качества.

Хотя ТВ родилась в игровых задачах, но неигровые задачи допускают такое же измерение частот, как игровые. Тем самым, и тут использована равновозможность – а именно, равновозможность воображаемых элементарных исходов (см. конец п. 3-2). Тот факт, что каждый элементарный исход берется в расчетах ровно один раз, и есть реализационная симметрия. Исходы, для которых она имеет место, называются *микросостояниями* [Криндач, 1978]. Элементарная равновозможность работает в очень широких пределах, она – не редкий частный случай (как пишут в учебниках), а единица измерения, нечто вроде наибольшего общего делителя. Например, как сказано в главе 3, соотношение полов надо понимать так: при зачатии как бы бросается 27-гранная симметричная кость, на которой 14 граней (элементарных равновозможных исходов) соответствуют мальчику и 13 – девочке. Здесь имеется 27 микросостояний и 2 макросостояния (наблюдаемых исхода).

Можно сказать, что *обычно элементарные равновозможности являются скрытыми.* В частности, Чендов [1974, с. 134-135], кроме примера с мальчиками и девочками, привел пример этого факта из квантовой физики.

Парадоксально: простая мысль о скрытых состояниях, неявно, но определенно содержащаяся у Я. Бернулли, еще сто лет назад никому не приходила в голову, и даже самые светлые умы (например, Анри Пуанкаре) видели в идее равновозможности только порочный круг: равновозможность есть равновероятность, следовательно любая вероятность якобы определяется через неопределяемую вероятность. Впоследствии методологи сделали попытки увязать вероятность с симметрией [Криндач, 1978; Бирюков и др., 1982, с. 12], но успеха у математиков не имели, и до сих пор в самом солидном руководстве можно прочесть, что симметрия – нечто внешнее и частное: "Понятие равновозможности может быть применено при физической симметрии объекта" (имеется в виду геометрическая), а также "при простой случайной выборке из конечной популяции", однако "стоит нам принять элементарные исходы не равновозможными, как мы должны изменить определение вероятности" [Kendall, 1987, с. 258, 261], т.е. сменить априорное определение на статистическое.

Откровенность редкая, но суть дела типична: элементарными названы наглядные, сразу видимые исходы. Авторы солидного руководства не заметили, что у классиков элементарными являются совсем не те объекты. И у Бернулли, и у Колмогорова элементарными являются микросостояния, т.е. объекты реализационной симметрии – это грани t-гранной кости у первого и точки отрезка [0, 1] у второго. Без этого факта формулы ТВ не имели бы смысла за рамками азартных игр.

Следующее, что надо понять – что независимость тоже является своеобразной симметрией. Здесь уместно снова привести вывод методологов: "Мы на самом деле не знаем, что такое независимость, но чем бы она ни была, если она имеет смысл, то она должна обладать следующими свойствами" (далее формулируется перемножение вероятностей) [Кац, Улам, 1971, с. 72]. Для схемы доказательства теоремы, изложенной в п. 3-3, можно еще добавить, что независимость – это равновозможность серий (раскладок), или, что то же, их реализационная симметрия.

Перефразируя фразу методологов, скажу так: мы на самом деле не знаем, что такое равновозможность, но чем бы она ни была, ею должны обладать выпадения граней симметричной кости. (Пусть это далеко от аккуратного математического утверждения, но, по-моему, достаточно, чтобы снять упрек в порочном круге: равновозможность – свойство микросостояния, одно из неопределяемых понятий, какие лежат в основе любой математической теории.) Согласно Бернулли, некий аналог такой кости имеется всюду, где есть многократно повторяемая случайность; в наше время следует уточнить: не всюду, а там, где имеет смысл сам ЗБЧ.

О том, где он смысла не имеет, мы поговорим ниже (п. 7), а пока выясним, как ЗБЧ действует.

### 4-2. Краткий анализ стохастичности

Как уже замечено во Введении, если подбросить монету один раз, то нельзя предсказать, какой стороной она упадет, но если сделать это 500 раз, то известно, что она упадет гербом приблизительно 250 раз, так как вероятность падения любой стороной равна 1/2. И хотя математик может тщательно разъяснить, что тут значит слово "приблизительно", он мало поможет в понимании равновероятности и совсем ничего не скажет насчет самого важного вопроса: как из непредсказуемых результатов складывается предсказуемый? Другими словами: почему из совокупности неустойчивых процессов (полетов монеты) складывается устойчивый (частота)? И всегда ли частота оказывается устойчивой?

"Все же здесь есть что-то парадоксальное. Мы можем предвидеть, что произойдет в конечном итоге, но не можем предвидеть деталей" – писал венгеро-американский математик и педагог Дьердь Пойа [1957, с. 307]. Аналогичную ситуацию в квантовой физике ("законы квантовой физики можно понять, ... если применить законы теории вероятностей к большому числу частиц, однако эти законы не объясняют поведения электрона или протона") венгерский математик Габор Секей тоже назвал парадоксом [Секей, 1990, с. 209]. Но что делать с парадоксами, не сказано.

Хотя все учебники ТВ во введениях напоминают, что симметричная монета или кость падает на каждую сторону с равной частотой, но из новых учебников мне попался лишь один [Чистяков, 1996], где приводятся на этот счет хоть какие-то доводы. Их тут нашлось два. Один – логический (монета симметрична и потому не может падать одной стороной чаще, чем другой), другой – экспериментальный ("Экспериментально установлено, что с ростом числа опытов $N$, проводимых в одинаковых условиях, частота появления некоторого события $A$ ... становится почти постоянной"). На этом "обоснование" феномена вероятности и закончено, поскольку автор счел доводы достаточно обоснованными.

Однако легко увидеть их полную непригодность. В самом деле, симметрия монеты *достаточна* (при некоторых допущениях) для появления частоты 1/2, но вовсе не является для этого *необходимой*: если слегка изогнуть монету гербом внутрь, то она станет падать гербом вверх чаще, но можно еще усилить асимметрию и этим вернуть частоту 1/2 – для этого достаточно напаять грузик на герб.

Неверен, вообще говоря, и "экспериментальный" довод. Например, математик В.Н. Тутубалин [1993], касаясь процедуры первичного анализа опытных данных физики, признал, что "в большинстве случаев эта процедура закончится печально: статистическая устойчивость будет отвергнута". Круг таких явлений в самом деле очень широк – из явлений практики к нему, например, относятся мутации, а также всё то, чем занята "технетика" [Кудрин, 1991, 1995]. А из явлений модельных, постоянно привлекаемых для иллюстрации законов ТВ, укажу как раз на серию бросаний монеты: стоит немного изменить способ подсчета, и ответом будет – частота неустойчива.

Как уже сказано в начале Введения, если записывать не отношение числа гербов к числу бросаний, а долю опытов, в которых число гербов преобладает, то, несмотря на полную симметрию ситуации (доля равна половине), фиксируемая случайная величина — итог случайного процесса и оказывается неустойчивой [Феллер, 1964, с. 99–101]. Мы к этому не раз еще обратимся, пока же замечу, что обоснования у В.П. Чистякова не получилось. Его учебник издан для будущих инженеров, но о трудностях не сказано ни слова, и инженеры (как и прочие прикладники) потом всюду пытаются использовать непригодные формулы – с огромными потерями для практики и престижа науки.

Странно отсутствие желания объяснять сам факт наличия устойчивой частоты (гнутая монета падает гербом реже, но тоже с устойчивой частотой). Еще более странно для математика объяснение конкретного значения предела (1/2) без речи о *существовании* предела (хотя литература об этом, как мы видели в гл. 2, существует и наличие предела там отрицается). Судя по всему, этот «предел» автор и называет вероятностью, по сути следуя тому же Мизесу.

Кроме объяснений устойчивости частот, упомянутых у В.П. Чистякова, есть третье, очень старое, восходящее как минимум к философу Томасу Гоббсу: равная частота исходов следует из беспорядочности полета монеты, а сама беспорядочность исходов следует из того, что полет монеты необозримо сложен. Есть и четвертое, более новое, оно апеллирует к ТВ: ЗБЧ говорит, при каких условиях частота сходится к вероятности; для симметричной монеты они выполнены.

Оба эти объяснения тоже неудачны. Ссылка на беспорядочность может быть и проясняет факт равновероятности, если понимать ее как симметрию, но этим путем не объясняется устойчивость частоты (стохастичность по Колмогорову). Пусть монета явно и грубо изогнута – для игры она непригодна, поскольку на одну сторону падает заметно чаще, но феномен устойчивости частот виден на ней тоже. Ссылка же на сложность полета (невозможность его расчета) лишь поясняет наше незнание, но нового знания не привносит. Главный вопрос – почему из массы непредсказуемых событий складывается предсказуемое (устойчивая частота), остается без ответа.

Что касается ЗБЧ, то он сам основан на идее устойчивости частот, на что многие указывали. Ограничусь цитатой из классика: "Все применения теории вероятностей" основаны на "эмпирическом законе", гласящем, что "в многочисленной серии испытаний благоприятное событие осуществляется с частотой, близкой по величине к вероятности... Это утверждение представляет собой постулат... Подтверждение, идущее со стороны теоремы Бернулли, не является доказательством. Теорема Бернулли исходит из существования вероятности..." [Борель и др., 1972, с. 59].

О "теореме Бернулли" (точнее, здесь имеется в виду теорема Бернулли – Пуассона, т.е. принятый ныне вариант ЗБЧ) мы говорили в главе 3 и видели, что она действительно исходит из существования вероятности; а сейчас отмечу, что *математик вправе обращаться к данным опыта только за исходными положениями своих рассуждений (аксиомами), но не за промежуточными аргументами,* что как раз и происходит, когда ссылаются на опыт как на обоснование факта устойчивости частот. Поскольку устойчивость частот в набор аксиом никакой теории не входит, но в то же время является математически конструируемым фактом, она должна быть доказана. Какой отраслью математики? На этот вопрос призвана ответить алеатика. Мы обсудим его в главе 6, а пока вернемся к монете.

В начале Введения мы видели: если полет монеты слишком короток, то один игрок может подозревать другого в нечестной игре. Этот факт иногда отмечают ("вероятностный контекст становится подозрителен" [Doob, 1994, с. 158]) или даже предлагают говорить не о случайности и вероятности, а о неопределенности [Алимов, 1980, с. 16; Алимов, Кравцов, 1992, с. 162], но вопрос этим не проясняется.

Если же монета подброшена вверх так, что она, падая, перевернется много раз, то окажется, что неопределенность не выросла, а упала: теперь каждый игрок точно знает, что противник знает не больше, чем он. Замечательно здесь то, что именно теперь мы оба можем согласиться – монета выпадет гербом с вероятностью 1/2. Здесь *уменьшение неопределенности рождает вероятность*. Это легко понять, анализируя «рулетку Пуанкаре».

### 4-3. Рулетка Пуанкаре и вероятность как мера

Пусть на вертикальной оси крутится горизонтальная стрелка, под нею половина плоскости белая, а половина черная. Слабо толкнув стрелку, легко подгадать, чтобы она остановилась над белым, но если она сделает хотя бы 10 оборотов, подгадать трудно. Если же и секторов сделать не два, а 37, как в настоящей рулетке, то подгадать практически невозможно. Говоря более строго: для любой точности измерений существует число оборотов, после которого угадать цвет остановки невозможно. То есть факт невозможности справедлив на том самом языке "эпсилон – дельта", который принят за эталон строгости в математическом анализе.

Сопоставив белое с гербом, а черное – с цифрой, получим прекрасную *модель бросания монеты*. В модели нет сложного полета, а главный результат налицо: чем больше начальная скорость, тем меньше она влияет на итог, на цвет остановки. Хотя точка остановки остается функцией начальной скорости и близким начальным скоростям по-прежнему соответствуют близкие точки остановки, но они всё чаще оказываются принадлежащими разным цветам.

Следовательно, необозримая сложность полета монеты не рождает случайность, а лишь маскирует ее подлинный источник – неустойчивость процедуры отображения бесконечного множества начальных состояний в конечное (в случае монеты в нем всего два элемента) множество итоговых. Эта неустойчивость должна быть исследована, а не принята как данная опытом поколений.

Еще Хинчин [1995, с. 548] отметил, что рулетка демонстрирует обобщение идеи равновозможности на непрерывные множества. Поэтому на ней легко ввести понятие *меры*. В самом деле, в рулетке Пуанкаре вероятность выступила как мера – стрелка остановится над белым настолько чаще, насколько больше доля белых секторов (или, что то же, белых дуг), чем черных. Рассмотрим это подробнее.

Вращение стрелки можно, не ограничивая общности рассуждения, всегда начинать с одного и того же нулевого угла. Тогда угол $\alpha$ на котором она остановится, будет функцией начальной скорости v: $\alpha = \alpha$ (v). Если v достаточно велика, то доля времени, проведенная стрелкой в белом секторе, а следовательно и вероятность остановиться в нем, близка к той доле, какую составляет белая дуга от всей окружности. Наоборот, зависимость угла остановки $\alpha$ как от v, так и от закона, по которому совершается замедление, сказывается всё меньше и быстро сходит на нет.

Иначе говоря, какова бы ни была монотонная непрерывная функция $\alpha$ (v), искомая вероятность остановки стрелки в белом секторе задается не ею, а соотношением длин дуг разных цветов. В этом смысле функция $\alpha$ (v) *произвольна*. Факт произвольности $\alpha$ позволяет заняться исключительно соотношением длин дуг, что мы и сделаем. Число белых дуг, их взаимное расположение и длина каждой могут быть любыми, но если их *мера* (суммарная длина) не меняется, не изменится и вероятность остановки стрелки на белом. Поэтому естественно назвать вероятностью остановки стрелки на белом именно меру (суммарную длину) белых дуг. В этих терминах феномен существования постоянной вероятности вполне очевиден. Существенно, что белая часть круга может быть сколь угодно "рваной" – это не мешает вероятности оставаться постоянной (здесь, в отличие от п. 2-7, имеет место точный предел — при бесконечном v).

В данных терминах легко переосмыслить рассмотренную ранее схему Бернулли. Пусть круг расчерчен на t равных секторов, раскрашенных в w различных цветов (w < t) в произвольном порядке. Пусть r секторов – белые (r < w). Если w = 2, мы моделируем бросание монеты (при t = 2r монета симметрична), если w = 6, то – выпадение заданной грани игральной кости, если w = 52, то – появление заданной карты из колоды карт и т.д. На рис. 4 изображен круг при w = 2, r = 10, t = 18, т.е. моделируется монета, падающая гербом с вероятностью 5/9. По оси абсцисс отложены значения начальных скоростей стрелки, график изображает функцию $\alpha$ (v), а по оси ординат, где отложены углы остановки стрелки, будто бы катится круг рулетки. На рисунке максимальному значению v = b соответствует чуть более одного оборота стрелки.

Пусть в нашем опыте a<v<b. Спроецируем все возможные углы остановки на единичный интервал, на котором совокупная длина белых отрезков есть вероятность p выпадения герба. Чем больше будет b, тем теснее будут лепиться белые и черные отрезки, но вероятность p меняться не будет.

Пока эти длины конечны, всё просто. Когда же длина каждого отрезка стремится к нулю, то в пределе придется, чтобы ввести вероятность, говорить о суммарной длине отрезка, составленного из бесконечного числа бесконечно малых отрезков (но, если следовать нестандартному анализу, не из точек). Теория такого суммирования существует – это теория меры, которую предложил в 1904 г. Анри Лебег. В чем она состоит, здесь не имеет значения – нам достаточно того, что вероятность как мера сколь угодно "рваного" множества имеет смысл. В нашем случае эта вероятность – мера совокупности белых дуг.

Удивительно, сколь долго оставался незамеченным факт изоморфизма свойств рулетки и монеты. У самого Пуанкаре рулетка рассмотрена с одной целью – показать, что факт равновероятности справедлив при любом законе замедления стрелки, выражаемом *произвольной* функцией. В книге Бореля рулетка Пуанкаре подробно описана, однако акт случайного бросания описан без связи с ней и подан вполне традиционно, по Гоббсу: "Разве можно детально проанализировать движение руки, бросающей кость?" [Борель, 1923, с. 63–66, 5]. Насколько знаю, первым рулетку с монетой сопоставил в 1935 году философ Куки [Kuki, 1966, с. 150].

Но и после этого рулетка Пуанкаре осталась вне поля зрения ученых, и в новейшей книге [Шрёдер, 2001, с. 207] читаем: чтобы регулярно выигрывать в рулетку, «неоходимо прежде определить коэффициенты трения для шарика и колеса». Автор этого уверения не стал проверять его практически, а зря: хорошо бы узнать, насколько прав был Пуанкаре, утверждая произвольность функции, т.е. независимость цвета (но не угла) остановки от характера движения, в том числе и от коэфициента трения.

### 4-4. От рулетки Пуанкаре к странным аттракторам

Обиходный взгляд на случайность исхода бросания монеты ("необозримо сложный полет") выступает как итог ущербной философской позиции (именуемой абсолютным детерминизмом), а вовсе не слабости фактических знаний. Со времен Ньютона и до работы Лоренца почти 300 лет ученые закрывали глаза на самодовлеющий характер феномена неустойчивости движения, полагая, что практический интерес представляют только устойчивые процессы. Оказалось не так.

Высказано убеждение [Растригин, 1969, с. 18], что источник неопределенности имеет в рулетке квантовую природу (трение определяется хаотическим движением атомов). Возможно, но он должен каким-то механизмом усиливаться, и этим механизмом служит принципиальная неустойчивость акта остановки рулетки.

Рулетка Пуанкаре оказалась простейшим примером *динамического хаоса.* Теория динамического хаоса (появилась в 1960-х гг.) показала, что случайное поведение является вполне обычным для широкого класса детерминированных систем. В настоящее время становится ясно, что в мире динамических систем господствуют два противоположных принципа – *сжатых отображений* и *растянутых отображений*. Первый лежит в основе обычной теории динамических систем, задаваемых дифференциальными уравнениями, имеющими (кроме отдельных особых точек) единственные решения. Если правые части уравнений непрерывны, то, в силу принципа сжатых отображений, единственный тип неустойчивости траекторий – расхождение от особых точек к асимптотам (замкнутые асимптоты именуются предельными циклами) или на бесконечность. Если не рассматривать особые точки, то случайности тут места нет ("лапласов детерминизм").

В.П. Гачок [1989] рассматривает всякую (в том числе и не описываемую дифференциальными уравнениями) самоорганизацию как сжатие отображений. Г.М. Заславский [1984] связывает появление динамического хаоса с противоположной ситуацией – когда в динамической системе выполняется принцип растянутых отображений; он имеет место в пространствах отрицательной кривизны; таковы, например, "рассеивающие биллиарды" – т.е. системы с упругими столкновениями шаров, когда производные непрестанно терпят разрыв, а углы расхождения со временем увеличиваются. В области действия этого принципа царит *перемешивание*, а оно порождает простейшую случайность – стохастичность. Другими словами, здесь возникают случайные события, повторяющиеся с регулярной частотой, т.е. частотой, сходящейся (или почти сходящиеся — см. п. 2-7) к определенному пределу, именуемому *вероятностью*. Иногда удается сформулировать и *критерий стохастичности* – условие, при котором в динамической системе возникает перемешивание.

Сравнивая идеологию этих двух книг, приходишь к мысли, что стохастичность динамических систем возникает там, где с течением времени происходит расширение фазового объема системы, а самоорганизация, наоборот – там, где происходит его сжатие. (Для сравнения: обычная статистическая физика исходит из идеи сохранения фазового объема.) В больших системах возможно расширение по одним фазовым областям или подпространствам и сжатие по другим, поэтому траектория реального процесса может переходить из области сжатия в область растяжения и обратно, что воспринимается как *фазовые переходы*. Поэтому, наблюдая за маргинальным участком (свойством, срезом) такой системы, естественно ожидать встретить наиболее сложно устроеннную случайность. Мы вернемся к этой теме в главе 6.

Рулетка моделирует отдельное бросание, но как связать отдельные бросания в цепь независимых испытаний так, чтобы вся цепь порождалась одной моделью, доступной аналитическому изучению? Такую модель являет собою *странный аттрактор.* Его впервые обнаружил в машинном эксперименте в 1963 г. американский математик-метеоролог Эдвард Лоренц, исследуя задачу о завихрении воздушного потока. Оказалось, что система из трех довольно простых дифференциальных уравнений (рис. 5) обладает поведением, похожим на неограниченную серию бросаний монеты. Полагая скорости равными нулю, найдем условия покоя системы: начало координат ($x=y=z=0$) и две симметричные точки $x=y=\pm 6\sqrt{2}$, $z=27$. Все три точки покоя неустойчивы, но вокруг каждой из последних двух расположен аттрактор (область, притягивающая к себе траектории).

Аттракторы были известны и ранее, но эта пара воистину странная, отчего ее (всю пару) и назвали странным аттрактором: попав в одну область притяжения, траектория может сделать вокруг точки покоя непредсказуемое число оборотов, а затем уйти в другую область, где поведет себя аналогично (столь же нерегулярно).

На рис. 5 [Странные..., 1981, с. 73] изображены первые сто витков после выхода траектории из начала координат (a – первые 54 оборота, b – следующие 46). Обороты вокруг левого аттрактора происходят по часовой стрелки, вокруг правого – против. Эту картинку иногда называют "бабочкой Лоренца", и это удачно, но надо иметь в виду, что "крылья" этой "бабочки" неплоские и сгруппированы вокруг разных плоскостей.

Для понимания мировоззренческого аспекта феномена странных аттракторов важно следующее обстоятельство: "Хотя решения полностью определяются своими начальными данными, они с течением времени меняются чрезвычайно нерегулярным образом. Более того, малые отклонения начальных условий вызывают большие отклонения в поведении решений" [Странные..., 1981, с. 193]. То есть перед нами *две случайности* – первая проявляется вдоль одной траектории, четко воспроизводима и эквивалентна как одной раскладке в схеме Бернулли, так и случайности по Ламберту для одного числа; другая состоит в резком различии между траекториями, берущими начало из близких точек, плохо воспроизводима и аналогична серии(*) бросаний монеты (или серии опытов с рулеткой Пуанкаре). И если вторую случайность еще можно (хотя, на мой взгляд, не нужно) подавать как следствие незнания (сложности), то первая прямо проистекает из знания: стохастическая последовательность порождена самой системой уравнений. Это оказалось неожиданно.

Последнее для нас важнее всего: здесь факт непредсказуемости не имеет отношения ни к точности задания начальных данных, ни к возмущениям в ходе движения, а заключен в самой системе уравнений. Это – новая для науки ситуация, она придает феномену случайности новый статус, статус *объективной реальности*.

Б.В. Чириков, один из творцов теории динамического хаоса, резонно изумился: "Источник чрезвычайной сложности, характерный для индивидуальной реализации случайного процесса, оказался совсем не там, где его искали со времен Больцмана! Дело вовсе не в сложном устройстве конкретной динамической системы (и уж тем более не в числе ее степеней свободы)..." [Лихтенберг, Либерман, 1984, с. 3]. Добавлю: и даже не в случайном процессе. Источник вполне виден в единичном случайном акте – остановке стрелки рулетки. (Напомню, сам феномен остановки вращения как источник случайности отметил еще римский пифагореец Нигидий Фигул – см. гл. 1.)

---

(*) Но не эквивалентна, поскольку серия бросаний монеты невоспроизводима. Это различие будет объяснено в рамках двойственной концепции частоты и меры в конце главы 5. Серия начальных точек лоренцова процесса сопоставлена серии бросаний.

### *4-4.1. Второе обоснование теории вероятностей*

Совершив первый полувиток вокруг правого аттрактора, траектория "бабочки Лоренца" уходит к левому и совершает вокруг него 24 витка, понемногу удаляясь от левой точки покоя; затем следует один виток вокруг правого и снова 4 витка вокруг левого. Переходов мало: 5 налево и 5 направо. Казалось бы, налицо предпочтение к левому аттрактору, но оно быстро иссякает, и на рис. b проступает безразличие: 22 левых и 24 правых витка, причем нет тенденции задерживаться у одного из аттракторов – переходов теперь много (11 налево и 10 направо), и это можно трактовать как независимость правых и левых витков. Как видим, траектория выходит на довольно-таки симметричный режим, при котором чередование правых и левых витков вполне можно сопоставить с результатами независимых бросаний симметричной монеты.

Есть и более прямые сопоставления: например, многообразие траекторий странного аттрактора, способных реализоваться за определенный отрезок времени, можно представить как преобразование плотности вероятностей начальных состояний в плотность вероятностей конечных состоя-ний [Странные..., 1981, с. 206]. А это уже чисто вероятностная процедура ("вычисление по одним вероятностям других"), и налицо аккуратное (пусть и частное) **обоснование феномена вероятности**. Это – второе обоснование. Первое, тоже частное, дала алгоритмическая ТВ.

Недавно получены фундаментальные результаты, делающие данное обоснование ТВ ясным и важным: для довольно широкого класса динамических систем, обладающих хаотическим поведением, доказаны основные предельные теоремы –ЗБЧ и ЦПТ [Bunimovich e.a., 1991; Young, 1998]. Это, прежде всего, так называемые рассеивающие биллиарды Синая, моделирующие движение атомов и молекул, претерпевающих упругие столкновения; но рассмотрены и иные системы с экспоненциальным распадом корреляций как функций дискретного времени. Хотя сама Л.-С. Юнг признала чрезмерную специальность некоторых условий и нестрогость некоторых доказательств, успех в обосновании ТВ представляется внушительным.

## 4-5. Симметрия по Борелю и случайность по Ламберту

Если обозначить через 0 выпадение герба, а через 1 – цифры, то серию из N бросаний монеты можно представить как действительное число (для определенности – число единичного отрезка), записанное в двоичной системе и вычисленное до N-го двоичного знака. Например, серия герб-цифра-герб, т.е. 101, запишется числом 0,101, т.е. обыкновенной дробью 5/8. Различных серий (раскладок) будет ровно столько, сколько существует различных чисел длины N, т.е. $2^n$. Анализ ЗБЧ переходит в анализ структуры действительных чисел, и мы подходим к описанной во Введении задаче, поставленной Ламбертом: почему знаки иррационального числа случайны?

Первого результата здесь добился Борель, один из создателей современной ТВ, в классической работе "Счетные вероятности и их арифметические приложения" [Borel, 1909][*]. Вместо размышлений о случайности знаков конкретного числа (у Ламберта это был $\sqrt{3}$), Борель задумался о свойствах действительных чисел вообще.

Наличие какой-либо зависимости между последовательными знаками – ничтожно редкое исключение. Борель популярно разъяснил данное обстоятельство (на примере периодичности знаков в числах, записанных в десятичной системе счисления): "Если... мы пишем последовательно все десятичные знаки вправо от запятой, то для того, чтобы десятичная дробь была периодической, нужно, чтобы... произошло бесконечное множество благоприятных случаев; в силу принципа сложных вероятностей нужно получить произведение бесконечного множества дробей, меньших единицы, так что получается результат сколь угодно малый, т.е. нуль" [Борель, 1923, с. 138].

Важнейшим достижением Бореля в статье 1909 г. было то, что он не просто устремил N к бесконечности, т.е. исследовал потенциальную бесконечность, но и рассмотрел свойства бесконечных дробей (прежде всего двоичных), т.е. ввел в ТВ актуальную бесконечность (она была тогда уже изучена в теории множеств). Например, актуально бесконечно в двоичной системе счисления число 1/3 – в этой системе оно равно 0,0101010... (всякое число $0<x<1$, не являющееся суммой отрицательных степеней двойки, выражается в двоичной системе бесконечной двоичной дробью; если x рационально, то двоичная последовательность периодична, а если иррационально, то непериодична, т.е., в наших терминах, случайна по Ламберту.) При этом всякая особенность имеет нулевую долю или, точнее, *нулевую меру по Лебегу* – этот термин означает, что множество таких чисел на отрезке [0, 1] имеет нулевую суммарную длину. В частности, нулевую меру имеет множество рациональных чисел.

### *4-5.1. Третье обоснование теории вероятностей*

Если до Бореля было принято рассматривать либо вероятности конечного числа событий (типа бросаний монеты), либо непрерывные вероятности (типа попадания неточно измеренной величины в данный отрезок или квадрат), то Борель стал оперировать с бесконечными последовательностями цифр, т.е. со счетными множествами и, соответственно, со счетными вероятностями. При этом расплывчатое выражение "событие происходит с ничтожной вероятностью" уступило место точному термину "событие имеет нулевую вероятность",

[*]Счётным называется бесконечное множество наименьшей мощности. (Мощность – обобщение понятия числа элементов на бесконечные множества.) Счетными являются: множество натуральных чисел, множество рациональных чисел, множество алгебраических чисел (являющихся корнями квадратных, кубических и т.д. уравнений с целыми коэфициентами) и др. См. любое введение в теорию множеств, например [Шилов, 1960]. Счетная вероятность – дробь с бесконечным числом знаков после запятой.

понимаемому так: событие возможно, но его вероятность выражается нулевой мерой. Пример из области непрерывных вероятностей: шар может упасть на плоскость любой своей точкой, однако вероятность того, что он упадет любой заданной точкой, равна нулю.

Вернемся к упомянутому примеру Бореля из области счетных вероятностей: равна нулю вероятность того, что наугад взятая последовательность цифр периодична. Вообще, нулевую меру имеет любая особенность в структуре действительного числа и, в частности, такая: если значение m-ой цифры зависит от значения n-ой (m>n). Этот фундаментальный факт значит, что почти всякое(*) иррациональное (а значит, и почти всякое действительное) число случайно по Ламберту.

Другое столь же фундаментальное свойство, которое следует из того, что все последовательности взяты по одному разу, звучит так: почти всякое вещественное (в том числе рациональное) число имеет столько же нулей, сколько и единиц (Борель назвал такие числа "нормальными"). Его можно выразить иначе: вероятность того, что в двоичной дроби число нулей равно числу единиц, равна единице. Легко видеть, что это утверждение есть ЗБЧ для идеальной монеты, брошенной бесконечное число раз [Кац, 1963, с. 26-36; Ширяев, 1998, с. 112–113]. Вместе оба свойства означают *устойчивость частот*.

Она тут не постулирована, а выведена из свойств поля вещественных чисел. Этот фундаментальный результат есть следствие реализационной симметрии множества действительных чисел, т.е. того факта, что каждая запись взята ровно один раз. Иначе говоря, Борель истолковал меру как вероятность, продолжив линию Кардано – Бернулли, когда вместо случайных испытаний производится математическое действие, "демонстрирующее все формы". Вот третье **обоснование феномена вероятности**. Исторически оно явилось первым.

Борель фактически ответил на вопрос Ламберта: отсутствие "порядка сходства" между знаками иррационального числа есть наиболее общая симметрия, какая вообще мыслима среди чисел. Любая зависимость между знаками числа, даже самая на вид симметричная, являла бы собой более частную симметрию. Однако этот ответ чисто формален и практически бесполезен, пока не сказано, как устроено множество тех конкретных чисел, с которыми мы обычно имеем дело. А вдруг большинство интересных нам чисел как раз неслучайны по Ламберту? Ответ будет дан в п. 8.

### 4-6. Тройная симметрия

Симметрийный подход многое разъясняет и в отношении предельных теорем. Центральная предельная теорема (ЦПТ), рассмотренная в главе 3, гласит, что сумма независимых случайных величин (одинаковых или различных) в широких условиях сходится к одному-единственному распределению (гауссову).

(*) *Почти всякое* означает, что данное свойство может нарушаться лишь на множестве нулевой меры.

Точную формулировку см. например [Феллер, 1984, с. 301], нам же достаточно следующего: суммирование случайностей приводит к гауссову распределению, если выполнены три условия:

1) равновозможность (самих событий и их серий);
2) аддитивность (результирующая случайность есть сумма);
3) одномасштабность (дисперсии слагаемых равномерно ограниченны).

Вся тройка в целом достаточна для выполнения ЦПТ. Этой тройке условий ранее [Чайковский, 1988; 1990] было дано название **тройная симметрия**. Тройка достаточно разнородна – равновозможности событий можно придать точный симметрийный смысл, введя понятия микро- и макросостояний; равновозможности серий (независимости событий) можно придать точный смысл, введя новую форму симметрии – реализационную; аддитивности тоже можно придать точный смысл, но она существенна не сама по себе, а как единственный обследованный в ТВ пример действия, обладающего симметрией в форме коммутативности и ассоциативности – сложение им обладает:

$$a + b = b + a; (a + b) + c = a + (b + c);$$

что же касается одномасштабности, то она является симметрией лишь в некотором фигуральном смысле.

Столь же различна и их роль в отношении необходимости – одномасштабность для выполнения ЦПТ, грубо говоря, необходима (точнее см. ниже), тогда как аддитивность – не более чем один обследованный пример. Что касается равновозможности событий, то она (точнее, равновозможность микросостояний), по-видимому, необходима; наоборот, независимость (равновозможность серий) может нарушаться, но – в определенных пределах, о которых еще будет речь.

Предоставляя математикам принять (уточнив смысл) или отвергнуть высказанные положения, ограничусь несколькими соображениями, которые призваны прояснить суть тройной симметрии и облегчить переход к случайностям, ее не имеющим.

1. Рассмотренные в главе 3 примеры действия ЦПТ показывают, насколько важна обычная наглядная симметрия: равномерная плотность симметрична, и ЦПТ весьма эффективна – сумму уже трех слагаемых можно заменить нормальной плотностью; наоборот, плотность хи-квадрат радикально асимметрична, и сходимость чисто номинальна. В промежуточных случаях, когда асимметрия не столь радикальна (*диссимметрия*) эффективность ЦПТ тоже промежуточна: таковы пуассоново, логнормальное и другие скошенные и смещенные колоколообразные плотности.

2. Читая учебник Уиттла, довольно легко понять, что тройная симметрия перемалывает любую совокупность случайностей, ею обладающую, в одну – гауссову, самую симметричную. Можно пойти и дальше: признать, что всякая устойчивость частот есть разновидность симметрии [Марков В.А., 1988, с. 50].

3. Просчет Мизеса состоял в отказе от симметрийного подхода. Постулировав беспорядочность, он отверг симметрию, ибо полагал эти идеи противоположными. По-моему же, они *взаимодополнительны* (в том смысле, какой придавал этому термину Нильс Бор – см. п. 5-7): симметрийное понимание вероятности (как инварианта структуры равновозможностей) взаимодополнительно к пониманию вероятности как предела частоты. Подробнее см. конец главы 5.

4. И само нормальное распределение, и его двухсотлетний успех выглядят загадочно. Как признал сто лет назад Пуанкаре [1999, с. 140], нормальное распределение не имеет строгого вывода, а сделанные самим Гауссом при его выводе допущения не только грубы, но и прямо нарушаются. Тем не менее "все верят в этот закон. Как мне однажды сказал П. Липпманн, потому что экспериментаторы думают, что это математическое утверждение, а математики – что это результат эксперимента". Яркость афоризма за сто лет не потускнела, но загадочность закона несколько поубавилась – чем менее симметрична ситуация, тем хуже он действует. Слова "менее симметричная ситуация" означают уменьшение роли составляющих тройной симметрии в исследуемом случайном явлении. Поясню этот тезис примерами.

5. Самые легкие примеры касаются условия равномерной ограниченности дисперсии случайных слагаемых, поскольку оно, грубо говоря, необходимо (точнее см. [Феллер, 1984, с. 299, 301; Стоянов, 1999, с. 180], где показано, что "условие Линдеберга", ограничивающее дисперсию случайной величины и обычно называемое необходимым и достаточным, не всегда является необходимым). Даже у распределения с плотностью f(x), для которого сама ЦПТ грубым образом не выполняется, может иметься какая-то характеристика g(x), сходящаяся к нормальному распределению, если и f, и g симметричны. Таково *распределение Коши*

$$F(x) = 1/2 + (1/\pi) \operatorname{arctg} x,$$

имеющее плотность: $F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$,

у которого ЦПТ выполнена для *медианы*, т.е. для x, задаваемого уравнением F(x)=1/2. Очевидно, что у распределения с симметричной плотностью медиана совпадает со средним значением плотности, а это и есть та величина, которую обычно хотят найти.

Плотность Коши имеет, как и гауссоида, колоколообразную форму, однако убывает с ростом x так медленно, что бесконечны не только дисперсия, но и мат. ожидание. Распределение Коши естественным образом возникает в астрономических расчетах, поскольку ему подчиняется случайная величина x=tg h, где угол h распределен равномерно между $-\pi/2$ и $+\pi/2$. Тем самым, на границах области определения величины h переменная x неограниченна. Ввиду бесконечности мат. ожидания тут среднее от любого числа измерений величины x оказывается не точнее, чем единичное измерение. Это значит, что грубо нарушен даже ЗБЧ, не говоря уж о ЦПТ. Вроде бы статистика бессильна, но спасает симметрия распределения: зная, что случайная величина ***X*** распределена по Коши, нужно не суммировать сами x, а вычислять F(x) для каждого x по формуле, определяющей функцию распределения:

$$F(x) = P(y<x),$$

где y – измеряемые величины (в данном случае тангенсы), а затем решить уравнение F(x) = 1/2 и тем самым вычислить *выборочную* медиану для данного x. Нормированная сумма выборочных медиан для различных случайных значений x, распределенных по Коши, сходится к нормальному распределению [Варден, 1960, с. 107].

6. В качестве примера нарушения условия аддитивности в главе 3 приведено распределение хи-квадрат: если складывать не сами случайные величины, а их квадраты, то ЦПТ хоть и плохо, но выполняется (рис. 3). Другой пример: случайные величины, распределенные нормально, можно перемножать, т.е. складывать их логарифмы – получится логнормальное распределение, для которого ЦПТ тоже справедлива. Это – единственный известный мне пример, когда тройная симметрия достигается за счет не сложения, а другого симметричного действия над случайными величинами (умножения – оно тоже обладает коммутативностью и ассоциативностью).

7. Наоборот, ЦПТ может нарушаться даже для очень "хороших" распределений, если только равномерная ограниченность слагаемых нарушена достаточно сильно. Самый для меня удивительный пример (из простых) – сумма равномерно распределенных величин, определенных на различных интервалах. Казалось бы, пример на рис. 2 должен быть достаточно устойчив к вариациям, однако стоит достаточно быстро устремить длину n-го интервала к нулю (т.е. случайные величины – к детерминированному пределу), и сходимость суммы n слагаемых к нормальному распределению исчезает [Феллер, 1984, с. 303]. Здесь оказывается слишком велика роль первых слагаемых по сравнению с последующими.

Противоположный случай (когда длины интервалов растут – приведен там же) менее удивителен. Вся его удивительность состотит в том, насколько быстро должна расти длина n-го интервала (как $2^N$), чтобы ЦПТ перестала выполняться. Это говорит о большом запасе ее прочности.

Другой пример, когда экспоненциальное расширение области определения случайной величины разрушает саму стохастичность, мы рассмотрим а п. 7-1.

### 4-7. Неустойчивость частот как нарушение тройной симметрии

Если тройная симметрия гарантирует выполнение ЦПТ, а та гарантирует выполнение ЗБЧ (приближение частоты к вероятности), то и отсутствие вероятности, понимаемой как устойчивая частота, естественно искать в тех явлениях, где тройная симметрия нарушена. В ТВ уделяется много внимания независимости событий (т.е. равновозможности серий событий), но не анализируется равновозможность самих событий (исходов), а она-то как раз часто нарушается.

Как уже говорилось в главе 2, в 1662 г. Граунт начал обсуждение феномена устойчивости частот. Этим открытием сразу же воспользовались многие отрасли знания, однако математическое осмысление этого феномена началось всерьез лишь через двести лет, когда немецкий статистик Вильгельм Лексис в 1879 году сформулировал само понятие устойчивости частоты. Он связал его с величиной дисперсии случайной величины: чем выше относительная дисперсия, тем ниже устойчивость. В качестве распределения со стандартной устойчивостью было взято нормальное (гауссово) распределение [О теории..., 1968].

Но вопрос о том, возможна ли частота, совсем неустойчивая, еще не был тогда поставлен – предметом интереса были лишь конечные выборки, а потому считалось, что бесконечные дисперсии интереса не представляют. Данная позиция очень слаба – всем известно, что достаточно большие числа часто оказывается не только удобнее, но и содержательнее рассматривать как бесконечные. В наше время в рамках ТВ изучено много распределений с бесконечными дисперсиями, и пора понять их место.

Например: для распределения Коши не имеет места ЗБЧ, точнее, "с помощью осреднения вообще нельзя добиться повышения точности" [Варден, 1960, с. 107]; при нем "средние не накапливаются вокруг нуля, как можно было бы предположить по аналогии с законом больших чисел" [Феллер, 1984, с. 67]. Однако нам надо понять большее – можно ли здесь вообще говорить о вероятности или мы должны оставить ТВ и вступить в какой-то новый раздел алеатики?

Назовем последовательность случайных величин **неустойчивой по Лексису**, если в ней относительные дисперсии не стремятся к конечному пределу. Такие величины будут рассмотрены в части 2, а здесь ограничимся одним примером, иллюстрирующим нарушение тройной симметрии и, как следствие, приводящим к неустойчивой частоте.

### *4-7.1. Пример неустойчивой частоты: ветвящийся процесс*

Кость, сколько ее ни бросай, всегда упадет на одну из своих граней, так что равновозможность исходов (при надлежащем введении элементарного события, или, что почти то же, числа граней t – см. гл. 3) гарантирована. Однако хорошо известны процессы, в которых надо как бы бросать новую кость на каждом шагу процесса, причем число t неограниченно растет. Таковы, например, ветвящиеся процессы. Все дальнейшие математические сведения о них можно найти в главе 1 книги [Харрис, 1966], если не указан иной источник.

Простейшим ветвящимся процессом является *процесс рождения и гибели*. Пусть на чашку с питательной средой помещена одна-единственная бактерия и пусть за час она либо погибнет, либо поделится на две точно такие же. *Клон* (бесполое потомство единственной особи) бактерий может расти или уменьшаться, но множество возможных значений численности всегда растет экспоненциально: через Т часов на чашке может оказаться от нуля до $2^Т$ бактерий. Новое случайное событие (число бактерий в момент Т+1) можно представить как исход бросания $2^Т$-гранной кости. В этих условиях ЗБЧ формально выполняется для каждого поколения, но с каждым поколением – всё хуже и хуже, так что фактически им пользоваться нельзя.

В таких условиях средняя численность клона не несет привычного нам смысла, поскольку реальная численность почти всегда очень далека от него: в большинстве опытов она быстро окажется равной нулю, зато в немногих опытах она будет гораздо выше средней. Суммирование по нереально огромному числу чашек приведет к вычисленной средней величине, но она тем самым неинформативна.

Формально нестохастичность растущего клона выражается в том, что с ростом Т дисперсия численности растет быстрее, чем сама численность, т.е. относительная дисперсия стремится не к нулю, а к бесконечности. Следовательно, здесь сразу видно, что численность растущего клона является в каждом поколении величиной, неустойчивой по Лексису. Однако пределы возможного изменения случайной величины (численности в данном поколении) одинаковы для растущего и для вымирающего клонов ($2^Т$ особей). Это наводит на мысль, что в каком-то смысле неустойчив и вымирающий клон (хотя у него и численность, и ее дисперсия стремятся к нулю), и оказывается верно – см. п. 9-7.1. Но если полные средние и дисперсии неинформативны, то нужно исследовать иные величины.

Вычисление предельных значений либо невозможно, либо неинтересно, однако вполне возможен и интересен анализ текущих условных численностей, т.е. численностей, найденных в предположении, что факт неутраты данного клона до данного поколения известен. Этот анализ, как мы увидим в п. 7-5, приводит к неожиданным для обычной статистики результатам и, в частности, заставляет полностью пересмотреть выводы статистической теории эволюции (п. 9-7).

### 4-8. Вероятность реальных событий и конструктивность

Нам надо закончить сопоставление различных вероятностных явлений, чтобы связать три обоснования феномена вероятности и тем хоть приблизительно обозначить границы вероятностного мира внутри мира алеатики. Как отметил методолог В.А. Марков, "теория вероятностей построена на некоторых неэксплицированных принципах симметро-инвариантности (однородность случайных событий; инвариантность вероятностных характеристик стационарных случайных функций относительно сдвигов во времени и т.п.)" [Бирюков и др., 1982, с. 12]. В справедливости данной мысли мы не раз убеждались, а значит, выявление указанных границ требует уточнения этой "симметро-инвариантности".

Мы видели в п. 4, что устойчивость частот зиждется на симметрии поля вещественных чисел, но следует ли из симметрии всего этого поля симметрия тех его подмножеств, с которыми мы фактически имеем дело? Ведь обычно мы имеем дело с рациональными числами, а они составляют нулевую часть ото всех вещественных. И наоборот – всегда ли мы пользуемся в качестве вероятностей числами из вещественного поля? (В п. 2-9 говорилось о гипервещественных вероятностях.)

Откладывая обсуждение этого вопроса в целом до главы 6, где будет речь о мощностях множеств, замечу здесь одно: множество *конструктивных чисел* (конструктивным называется число, для вычисления которого в принципе существует алгоритм, быть может нам неизвестный), тоже счетно (поскольку число различных алгоритмов конечной длины N конечно, а потому число всех алгоритмов – т.е. при счетном N – счетно) и тоже симметрично по Борелю. Точнее, для них известна теорема Мартин-Лёфа (1965 г.): свойство статистической независимости знаков (случайность по Ламберту) справедливо для почти всех конструктивных чисел.

Как точную формулировку самой теоремы, так и смысл слов "почти все" для множества конструктивных чисел см. [Успенский, Семенов, 1987, с. 183, 210]. Для тех, кто хочет узнать о случайности знаков действительных чисел больше, рекомендую эту книгу – там регулярность случайности (стохастичность) изложена как обоснование ТВ. Другое обоснование дает, как мы видели в п. 3, теория динамического хаоса. Там стохастичность тоже, в конечном счете, исходит из результата Бореля, который изложен в п. 5 как третье обоснование вероятности. Итак, все три обоснования основаны на симметрии поля вещественных чисел – вот главный итог данной главы.

Тем самым, монета, а также игральная кость, *независимо от правильности их внешних форм,* падает на каждую свою сторону с устойчивой частотой потому, что наш мир симметричен – столь же симметричен, как мир вещественных чисел. Или, кому так нагляднее: потому, что метрика нашего мира описывается вещественными числами, симметричными по Борелю. И в том, что оба вопроса (об игральной кости и о знаках числа) надо решать вместе, Ламберт оказался прав.

Недостаток обоснования ТВ, даваемого теорией алгоритмов, состоит в том, что оно касается исключительно вопросов бросания монеты, и неясно даже, какие из его положений верны для t-гранной кости, не говоря уж о более сложных случайностях. (Мелькающее иногда в литературе заявление, что любой случайный процесс можно представить достаточно длинной серией бросаний идеальной монеты, практической ценности не представляет.) Словом, алгоритмическое обоснование узко.

Однако оно имеет глубокий смысл – оно аналогично обоснованию второго принципа термодинамики, выводимому из уравнений движения лишь для одноатомного идеального газа. Оно имеет большое познавательное значение, поскольку позволяет проникнуть в феномен случайности глубже, чем способна обычная ТВ.

А именно, если в обычной ТВ феномен случайности учтен только понятием независимости (см. п. 3-3.1), то в алгоритмической ТВ он исследуется по существу: псевдослучайный ряд чисел тем более случаен, чем меньше "дефект случайности", т.е. разность между длиной ряда и длиной выражающего этот ряд правила [Шень, 1992, с. 128]. Тем самым, если в обычной ТВ единственная возможность как-то описать ограничение случайности событий – это ввести условные вероятности, выражающие зависимость между случайными величинами (мы не касаемся здесь случайных про-цессов), то алгоритмическая ТВ дает более тонкий инструмент: случайность можно вводить по-разному и выяснять, какие теоремы ТВ для каких случайностей верны. (Условная вероятность выступает при этом всего лишь как частный прием ограничения случайности испытаний [Шень, 1992, с. 130].) Например, доказано, что ЗБЧ справедлив для более широкого круга псевдослучайностей, нежели закон повторного логарифма, требующий меньшего дефекта случайности [Вовк, 1987; Шень, 1992, с. 128].

Уже сейчас можно и, по-моему, нужно начинать учебник ТВ с того утверждения, что среди массовых случайных явлений существует класс вероятностных. Учебников таких мне не попадалось, но в популярной книге [Ruelle, 1991] сделано именно так. См. Добавление 3.

Вполне верные фразы типа "Понятия теории вероятностей применимы не ко всем экспериментам с неопределенным исходом" [Тутубалин, 1992, с. 10] пропадают без пользы, пока не пояснены примерами применимости (рулетка Пуанкаре, строение вещественного числа) и хотя бы одним примером неприменимости, т.е. нестохастичности (один мы видели выше, в п. 7, другие увидим далее, в части 2). Пояснение может быть более или менее подробным и строгим – в зависимости от круга предполагаемых читателей учебника.

Нам же пора приступить к эскизу алеатики как целого, а для этого надо сперва обрисовать место алеатики в различных картинах мира.

# ЧАСТЬ ВТОРАЯ. НЫНЕШНИЕ ПРОБЛЕМЫ АЛЕАТИКИ

## Глава 5. Алеатика и познавательные модели

### 5-1. Картины мира и познавательные модели

Своя картина мира может быть у любого достаточно яркого ученого. Как заметила Е.А. Мамчур (ссылаясь на М. Хайдеггера), картина мира – феномен Нового времени, когда знание природы приобрело "образность" [Мамчур, 1999, с. 35]. Так, вероятно, в целом и есть, но личности, опережавшие эпоху, демонстрировали свои картины мира и в годы Возрождения. Например, Парацельс, знаменитый натурфилософ Возрождения, сравнивал мир с аптекой, где Бог – провизор. Примерно тогда же (середина XVI в.) Кардано явил современникам картину мира (по сути пифагорейскую), в которой правят числа, причем числа, не вполне понятные людям (он, например, помещал бухгалтерию между наукой и черной магией).

Затем (1600 г.) Вильям Гильберт увидел суть вещей и "мировую душу" в магнетизме, вскоре материалисты Нового времени увидели мир как неохватно сложный часовой механизм. В том же XVII веке мир стали уподоблять финансовому балансу; затем мир вообще и организм в частности воображали как фабрику. По мере прогресса математики ученые представляли мир то совокупностью чисел (пифагореизм), то системой геометрических фигур и тел (платонизм), то системой дифференциальных уравнений (лапласов детерминизм), то сетью компьютеров. В наше время всюду открывают фракталы, и далее мы увидим, что это весьма полезно. Творец фракталов Бенуа Мандельброт говорит о фрактальном взгляде на мир. Однако лишь немногие картины мира переживают своих создателей – это происходит только тогда, когда они становятся достоянием общественной мысли. Это «достояние» надо как-то выразить.

У Парацельса была химическая картина мира, у Декарта – механическая, но первая осталась уделом горстки парацельсовцев, а вторая завладела эпохой, т.е. стала социальным явлением. Поэтому можно говорить о механической познавательной модели, но не о химической или магнитной. А куда поместить карданову картину мира?

Будем понимать каждую **познавательную модель** (ПМ) как набор приемов и утверждений, которые данному ученому (ученым) настолько наглядны и самоочевидны, что через них принято объяснять (к ним сводить, ими моделировать) все остальные факты и понятия. Тем самым, ПМ – явление социальное по определению. Понятие ПМ ввел в 1980 г. науковед А.П. Огурцов, видящий ПМ как "базисную метафору". Подробнее о ПМ см. [Чайковский, 1992,1996]. В любой исторический момент в обществе обычно господствует одна ПМ (иногда две), формирующая научную парадигму в каждом разделе знания, а другие оппозиционны ей. Хотя каждая ПМ удобна для описания лишь какого-то круга явлений, однако на практике ведущая модель привлекается для объяснения всего на свете, и это часто делает познание односторонним, ущербным. Именно поэтому различные ПМ полезно выявлять.

Эволюция рациональной европейской науки достаточно наглядно (пусть и грубо) представляется мне в терминах последовательной смены господствующих ПМ, которые далее будут перечислены. В картине мира данного мыслителя могут сочетаться мысли, характерные для разных ПМ; так, Ренэ Декарт видел в природе, кроме механизма, первичный хаос – это из статистической ПМ, которая утвердилась в науке позже механической и позже Декарта.

Не следует думать, что наука движется только спорами нового со старым: не менее важны споры между одновременными учениями – по сути, это борьба картин мира за право стать познавательными моделями. И в этой борьбе роль побежденных вполне почтенна: они заставляют победителей очерчивать границы завоеванной области и тем как уточняют свою ПМ, так и закладывают основы будущих ПМ. С другой стороны, можно указать на долгоживущие картины мира, столетиями не становящиеся общим достоянием, но затем все-таки ложащиеся в основу очередной ПМ. В качестве примера напомню организмическую картину мира: еще Платон уподоблял мир организму, и в этом можно видеть намек на нынешнюю системную ПМ, о которой пойдет речь далее. Можно лишь гадать, какие из нынешних картин мира войдут в будущие ПМ, но можно не сомневаться – без их влияния новые ПМ не возникнут.

В настоящее время складывается синергетическая картина мира, видящая в мире прежде всего самоорганизацию [Синергетическая..., 2000; Хайтун, 1999]. Этой картине мира, которая видит целостность мира достаточно жесткой, начинает противостоять ценотическая картина мира (в основном, это *технетика* – концепция, созданная Б.И. Кудриным – см. гл. 9), видящая мир как целостность довольно рыхлую, выявляемую лишь на больших масштабах времени и пространства (в том числе фазового), но ничуть не менее существенную. Если синергетика вольно или невольно моделирует мир организмом, то технетика – биоценозом, т.е. той целостностью, которая лишь в XX веке замечена. Как увидим, и синергетика, и технетика тесно связаны с алеатикой.

### *5-1.1. Вокруг познавательных моделей*

Понятие ПМ, сормулированное Огурцовым в 1980 г., было ориентировано на классическую методологию школы Поппера. Важное достижение Огурцова состояло в понимании того, что следует говорить о ПМ данной эпохи в целом, поскольку обычно ПМ заимствуются в естественные науки из наук общественных и из техники. Насколько я понимаю мысль Огурцова, ПМ отличается от парадигмы по Куну, исследовательской программы по Лакатошу и темы по Холтону своей всепроникающей междисциплинарностью (выходящей даже за рамки науки как целого), привязанностью к определенной эпохе и количеством самих ПМ (их, в отличие от программ и тем, всегда немного, но, в отличие от парадигмы, всегда больше одной).

А именно, парадигмой Томас Кун называл господствующую в данной отрасли точку зрения, претендующую на единственность, тогда как всякая ПМ охватывает науку в целом и конкурирует с другими ПМ. В отличие от парадигмы, ПМ может даже не осознаваться сообществом: так, статистическая ПМ традиционно воспринимается в рамках механистической картины мира, и мне известен всего один автор, явным образом противоположивший "гиббсово мышление" (т.е. статистическую физику) "ньютонову мышлению" – это социолог и финансист Жак Аттали [Attali, 1986, с. 17].

Так же конкурируют друг с другом и уходят вместе с эпохой исследовательские программы Имре Лакатоша, но каждая может включать в себя идеи двух ПМ (так, теория газов Максвелла – Больцмана была сразу и механической, и статистической); кроме того, Лакатош подчеркивал *интернализм* исследовательских программ т.е. уверенность в их самостоятельном развитии, не обусловленном общественным сознанием [Лакатос, 1995]. Наоборот, ПМ – по определению явление социальное. Наконец, различных ПМ я смог насчитать всего 7 (вместе с нулевой, донаучной, и гипотетической шестой), и вряд ли их найдется еще столько же. В то же время разных тем Джералд Холтон насчитывал десятки в одной лишь физике, и они могут переходить из эпохи в эпоху неограниченно долго.

Развитие науки то и дело возвращает нас к одним и тем же сквозным темам, проходящим, согласно Холтону [1981], через всю историю науки. Когда данная тема (например: атом, эволюция, случайность, рынок) вписывается в актуальную исследовательскую программу, она привлекает всеобщее внимание и облачается в покровы из новых фактов, но ее концептуальный базис никогда не бывает абсолютно нов. Поэтому анализ новой теории всегда требует знания истории. По Лакатошу, "только последовательность теорий, а не отдельные теории могут квалифицироваться как научные" [Лакатос, 1995, с. 70]. Словом, ПМ выступает как *макротема*, ориентированная на стиль и запросы данного социума в данное время.

Само по себе понятие ПМ, как видим, не связано с идеей случайности. В данной книге ПМ использованы для уяснения связи разных пониманий случайности с идеями соответствующих эпох. В этом плане важны мысли книги Хакинга "Представление и вмешательство", появившейся в 1983 году. Хотя основной пафос книги, признаваемый им до сих пор, далек от темы случайности: "эксперименты ведут свою собственную, отличную от теории, жизнь" [Хакинг, 1998, с. 289-290], зато он вплотную подошел к идее ПМ: "по Лакатошу, рациональность просто определяется тем, что современное общество называет хорошим"; и далее, "историк Э.К. Кромби, у которого я позаимствовал слово *стиль*, пишет о шести различимых стилях... Предполагая худшее, я подозреваю, что стиль рассуждения может определять саму природу знания, которое он порождает" [Хакинг, 1998, с. 138, 139].

Вскоре философ Ю.В. Сачков развил примерно ту же мысль прямо в отношении случайности и ПМ: по его мнению, "обратное воздействие разработки нового класса теорий на научный метод столь значительно, что стали говорить об изменениях в стиле научного мышления"; например, очевидны такие стили: "основанный на принципе жесткой детерминации и статистический, вероятностный" [Сачков, 1985, с. 21]. Как увидим далее, этот ход мысли прямо приводит к понятию ПМ. Освоив его, легко будет, между прочим, увидеть, в каком споре истина никогда не рождается: в споре приверженцев разных ПМ, если они берутся обсуждать основания наук, не сознавая различия своих позиций.

Из новейших публикаций, близких к теме ПМ, отмечу книгу философа В.М. Розина, который пишет в ее заключении: "Одним образом понятие природы задавалось в античной культуре: там это были просто знания, непротиворечиво описывающие всевозможные изменения. Другим образом – в Средние века, где различалась природа, сотворенная Богом... и природа для человека. Третьим образом понятие природы задается в XVII–XVIII веках – это наше физикалистское понимание природы". Там же Розин уточнил, что "наше понимание" бывает естественнонаучным и гуманитарным, что "реальность многослойна и множественна" [Розин, 2000, с. 141]. Как увидим, концепция ПМ исходит из аналогичных посылок.

Каждая ПМ принадлежит своей эпохе – вот почему в этой книге о нынешних проблемах так много истории. Как писал А.А. Любищев, зоолог и философ, "Прошлое науки не кладбище с надгробными плитами над навеки похороненными идеями, а собрание недостроенных архитектурных ансамблей, многие из которых не были закончены не из-за несовершенства замысла, а из-за технической и экономической несвоевременности" [Любищев, 1982, с. 217]. Добавлю: а также в силу излишней самоуверенности авторов. Здание алеатики тоже не раз бросали недостроенным.

Однако, насколько знаю, пути назад в истории не бывает. Как сейчас увидим, Кардано и Бернулли мыслили в рамках одной ПМ, а мы – в иных, и потому прямо заимствовать у них теорию нельзя.

### 5-2. Какие бывают познавательные модели

До рождения европейской науки в обществе царило не оформленное логически почитание природы как благого или как злобного начала. Это почитание удобно описать как господство **нулевой** (донаучной) ПМ, которую можно назвать *этико-эстетической* (религиозной) моделью. В ее рамках мир (природа и общество) понимался как храм. Считать ее нулевой следует еще и потому, что она характеризует тот эмоциональный тип восприятия, который нельзя, строго говоря, отнести к познанию.

Огурцов ввел две ПМ – *семиотическую* и *механическую*, основные при рождении европейской науки. Семиотическая (*знаковая*) ПМ – такой тип описания знания, при котором мир выступает как текст, а познание – как чтение, расшифровка. Эта модель исторически была исходной для европейской науки, **первой** научной – ею пользовались Высокое средневековье и Возрождение, когда познание понималось как разгадывание замысла Творца. С нею в науку вошли понятие закона природы и идея математизации науки. Хотя нынешняя наука, в общем-то, отошла от знаковой трактовки знания, таковая всё еще присутствует в ней в форме *семиотики* – учения о знаках и знаковых системах. С моей точки зрения, у семиотики нет своего предмета – она является лишь аспектом рассмотрения. Как мы увидим, иногда он удобен и потому полезен, но и только.

Первая ПМ характерна для начальных стадий формирования научных дисциплин. Знаковая модель безраздельно господствовала в ранней генетике, где и сейчас термин "генетический текст" является одним из главных, хотя мы уже видим, что представление генетической информации как линейной и знаковой чересчур упрощено. То же могу сказать о тезисе: "Итак, личность – это прежде всего интерпретирующий себя самого текст" [Налимов, 1989, с. 204]: это попытка формализовать ранее не формализованную область знания, когда модельный характер формализации еще не осознан.

**Вторая** (механическая) ПМ сменила в XVI-XVII веках знаковую. Она строит систему мира как механизм, как автомат. В ее рамках утвердились принцип причинности и идея эволюции (точнее, прогресса – как социального, так и биологического). До сих пор мы говорим "понять механизм явления", хотя бы явление было вовсе не механическим. Идея целостности занимает мало места в данной модели, но всё же присутствует: каждый объект определяется, как деталь, своим местом в целом механизме.

В XIX веке вторая ПМ обогатилась идеей устойчивости движения – стали считать реально интересными лишь те движения, которые при малых возмущениях не приводят к большим различиям в результатах. Ныне же основной интерес представляют как раз неустойчивые движения, а их невозможно описать без обращения к случайности.

Дальнейшее развитие рациональной европейской науки связано, на мой взгляд, с тремя ПМ – *статистической*, *системной* и *диатропической*. Вся пятерка сменяющих друг друга научных моделей грубо, но в общем, по-моему, верно описывает процесс европейского научного познания как социальное явление, характерное для ушедшего тысячелетия.

**Третья** (статистическая) ПМ видит мир как совокупность балансов, средних и инвариантов. С нею в науку вошли такие понятия, как закон сохранения, торговый баланс, баланс природы, однородное и изотропное пространство, процент. Возникла она впараллель со знаковой: впервые понятие баланса родилось в бухгалтерии XV века, оттуда идет традиция видеть государство и природу как исконно сбалансированные Богом (прообраз идей равновесия властей и экологии) и приводить доли к единой форме – процентной. Однако эта ПМ завоевала науку лишь в XVIII-XIX веках; она до сих пор занимает в науке центральное положение, и в ее терминах принято трактовать всё, что связано со случайностью.

Отличие данной ПМ от механической часто ускользает от внимания, поэтому поясню: если мы взвешиваем объект исследования на чашечных весах, то уравниваем стрелку весов, кладя на другую чашу весов гири в нужном составе, то это – механическая процедура; если же мы уравниваем сотню образцов килограммовой гирей и ограничиваемся этим (запоминая лишь, что средний вес образца равен 10 г), то это – статистическая процедура. Подробнее о третьей ПМ будет рассказано в п. 3.

**Четвертая** (системная) ПМ видит во всем целостность, уподобляет мир организму. С нею в науку вошли идея оптимальности (экстремальные принципы) и идея самоорганизации. В мировоззрение ученых эта ПМ входит в настоящее время, хотя отдельные ее положения утвердились давно (например, принцип наименьшего действия).

Несмотря на свои очевидные достоинства, системная ПМ несет в себе радикальный изъян – уверенность в наличии единственно правильного решения едва ли не каждой задачи о поведении систем. Неоднозначность решения сложных задач не отрицается, однако явно или неявно считается, что среди них можно выбрать лучшее.

**Пятая** (диатропическая, от греч. *диатропос* – разнообразный) ПМ едва нарождается как социальное явление, но мне представляется, что она станет ведущей ПМ начала XXI века. Она видит в мире прежде всего разнообразие, видит природу как сад или как ярмарку (а не как огород или рынок, которые лишены эстетического элемента), она моделирует природу обществом или иной совокупностью, в которой ни один элемент не обязателен, но в которой некоторая трудно уловимая целостность (часто – не функциональная, а эстетическая) есть. Нетрудно видеть, что ценотическая картина мира Кудрина, упомянутая в п. 1, тяготеет, несмотря на системный язык, к пятой ПМ. К ней же близко представление Аттали о «множественном порядке»(polyordre) [Attali, 1986, с. 357], которое можно назвать социальной диатропикой.

Разнообразие имеет свои собственные законы, достаточно общие и существенные, но не формальные и не строго однозначные. Поэтому, несмотря на общую упорядоченность, фундаментальную роль в нем обычно играет случайность; но это – не та случайность, что в ТВ, о чем скажем позже.

Хотя признание обществом важной, а порой и ведущей, роли разнообразия уже состоялось, переход науки на диатропический способ мыслить затягивается, и конца этому пока не видно. Одна из причин видится в том, что тут требуется переход от западного способа мыслить к восточному. "На Западе сознательная точка зрения выносит произвольный приговор против бессознательного, и тогда все, что идет изнутри, расценивается в силу предубеждения как *inferior* (низшее – Ю.Ч.) или не совсем правильное" [Юнг, 1994, с. 115]. Другими словами, системная (оптимизационная) позиция для европейского ума естественна. Наоборот, для психолога Карла Юнга "психологически верным представляется восточное утверждение о том, что Мировой дух не имеет формы, *арупалока*, и в то же время является местом возникновения всех форм. Эти формы бессознательного не принадлежат никакому определенному времени, т.е., очевидно, вечны" [там же, с. 117].

Добавлю, что приближением к такому образу мыслей было понятие Платона "*мир идей*", однако одного его недостаточно. Надо добавить еще чисто диатропическое утверждение (кстати, характерное для индийских мифов), что абсолютной правоты, а с тем и единственно правильного (высшего) решения, обычно не существует.

Именно таков, на мой взгляд, статус случайности – ни единой сущности ее, ни единого взгляда на нее искать нет смысла. Поэтому и математика, пригодная для изучения случайности, не должна сводиться к какой-то одной, пусть и очень развитой, концепции, а должна быть диатропической. В целом такой подход математике чужд, однако бывают исключения: "По-видимому, разумно принимать *принцип множественности моделей* и считать, что действительность описывается сразу целой совокупностью математических моделей, частично противоречащих друг другу" [Успенский, 1987, с. 119]. Таким описанием и следует заняться.

ПМ изучены далеко не одинаково. Первую и вторую описал Огурцов (литературу см. [Чайковский, 1996]), мною частично опубликовано [Чайковский, 1985; 1987; 1989; 1990; 1993; 1994; 1996а] исследование третьей ПМ. Книгу [Чайковский, 1990] можно рассматривать как описание пятой ПМ, а остальные ПМ еще ждут исследователя. Перечисленные шесть ПМ представляются мне набором, достаточным для анализа социальной истории европейской науки.

Каждая ПМ заимствует у предыдущей много черт, и потому их часто путают; столь же характерно и более интересно сходство (но в других отношениях) моделей одинаковой чётности; **чётные** модели (начиная с нулевой) тяготеют к *целостному* знанию (особенно четвёртая, системная), а **нечётные** – к расчленяющему, *элементному* знанию (особенно третья, статистическая). Если от одной чётной модели к другой человеку перейти довольно легко, то от чётной к нечётной и обратно – отнюдь.

Поэтому, например, многие учёные берут аргументы равным образом из арсенала семиотики и статистики. Вот, кстати, почему дарвинизм из всего арсенала науки XX века всерьез использовал только созданную в начале века формальную генетику, а не новые, гораздо более содержательные системные представления новой генетики.

В наше время третья ПМ повсюду уступает место четвёртой, а это значит, что обе имеют достаточно много приверженцев, чем и объясняется нескончаемый спор вокруг дарвинизма и рынка (см. след. параграф). Факт смены ПМ хорошо виден хотя бы в том, что аргументы, прежде не привлекавшие внимания, вдруг попадают в центр дискуссии.

Системная ПМ тоже имеет изъяны. Их пытается исправить диатропический подход, но он еще не завоевал статуса познавательной модели. Диатропическая картина мира (одним из инструментов которой является теория фракталов), явственно заявившая о себе в конце XX века, претендует на общественное внимание, но еще не завладела им. Поскольку, по всей видимости, одна ПМ может сменять другую только в определенном порядке, сейчас важно верно описать пятую ПМ и ее место в нашем мире. Однако различные ПМ способны сосуществовать веками, а это значит, что неплохо бы хоть как-то охарактеризовать и ту ПМ, которая может последовать за нею.

### *5-2.1. Контур будущей ПМ*

В 1994 г. методолог Н.Ф. Овчинников высказал мне устно мысль о том, что зародыш еще одной (шестой научной) ПМ можно видеть в *концепции предрасположенности* Карла Поппера. Хотя тут еще нельзя всерьез говорить о социальном явлении (каковым по определению является ПМ), однако мысль Овчинникова интересна, и параллели со взглядами других ученых просматриваются.

В отличие от Овчинникова, композитор и методолог А.А. Кобляков полагает главным свойством, которое призвана отразить будущая ПМ, феномен творчества: "Какая же должна быть новая ... познавательная модель, включающая субъекта и связанную с ним категорию *смысл*? ... Какой же вид деятельности наиболее полно репрезентирует *интуитивное*? Конечно, творчество!" Кобляков уверен в огромной эвристичности будущей ПМ: "Только рефлектируя наш внутренний мир, где мы – творцы, мы поймем наконец финитные закономерности мира внешнего, где мы – наблюдатели" [Синергетическая..., 2000, с. 309-310].

Тут уместно напомнить, что еще в 1907 г. французский философ-эволюционист Анри Бергсон полагал феномен творчества главным в эволюции [Бергсон, 1998], т.е. допускал его наличие вне сознания, в природе. Тем самым, можно предполагать появление *креативной* ПМ.

Эти смутные намеки не претендуют пока даже на то, что называется картиной мира. Тем более нет на сегодня оснований формулировать будущую ПМ, но мне показалось интересным включить ее в список в порядке некоего прогноза. Как мы увидим в главах 7 и 8, анализ случайности уже сейчас выходит за рамки известных ПМ, причем некоторые формы случайности проявляют черты как пропенсивности, так и креативности. В будущем возможно всякое, и мне остается напомнить – шестая ПМ, как всякая четная, должна тяготеть к целостности, поэтому творчество более годится для главной ее черты, чем пропенсивность, которая скорее окажется одним из атрибутов творчества.

Словом, можно говорить о креативно-пропенсивной картине мира и допускать появление в будущем **шестой** научной (креативно-пропенсивной) ПМ. Свойства ее должны вытекать из желания видеть мир как систему предпочтений, потенций и склонностей; в данной системе всякое развитие должно радикально зависеть от актов *свободного выбора* (а он, как мы увидим, иногда рассматривается как одна из форм случайности, самая трудная для понимания). В этих рамках *однородное изотропное пространство* (основное понятие физики) – не объективная реальность, а лишь одна из моделей реальности, так что возможны другие ее модели, с предпочтительными направлениями. Можно полагать, что эта ПМ будет итогом синтеза системного и диатропического подходов, т.е., образно говоря, менее организованной, чем организм, но более цельной, чем ярмарка.

Всякая ПМ требует для ее уяснения указать модельный объект. Сам Овчинников в ответ на мою просьбу указал семя – оно при благоприятных условиях прорастает, становится растением. Объект легко можно улучшить: бывают семена, в разных условиях вырастающие в растения различного облика (например, в плавающее или в стоячее). Однако берусь назвать более наглядный объект – железную игральную кость. Вне магнитного поля она падает, как всякая кость, и это можно назвать поведением без предрасположенностей; если же включить поле, то поведение изменится вплоть до возможности выпадения всегда одной и той же грани или даже невозможности падения вообще. Магнитное поле выступает здесь как поле предрасположенностей.

### 5-3. Становление статистической ПМ

Чтобы лучше понять суть анализа науки с помощью ПМ, рассмотрим одну из них немного подробнее. Для этого удобнее всего третья ПМ – она и исследована лучше, и положение пока что занимает ведущее (хотя уже и не царит в науке, как было полтораста лет назад). В наше время ее вытесняет четвертая (системная) ПМ, однако до сих пор, например, бросание монеты служит образцом для многих научных и бытовых норм поведения. Пример с монетой самоочевиден именно в силу того, что в науке и вообще в социуме бытует статистическая ПМ. Важно, что осмысление случайности до сих пор шло, в основном, в рамках этой ПМ.

Статистика как способ рассуждения сложилась в средневековом банке, где произошло осознание феномена статистической закономерности. Оно широко использовалось, и в XVI веке идея вышла за рамки конторы банкира, включившись как в экономическую политику европейских государств, так и в картины мира некоторых мыслителей [Daston, 1988; Чайковский, 1994; Bernstein, 1996]. В середине XVI века банковская система рухнула, и статистическая традиция пресеклась.

Однако свое дело банкиры сделали – научили Европу считать. Именно для них писались первые учебники арифметики, где долги и проценты были столь же обычны, как в нынешних – встречные поезда. И купец, и ремесленник, и просто состоятельный обыватель – все были с XV века вынуждены обсчитывать предложения банкира. Стоит ли уплатить 1/7 стоимости корабля с товарами в качестве страховки? Стоит ли завещать свой дом в банк и получить за это пожизненную пенсию? Стоит ли поставить один к пяти на то, что больной король не доживет до пасхи? Поневоле все, кто имел деньги, задумывались над долями, шансами и средними.

Первоначально, до середины XVII века, статистика (от лат. status – государство, состояние) не была связана с анализом каких бы то ни было случайностей, а была попросту частью ведущей тогдашней научной дисциплины – государствоведения, – той частью, которая приводила данные к единообразной форме. Как сказано в главах 2 и 4, с работы Граунта (1662 г.) статистика начала исследовать феномены массовой случайности и устойчивости частот. То был первый аспект третьей ПМ.

Другой ее аспект явила идея баланса. *Баланс* (от позднелат. *bilanx* – то, что имеет две шкалы [Souter, 1949]) впервые появился во второй половине XV века в форме ежевечернего уравнивания приходов и расходов, какое проводил (вернее, должен был, согласно этической норме, проводить) каждый хозяин торгового или банкирского заведения в итальянских торговых республиках. На одной странице ставились все расходы, а на противоположной – все приходы. Поскольку фактически приход может не равняться расходу, такое уравнивание требовало вводить мысленного формального контрагента, бравшего (дававшего) недостающую для уравнивания баланса сумму. В этом состоит так называемая двойная бухгалтерия.

Среди причин введения такого искусственного приема нам интересна одна – необходимость единообразного учета коллективной собственности ("образование паевых товариществ было главной причиной возникновения двойной записи" [Пачоли, 1994, с. 293]). Тем самым, кроме прочего, открывалась возможность исчисления средней доли.

В первичной форме баланс служил исключительно формой наблюдения за правильностью учета, а отнюдь не средством управления, не инструментом финансовой политики. Однако уже в середине XVI века баланс стал применяться именно для управления финансовыми потоками: корпорация банкиров понуждала своих членов предъявлять ежеквартальные балансы кредита и дебета (т.е. выданных и полученных сумм) и следила за соблюдением определенных норм. Например (если выражаться нынешним языком) *средний* срок кредита не должен был превышать среднего срока дебета. Поскольку такие приемы оказались гораздо эффективнее, чем прямой административный запрет "рискованных" операций [Чайковский, 1994, с. 71], то идея баланса понемногу стала рассматриваться как спасительная, что и привело к статистической картине мира, а много позже (когда прежней банковской системы давно не было) – и к статистической ПМ.

Бухгалтерский баланс – понятие мысленное: он соблюдается (при отсутствии ошибок записи) всегда, независимо от того, богатеет заведение или разоряется. Однако этот формальный прием контроля записей не только спасал от ошибок, но и мог использоваться властями, как выше сказано, для сокращения случаев разорения. Понемногу он породил новое понимание мира как совокупности балансов: с XVII в. стали говорить о законах сохранения и о "балансе природы" [Эгертон, 1978].

Переход от баланса как средства описания к балансу как средству управления естественно поставил вопрос о действующей причине соблюдения в природе и обществе многочисленных балансов. Поначалу господствовало понимание этих балансов как выражения божьей воли, но в XVIII веке возник, а в XIX веке возобладал поиск конкретных механизмов уравновешивания. Для физики и химии оказалась вполне пригодной идея беспорядочных столкновений частиц, а в экономике и (позднее) в биологии воцарилась идея *конкуренции* особей (тот факт, что на самом деле конкуренция к равновесию не ведет, стал известен лишь в XX веке). Затем в обеих науках стали считать конкуренцию ведущим фактором развития.

Звездный час третьей ПМ настал в 1859 г., когда одновременно три известных англичанина выступили со своими учениями: Чарлз Дарвин – о происхождении видов, Джеймс Клерк Максвелл – о движении молекул газа и Герберт Спенсер – об "общественном организме". Все три были ярко статистическими. Так, по Спенсеру, "мозг усредняет интересы различных органов тела так же, как парламент усредняет интересы различных классов общества". К сожалению, анонимная публикация Спенсера и ей подобные остались малоизвестными (тогда как концепции Максвелла и Дарвина быстро стали знамениты), и остался в тени социальный исток статистического естествознания. Чуждые философского подхода натуралисты полагали, что лишь обобщают успехи знания о природе, тогда как на самом деле вводили в естествознание социальные идеи, притом отнюдь не новые. Литературу см. [Чайковский, 1993; 1994; 1996].

Как раз с этого времени баланс всё чаще стали трактовать как равнодействующую разнонаправленных случайностей, а с тем сама третья ПМ расслоилась на две *субмодели*: описательную, где случайностей может и не быть, и математическую (точнее – вероятностную), где случайности (у которых предполагаются устойчивые частоты) играют ведущую роль. Будучи достаточно различны по существу, субмодели легко (подчас – неоправданно легко) заимствуют друг у друга стереотипы мышления, и именно поэтому их приходится рассматривать в рамках единой ПМ.

В описательной статистике почти или вовсе не было места для анализа сути общественных и хозяйственных процессов, зато подробно описывались различия между государствами. То же самое мы видим в биологии: дарвинистов больше интересуют различия между организмами, чем сами организмы (об этом было мельком сказано в п. 1-4.) У Дарвина эволюция была процессом описательной статистики (недаром прототипом ему служила, как он сам не раз указывал, статистика населения Томаса Мальтуса), тогда как круг аргументов дарвинизма XX века – чисто вероятностный. Однако нынешний дарвинизм искренне полагает Дарвина своим наиболее важным автором. Но можно ли для эволюционных актов вообще ввести понятие вероятности? Этот вопрос требует анализа природы случайности.

Группа западных науковедов сочла возможным говорить о "вероятностной революции" второй половины XIX века (где центральной фигурой назвала Дарвина и творцов статистической физики), переросшую в XX веке в "вероятностный империализм" [Gigerenzer e.a., 1989, с. 65, 271], конца которому авторы не видят. Это, по-моему, преувеличение – в последние годы можно говорить скорее о системном империализме.

Третья ПМ безраздельно царила в начале XX века, когда провозглашалось *статистическое мировоззрение*. Оно многим тогда виделось как "одна из глубочайших философий мира", которая "может дать и даст, наверное, самую общую науку о явлениях" [Романовский, 1922, с. 27]. Борель даже призывал вывести закон тяготения из статистического начала, подобно тому, как это было сделано в отношении второго принципа термодинамики [Борель, 1923, с. 207].

Для прояснения сути статистического мировоззрения в точных науках много сделал уже цитированный ранее американский математик и методолог Марк Кац. Вот еще его меткие оценки: "Усредняем беспрерывно, тогда как в действительности должны подождать до конца вычислений"; "Раз мы постулировали пространственную однородность, мы имеем большой произвол в осуществлении усреднения по всем возможным положениям. Если мы не имеем пространственной однородности, проблема становится более определенной. Нет совершенно места... для введения стохастического элемента. Неизвестно, что означает термин *случайный*, и ввиду этого мы не в состоянии найти соответствующей стохастической модели... Это одна из интересных проблем, на которую никто серьезно не обращает внимания, потому что люди вообще любят получать следствия из готовых уже уравнений еще до того, как поймут их" [Кац, 1967, с. 44, 61]. С этих позиций ближайшая цель алеатики – преодоление статистической ПМ.

В недавнее время ярким и законченным образцом приверженности (и даже прикованности) к статистической ПМ был математик-прикладник и философ В.В. Налимов. Налимовская "вероятностная модель языка" (см. п. 9-5) не содержит, на мой взгляд, ни вероятности, ни модели, ни языка, а содержит лишь уверенность, что всё в мире выражается текстами и заменами слов в них (о тесной связи первой и третьей ПМ скажем ниже). Искать смысл у Налимова (как и у других апологетов третьей ПМ) очень трудно; но в главе 10 это сделать придется, когда мы будем говорить о спонтанности.

В наши дни системный взгляд популярнее статистического, но последний то и дело дает о себе знать, когда политики и ученые пытаются извлекать истину (а с тем и руководство к действию) прямо из данных статистики. В основе при этом лежит убеждение (обычно неосознанное), что статистика – не только средство описания явлений, но и средство их понимания, и даже сам их механизм. Более правильное отношение к статистике хорошо выражается афоризмом "Статистике часто принадлежит первое слово, но последнее – никогда". То есть статистика помогает обнаружить явление, но механизм его следует выявлять иными средствами.

### *5-3.1. Вероятность солнечного восхода*

Яркой иллюстрацией влияния статистического образа мысли на умы служит кочующий из книги в книгу старинный сюжет: какова вероятность того, что завтра взойдет Солнце? Множество авторов самой разной ориентации повторяли одно и то же рассуждение – ежеутренний восход Солнца засвидетельствован всей исторической традицией человечества, следовательно его следует считать в высшей степени правдоподобным ("морально достоверным"). С появлением ТВ стало модно вычислять, сколь мала вероятность невосхода Солнца, если понимать его как предположительно случайное событие, давшее один и тот же исход миллион раз подряд.

Когда этот сюжет возник, мне неизвестно, но уже в 1714 г. Лейбниц характеризовал его как анекдотический: "И люди, когда они основываются только на опыте, ... поступают так же, как животные. Например, люди ожидают, что завтра будет день на том основании, что постоянно испытывали это. Только астроном предвидит это разумом" [Лейбниц, 1982, с. 406]. В самом деле, мы уверены в завтрашнем восходе Солнца не столько потому, что наблюдали его всю жизнь и знаем о том же из литературы (как раз из литературы все знают про полярную ночь), сколько потому, что у нас есть представление о вращении Земли вокруг оси; поэтому факт невосхода Солнца в средней полосе означал бы не просто что-то невероятное, но – крушение системы знаний.

Тем удивительнее, что "вероятность восхода Солнца" обсуждалась весь XVIII век, а Лаплас через сто лет после Лейбница направил на нее мощный аппарат созданной им аналитической ТВ. Сперва он с помощью формулы Байеса вычислил вероятность того факта, что все планеты и их спутники обращаются в одну сторону независимо, и нашел, что она исчезающе мала; а значит, решил он, однонаправленность должна иметь общую причину [Laplace, 1812, с. 258]. (Замечу, что впоследствии у планет-гигантов обнаружены спутники, обращающиеся в обратную сторону.) Затем, в знаменитом "Философском очерке" Лаплас проделал ту же вероятностную процедуру для восхода Солнца, приняв, что оно восходило подряд со дня написания древнейшей известной китайской хроники. Этот пассаж вдвойне поразителен потому, что Лаплас был стопроцентным детерминистом.

Но еще поразительнее, что сюжет жив поныне. Во всех изданиях своего знаменитого курса Феллер писал: "Сам Лаплас... вычислял вероятность того, что на следующий день взойдет Солнце, в предположении, что оно всходило ежедневно 5000 лет (или n=1826213 дней подряд). Передают, что Лаплас готов был ставить 1826214 против одного за то, что Солнце не изменит своего поведения; в наше время следовало бы увеличить ставку, поскольку регулярное движение Солнца наблюдалось в течение еще одного столетия" [Феллер, 1964, с. 130].

Если кто-то из читателей думает, что Феллер как педагог попросту встал на чуждую ему точку зрения ученого прошлого ради ее анализа, то разочарую их – Феллер закончил свой анализ словами: "Действительно, предполагаемый восход Солнца 5 февраля 3132 года до н.э. ничуть не более достоверен, чем то, что Солнце взойдет завтра; у нас совершенно одинаковые основания верить в оба эти события". А во введении к курсу Феллер писал: <<В нашей системе нет места для предположений, связанных с вероятностью того, что завтра взойдет солнце. Прежде чем говорить о такой вероятности, мы должны были бы условиться об (идеализированной) модели эксперимента, и она выглядела примерно так: "случайным образом выбирается один из бесконечного числа миров..." Не-большого воображения достаточно для того, чтобы построить такую модель, но она окажется неинтересной и бессмысленной>> [Феллер, 1964, с. 15]. Верно – механические явления сводить к вероятностным бессмысленно.

Как видим, авторы разных эпох могут рассуждать в сходных ситуациях одинаково, противореча даже тому, в чем они сами (в иных контекстах) уверены. Причина видится в том, что определенные рассуждения принято вести в рамках определенной ПМ. И если уж упомянута вероятность, то принято привлекать статистическую ПМ, даже если при этом теряется смысл обсуждаемого вопроса. Нам предстоит порвать с этой традицией.

### *5-3.2. Капитализм против рынка?*

Не раз уже говорилось о статистической подоплеке рыночной идеологии [Attali, 1986; Артур, 1990; Чайковский, 1994; 1996]. У нас же в России принято к тому же еще и отождествлять капитализм и рынок. На самом деле, как показал в 1970-е годы историк хозяйства Фернан Бродель (и, по-моему, убедительно), рыночная конкуренция именно в это время стала отходить на задний план экономики. Он писал: <<...сложилось устойчивое мнение – справедливое или не вполне, – что обмен сам по себе играет решающую, уравновешивающую роль, что с помощью конкуренции он ... согласует предложение и спрос, что рынок – это скрытое и благосклонное божество, "невидимая рука" Адама Смита, саморегулирующаяся система, какой представлялся рынок в XIX веке, основа экономики ... ("laissez faire, laissez passer ")[*] >>. Бродель резюмировал: "И если в течение последнего полувека экономисты, наученные опытом, уже не ратуют за автоматические выгоды экономического либерализма (laissez faire), то этот миф пока еще не выветрился из общественного сознания". Он привел символичные слова купца XVII века: "Как только появляется конкуренция, уже не найдешь и воды напиться".

И далее: "Капитализм и рыночную экономику обычно не различают потому, что они развивались одновременно – со Средних веков до наших дней, а также потому, что капитализм представляли как двигатель или вершину экономического прогресса. В действительности, всё несет на своей широкой спине материальная жизнь: если она набирает силу, всё движется вперед; вслед за ней, в свою очередь, быстро усиливается рыночная экономика" [Бродель, 1993, с. 48, 62, 67].

Могу добавить: рынок известен с глубокой древности, и Высокое средневековье ознаменовалось первыми попытками государства его ограничить — путем введения максимальных цен на товары первой необходимости и т.п. В XVII веке, с началом эпохи капитализма, европейские государства отказались от этой практики, и это запомнилось теоретикам как торжество рыночной эко-

[*]Позвольте делать, позвольте [событиям] происходить (франц.) – девиз крайних сторонников "рыночной экономики" XVIII века. – Ю.Ч.

номики, однако выпал из внимания более важный факт. Как раз в эпоху капитализма государство начало юридически ограничивать рынок – торговля рабочей силой перестала быть торговлей самими рабочими, армия перестала быть наемной (и снова становится наемной при посткапитализме), торговля чинами стала преступлением, стали финансироваться государством отрасли жизни, до тех пор бывшие почти или целиком сферой купли-продажи – лечение, обучение и культура. Возникла наука как нерыночный государственный институт. Затем, в XIX веке была официально ограничена конкуренция (картелями, синдикатами и т.п.), а в XX веке она просто сошла на-нет во многих отраслях западной и восточной экономики, уступив место монополиям. Все эти организации ставят своей целью уход от конкуренции путем разграничения сфер деятельности участников, и поле действия конкуренции суживается до розничной торговли и обслуживания, где конкуренцией и восхищаются ее сторонники.

Выходит, что капитализму как особой формации свойственно резкое ограничение сферы действия рынка как в самой экономике, так и вне ее, а социализм лишь довел эту работу до завершения (до абсурда). Главная сфера, где в эпоху капитализма произошло значительное расширение конкурентно-рыночной практики, это – сфера наемного труда, но и это обстоятельство не всеобще: в Японии, цитадели успешного капитализма, преобладает традиция пожизненного найма. Почему же именно время капитализма запомнилось как эпоха становления рыночной системы?

Думаю, что важную (если не главную) роль сыграла тогдашняя экспансия статистической идеологии. (Второй причиной было недолговечное возрастание роли рыночных механизмов в экономике, но оно было прекращено Великой депрессией 70 лет назад, когда ведущие государства в той или иной форме перешли к активному управлению экономикой. В тоталитарных странах это управление приняло чудовищные формы – отсюда и новые симпатии к рынку, на деле давно сдавшему позиции.)

Ища повсюду баланс и его атрибуты, идеологи статистической ПМ находили их повсюду, даже там, где мы их нынче не видим. В частности, математическое описание понималось в экономике XIX века как нахождение условий равновесия (и в покое, и в движении), причем неустойчивое (как мы теперь понимаем) равновесие трактовалось как устойчивое. В частности, конкуренцию – процесс в принципе неустойчивый (т.е. описываемый системой дифференциальных уравнений, неустойчивой по Ляпунову), описывали как устойчивый. Точнее, положительную обратную связь описывали как отрицательную – подробнее см. далее, п. 9-3.

Только такой модой я могу объяснить тот факт, что огромная антиконкурентная литература (наиболее в ней известное для русского читателя имя – анархист П.А. Кропоткин) даже не критиковалась, а просто игнорировалась. Даже в эмбриологии, где конкуренция вряд ли описывает хоть что-то, вводили термин "внутренний отбор". В других же областях, где она описывает (с системной точки зрения) лишь частности, она господствовала, а кое-где и господствует.

В этом нет ничего удивительного, если вспомнить, что идеология не раз понуждала массу людей к делам, казавшимся потомкам абсурдными. В делах общественных таких примеров не счесть, а в естествознании напомню хотя бы проекты вечного двигателя, евгенику и методы омоложения. С господствующей идеологией бороться бессмысленно – она должна сама состариться и умереть. Это, однако, не значит, что ее не следует критиковать – от нашей нынешней критики может зависеть (а может и нет), какая идеология сменит нынешнюю.

Закончу ссылкой на Аттали: он 20 лет назад хотел создать "другой язык для разговора о мире, с другим критерием истины", язык, который, как сказано выше, уместно назвать социальной диатропикой. По Аттали, "будущее блуждает не между планом и рынком, не между частной и государственной собственностью, а между насилием и свободой", причем последнюю он трактует как разнообразие, как "множественный порядок" (polyordre). Он призвал отказаться от идеологии в пользу эстетического начала, поскольку в новом языке истина не носит логического (причинного) характера и потому следует "принять искусство как средство познания, как форму истины" [Attali, 1986, с. 16, 315, 2, 357, 18, 19].

Ниже мы убедимся, что все это означает перемену взглядов на случайность. Статистическое мировоззрение знало, по сути, лишь один способ обращения со случайностью – усреднение, в котором отдельные случайные акты взаимно гасятся. Оно полагало эту процедуру весьма эффективной прежде всего в силу господства рыночной идеи, согласно которой механизм рыночной конкуренции "медленно, но верно" находит всюду наилучшее решение. В действительности, как мы увидим, роль конкуренции гораздо беднее, а случайности – гораздо богаче.

## 5-4. Познавательные модели случайности

С позиции **нулевой** ПМ случай не отличался от судьбы, и потому вопросы об исчислении случайного и о различии типов случайности не вставали. Кости с очевидной несимметричностью рассматривались как симметричные – в том смысле, что никто не ставил вопроса о сравнительно благоприятности падения на ту или иную грань. Этому способствовало отношение к исходу бросания не как к случайному, а как к акту судьбы, поскольку одна и та же кость могла использоваться и для игры, и для гадания, "причем каждый результат метания имел особое значение" [Цейтен, 1938, с. 180]. О старинных костях см. [Пятницын, 1976].

В рамках **первой** ПМ была поставлена и к началу XVIII века решена задача исчисления всех возможных исходов серии опытов типа бросаний кости или монеты. Родилось *априорное* понимание вероятности как отношения числа благоприятных исходов к числу всех исходов, причем в согласии с духом эпохи (господство первой ПМ) исчисление такой вероятности понималось как нахождение шифра (см. п. 2-3). С тех пор и до наших дней в ТВ царит первая (знаковая) ПМ.

В рамках **второй** ПМ случайное (точнее, вероятностное) сперва понималось только как скрещение независимых путей. Лишь сто лет назад Пуанкаре, исследовав вращение рулетки, дал начало механическому подходу к ТВ, о чем мы говорили в главе 4. Главным достижением второй ПМ в алеатике на сегодня является теория динамического хаоса.

Она хорошо резюмируется (в интересующем нас смысле) словами: "Чем движение неустойчивее, тем устойчивее проявляются в нем статистические закономерности" [Синай, 1981, с. 80]. Естествен и обратный ход мысли – чем ближе неустойчивое движение к границе устойчивости, тем менее устойчивы статистические законы. Ход этот, насколько знаю, математиками пока не сделан. Для этого нужен иной взгляд на мир, иные ПМ.

Что касается **третьей** ПМ, то ее фактически применяют статистики; их исходным понятием является не вероятность, а среднее (прежде всего – относительная частота), но формализм МС остается основанным на ТВ. Руководства по ТВ обычно лишь упоминают феномен частоты в предисловиях, после чего неявным образом *отождествляют* вероятность-частоту с вероятностью-мерой, чем по сути и завершается обоснование ТВ. (Подробнее см. ниже, п. 6.)

Чисто статистическое обоснование ТВ хотел дать Мизес. Он попытался определить вероятность как предел частоты в *нерегулярной* серии исходов. Отрицаемое до сих пор в курсах ТВ, такое понимание вероятности, тем не менее, царит у прикладников. Давид Рюэль пишет, что частотное понимание есть "операциональное определение" всякой (!) вероятности [Ruelle, 1991, с. 28]. Престижое руководство даже заявляет: "В данных томах мы приняли частотную точку зрения" [Kendall, 1991, с. 1197], хотя по всей книге вероятность исчисляется как мера. Панацею видит в подходе Мизеса и брошюра Ю.И. Алимова [1980]. Всё это никак не обосновано и, по-моему, является лишь следствием господства третьей ПМ в научном сознании общества.

Рюэль – один из авторов теории динамического хаоса и термина "странный аттрактор"; он же – один из немногих, кто пишет сразу и об этой теории, и об алгоритмическом подходе в одной книге. Поскольку алгоритм – понятие системное, то тут неявно выступает **четвертая** ПМ, проясняющая суть третьей. Но в учебниках ТВ почти никогда нет и более старых, вполне завершенных и явных системных пониманий случайности. Мне известен лишь один учебник, выводящий нормальное (*гауссово*) распределение из соображений симметрии и упоминающий его экстремальное свойство – максимум энтропии [Уиттл, 1982, с. 199, 270]. Мы вернемся к этому вопросу в следующем параграфе.

Именно в отказе Мизеса от рассмотрения какой бы то ни было симметрии видится мне его главная ошибка, оттолкнувшая от него математиков (см. п. 4-6). Ведь нерегулярность, которой он пытался дать определение, по сути включает симметрию – ту самую, в силу которой последовательность знаков почти всякого двоичного числа равносильна бесконечной серии бросаний симметричной монеты.

Далее, четвертая ПМ способна объяснить не только вероятностную, но и более сложную случайность: как мы видели в главе 4 и увидим далее, случайные события, порождаемые в системах с нежёсткими связями, способны образовывать распределения частот, для которых не имеет места ЗБЧ, а с тем теряет смысл и вся стандартная идеология ТВ. Тем самым, именно с четвертой ПМ алеатика начинает демонстрировать, что она много шире, чем ТВ.

О роли **пятой** и **шестой** ПМ в алеатике станет ясно в главах 6 и 7, а здесь только вновь процитирую Уиттла. Он полагал, что ТВ изучает "естественное разнообразие" (добавлю – а не только вычисляет по одним вероятностям другие) и что в ТВ идет спор, нужно ли ей внешнее обоснование или "теория может саморазвиваться". Он был уверен: "Ни одну из экстремальных точек зрения нельзя, вероятно, считать правильной, ибо как поиск модели, основанной на внутренних соображениях, так и поиск физической модели являются мощными орудиями исследования, и ни одним из них не следует пренебрегать" [Уиттл, 1982, с. 8–9]. А это – диатропическая позиция.

В главе 9 будет очерчена роль новых ПМ (4, 5 и, в порядке прогноза, 6) в понимании случайности различными науками. Пока же нам надо убедиться в том, что господство определенной ПМ в научном сообществе существенно влияет на ход научного познания и на его результаты.

### 5-5. Системная ПМ и экстремальность нормального распределения

Удивительно: самый общий феномен, используемый в ТВ, – нормальный закон – имеет весьма частное обоснование, оправданное лишь историей вопроса. Как уже сказано в главе 3, Гаусс осознал значение распределения, получившего его имя, ища всего лишь удобный способ обработки данных, содержащих ошибки наблюдения. Им был при этом использован *метод наименьших квадратов*, почти одновременно найденный тремя математиками (исторический обзор см. [Merriman, 1877]; обзор российских работ, содержащий однако и ссылки на первооткрывателей, см. [Лысенко, 2000]). Вне зависимости от того, был ли он найден ими самостоятельно, очевидно, что он был навеян временем; поэтому, полагаю, он и стал основой ТВ. Мировоззренческий характер сто лет назад придал данному методу Пуанкаре [1999] – он добавил к идее ошибок опыта идею суммирования независимых малых величин. Все это относилось к третьей ПМ.

Что касается четвертой, системной ПМ, то ее вклад связан с пониманием экстремального характера нормального распределения. Для него известна простая экстремальная трактовка: оно обладает максимальной энтропией при наличии конечной дисперсии. Точнее, ставится задача: найти распределение, плотность f(x) которого удовлетворяет условию (пределы интегрирования опущены)

$$\max \int f(x)\ln\left(\frac{1}{f(x)}\right)dx \tag{3}$$

при заданной дисперсии

$$\int x\, f(x)dx = D > 0 \tag{4}$$

и при условии нормировки

$$\int f(x)dx = 1. \tag{5}$$

Решение легко получить методом множителей Лагранжа в виде

$$f(x) = u \exp(wx^2), \tag{6}$$

где константы u и w надо найти. Если плотность отличается от нуля только на конечном отрезке [-b, b], то максимум (3) достигается для $D=b^2/3$ при w=0, т.е. мы получаем равномерное распределение. Это и понятно: равновероятные значения означают максимум неупорядоченности случайной величины x, что и трактуется обычно как максимум ее энтропии.

Проблема однако более глубока: при иных значениях D условие (4) не допускает решения w=0, а при D>b решения нет вовсе. Общий вид решения имеет при w<0 вид гауссоиды, только при конечных b она урезана справа и слева, а при бесконечном b принимает стандартный вид гауссоиды, идущей влево и вправо на бесконечность.

Если понимать энтропию как меру неупорядоченности (что само нуждается в обосновании, которого, насколько знаю, пока никто не дал[*]), то данный результат можно толковать для бесконечного b таким образом: *нормально распределено то, что обладает максимальной неупорядоченностью, при какой возможна еще устойчивость частот* [Чайковский, 1988, с. 93].

Если же b конечно, то задача оказывается интереснее. При малых дисперсиях $0<D<b^2/3$ (т.е. при w<0) имеем урезанную гауссоиду, которая с уменьшением D стягивается к середине отрезка [–b, b], т.е. случайность исчезает (переходит в определенность). При $D=b^2/3$ искомая плотность становится равномерной (w=0), а при $b^2/3<D<b^2$ (т.е. при w>0) мы получим плотность в форме кривой, продавленной в середине (рис. 6). С ростом D продавленная кривая прижимается книзу в середине и растет около точек x= –b, x=b, причем $S\to\ln 2$ при $D\to b^2$, т.е. в пределе реализуется дискретная случайность типа бросания монеты. Тем самым, для конечного интервала *равномерное распределение есть не-*

[*]С.Д. Хайтун [1999] полагает, и видимо справедливо, что энтропия мерой беспорядка не является. Одни видят в энтропии меру беспорядка, другие – меру разнообразия; одни ищут ее минимум, другие – ее максимум. Серьезных обоснований при этом обычно не бывает, но как бы то ни было, энтропия – существенный инвариант, который нельзя игнорировать при случайностном анализе систем.

*прерывный, а бросание монеты – дискретный аналоги нормального распределения*.

Если же дисперсия превышает $b^2$, то решения у экстремальной задачи нет, и это можно истолковать (напомню, что рассуждения весьма нестроги) как утерю устойчивости частоты с ростом беспорядочности случайной величины. Отсюда и двинемся.

Поскольку нас интересуют распределения как с конечными дисперсиями (устойчивые частоты), так и с бесконечными, естественно попробовать заменить (4) на такое же условие для математического ожидания. Однако выхода в мир иных случайностей тут нет: получается простое или двустороннее экспоненциальное распределение, имеющее конечную дисперсию. Его плотность имеет вид

$$f(x) = a\exp(-ax), \text{ где } x > 0, \text{ или } f(x) = (a/2)\exp(-a|x|),$$

причем $a>0$. Его энтропия, как легко видеть, меньше гауссовой; это показывает, что варьированием (3) найден был именно максимум.

Распределение с бесконечной дисперсией можно получить, заменив условие (4) на какое-то другое. Например, допустив, что задан интеграл величины $f(x)\ln(1+x)$, получим *гиперболическое* распределение (о них пойдет речь в гл. 7). Можно попробовать иначе – ввести функционал, более сложный, чем (3). Однако разумного объяснения смысла таких процедур мне не известно, и подбор вида функционала под желаемое распределение кажется мне бесперспективным. В п. 9-4.1 мы попробуем другой путь.

Если устремить b к бесконечности, то условие (5) выполнимо только при $w<0$, так что задача максимизации не имеет решения в классе кривых (6). Это не значит, разумеется, что решения нет вообще, – ведь задача (3) – (5) вырожденна: функционалы не содержат производных, вследствие чего варьирование дает алгебраические уравнения вместо дифференциальных, и класс возможных кривых крайне узок. Вопрос расширения класса рассматриваемых случайностей обычно выпадает из круга интересов тех, кто мыслит в рамках системной ПМ (см., впрочем, важное замечание о двойственности экспоненциального распределения и распределения Коши [Леви, 1972, с. 172]), но находится в центре внимания, если встать на позицию пятой, диатропической ПМ. Мы займемся этим в главах 7 и 8.

## 5-6. Аксиома эквивалентности и пределы ее действия

Можно сказать, что в основе ТВ лежит еще одна аксиома, никем не формулируемая, но всеми принимаемая: вероятность-мера фактически отождествляется с вероятностью-частотой (*аксиома эквивалентности*). Это похоже на ситуацию с понятием массы в физике, где гравитационная масса отождествляется с инерционной. Но эквивалентность масс нигде, насколько мне известно, не нарушается, тогда как эквивалентность вероятностей имеет вполне реальные границы – о ней есть смысл говорить только там, где частоты устойчивы.

Что же означает само слово "вероятность" в задачах, где устойчивость частот не вводится, хотя и предполагается? Вообще в ТВ оно означает нормированную меру, т.е. является понятием теории функций действительного переменного, но не какой бы то ни было теории случайности. Со случайностью ее связывает формально лишь условие независимости [Колмогоров, 1998], а фактически – упомянутая аксиома эквивалентности. Она-то, по-моему, и является на сегодня той "аксиомой вероятности", на потребность в которой указывал Дж. Литтлвуд (см. Введение).

Феномен устойчивости частот настолько распространен в природе и обществе, что неустойчивые частоты можно было столетиями не замечать, как и делают до сих пор те математики, которые выбирают ТВ в качестве профессии. С их точки зрения, насколько я ее понимаю, устойчивость частот лежит в основе мироустройства; тогда естественно желание еще и еще расширять осознанную часть этого мира, а оказавшись все-таки вне его, стараться описать новый мир в понятиях старого.

Что это за старый мир? Мне представляется, что это – мир, понимаемый в рамках третьей ПМ, мир, в котором принято обращаться с вероятностями вместо реальных частот и со средними значениями случайных величин вместо самих этих величин. Такая замена может приводить к потере самой сути дела. Во-первых, упускается из виду, что реально взаимодействуют не средние, а сами единичные объекты в их разнообразии. Если они хоть чуть сложнее, чем объекты статистической физики, то траектории средних величин, даваемые решением дифференциальных уравнений, ничему в природе, как правило, не соответствуют. Во-вторых, игнорируются распределения неустойчивых частот, хотя они вполне реальны в практике.

Четвертая и пятая ПМ оперируют с более сложными и менее регулярными случайностями, чем принятые в ТВ. Я уже старался показать это в главах 3 и 4 книги [Чайковский, 1990], а здесь скажу лишь, что такие случайности обычно возникают в системах с нежесткими связями, где типичны распределения частот с бесконечными (точнее, с неограниченно растущими) дисперсиями; чаще всего плотности этих распределений монотонно убывают и довольно хорошо выражаются гиперболами, отчего сами распределения известны как *гиперболические*. Об этом много написано (например: [Петров, Яблонский, 1980]), но без понятия ПМ трудно уяснить, что речь идет не о каких-то экзотических вариантах статистики, но о корпусе фактов и идей, требующем нового мировоззрения – системного. Мы обратимся к таким распределениям в главах 7, 8 и 9.

Алгоритмическая ТВ явилась кульминацией успехов третьей модели, но из самого ее названия видно, что для уяснения статистической сути вероятности потребовалось взглянуть на третью ПМ с позиции четвертой, системной. Ведь хотя случайность и понята здесь как отсутствие алгоритма, но сам-то алгоритм – понятие системное.

Хотя отдельные старые высказывания системного характера о случайности найти можно (например: "Только местонахождение наблюдателя различает судьбу от случая" [Шпенглер, 1993, с. 209]), однако сам системный подход к случайности относится к последним тридцати годам.

Каждая ПМ формирует свое отношение к аксиоме эквивалентности, а с тем и к самой вероятности. Первая ПМ, в лице Бернулли, удовольствовалась, вместо эквивалентности, принципом исчерпания равновозможностей, унаследованным еще из XVI века. Вторая, в форме теории динамического хаоса, понимает эквивалентность как эргодичность или как перемешивание. Третья, в лице Мизеса, ищет эквивалентности в иррегулярности.

Как уже сказано, основная ошибка Мизеса видится в том, что он прямо отрицал симметрийный подход, однако вряд ли можно было сразу осознать и суть частотного понимания вероятности, и ее симметрийную основу. В дальнейшем (1931 г.) Мизес ввел понятие пространства элементарных событий – последнее понятие, которого недоставало для построения колмогоровской ТВ [Феллер, 1964, с. 16]. Ввод этого понятия, позволившего дать вероятности ту самую *uniformity*, которую смутно ощущал еще Венн [Venn, 1876, с. 233], представляется мне шагом в сторону осознания Мизесом симметрийной природы вероятности.

Но где симметрия – там ищи целостность. В науку идеи целостности входят в рамках системной (четвертой) ПМ. Она касается вероятностной проблематики как в рамках алгоритмической ТВ, так и в рамках симметрийной трактовки вероятности (алгоритм и симметрия – понятия системные). Однако на мой взгляд важнее то обстоятельство, что многие системные случайности демонстрируют нарушение эквивалентности вероятности-меры и вероятности-частоты. К сожалению, мы пока не умеем описать класс этих случайностей, но можем сказать, что для многих систем характерны распределения случайных величин с бесконечными дисперсиями[*], а бесконечную дисперсию естественно трактовать как отсутствие сходимости (даже приближенной) частоты к вероятности.

Наконец, диатропическая (пятая) ПМ прямо ставит вопрос о том, что случайности бывают разные и что для одних эквивалентность место имеет, а для других нет. Об этом см. главу 8.

[*]Практически мы всегда имеем дело с конечными выборками, и тут феномен бесконечной дисперсии случайной величины проявляется в том, что относительная дисперсия неограниченно растет с ростом выборки.

### 5-7. Взаимодополнительность частоты и меры

Как мы видели в п. 4-6, на одну задачу может быть два взаимно дополняющих друг друга взгляда. Такая ситуация в математике достаточно типична [Паршин, 2001], а специально в аспекте случайности хорошо известна в физике в связи с теорией квантов (корпускулярно-волновой дуализм и соотношение неопределенностей) и в биологии в связи с ролью мутаций в эволюции ("случайность мутаций относительна. Они случайны в том смысле, что их появление и результат, как правило, не удается связать с детерминированным воздействием внешней среды. В то же время мутации как-то детерминированы работой самой генетической системы организма" [Мейен, Чайковский, 1982, с. 17]). В философии данный подход тоже не нов. Так, Иммануил Кант утверждал, что каждое природное явление может быть разумно описано с двух позиций – в терминах механизма действия (причинный подход) и в терминах назначения (целевой подход) (Критика способности суждения, параграф 82).

На этой основе в 1930-е годы Нильс Бор развил целую концепцию, которую можно назвать *взаимодополнительной картиной мира*: всякое фундаментальное высказывание о природе лишь тогда фундаментально, когда его отрицание – тоже фундаментальное высказывание о природе. Недавно математик А.Н. Паршин [2001] показал пользу такого подхода для ряда новых и подчас неожиданных проблем в самых различных областях деятельности, в том числе и вне науки. Для нашей темы в его мыслях важно то, что в математическом познании формализм и интуиция взаимодополнительны. К какой ПМ эта картина мира относится, сказать не берусь. Видно, правда, что она тяготеет к системной.

Напрашивается мысль, что вероятность как мера и как частота тоже взаимодополнительны, но вопрос не так прост: вероятность-мера определена как точный математический объект, тогда как вероятность-частота – всего лишь тенденция, т.е. нечто расплывчатое (см. гл. 2). На помощь приходит то соображение Паршина, что для формального введения двойственной пары[*] иногда приходится дополнять рассматриваемый реальный объект идеализирующим свойством. В нашем случае таким свойством явится существование предела частоты (в действительности его в точности никогда не существует, и в этом состоит идеализация), причем вероятность-частота выступает как понятие, взаимодополнительное к вероятности-мере.

По сути это и делается всеми, только молча. Лишь немногие говорят об этом, и то не вполне прямо. Например: "наиболее распространенными в современной науке оказались эмпирические интерпретации, в которых вероятность считается просто абстрактным двойником наблюдаемой частоты (как и все абстракции, она лучше "себя ведет")" [Кайберг, 1978, с. 76].

---

[*]Двойственность выступает как математическое описание дополнительности (там, где оно возможно).

Так высказался логик, а вот мнение математика: <<...Изменчивость частоты не исключает некоторого ее "идеального" значения, около которого она колеблется и к которому в определенном смысле приближается. Это идеальное значение частоты события и есть его вероятность. ... Как реальные кошки по Платону были несовершенными "копиями" идеальной кошки (идеи кошки), так и реальные частоты есть реализации абсолютной (идеальной) частоты – вероятности>> [Скороход, 1989, с. 15-16].

В действительности, вероятность вводится в нынешней теории не как абстрактная частота, а как абстрактная мера. Для понимания природы вероятности надо ввести двойственность прямо, поскольку, если вдуматься, область действия ТВ и есть та область, где допустимо считать обе вероятности двойственными друг другу. Вне этой области ТВ перестает быть учением о случайности, оставаясь главой теории меры.

Поговорив об *идеальной* частоте и кошках, Скороход без всякого обсуждения уверенно отверг *реальный* частотный подход Мизеса: "Идеи Мизеса можно использовать при некоторых интерпретациях результатов теории вероятностей, но для построения математической теории они несостоятельны" [Скороход, 1989, с. 17]. Почему несостоятельны, не сказано, как, разумеется, не сказано и о том, что уже лет 20 было тогда известно как случайность по Мизесу – Колмогорову [Lamblagen, 1987].

Однако с дополнительной позиции Мизес никак не выглядит "несостоятельным" – даже вне зависимости от успехов алгоритмической ТВ. Как верно отметил В.Н. Тутубалин [1977, с. 15], хотя аксиоматика и признана по Колмогорову (вероятность-мера), но концепция применимости неизменно следует Мизесу (вероятность-частота). За четверть века положение в трудах по ТВ не изменилось, и проще сказать, что концепции применимости вероятности там вообще нет. Такую концепцию я вижу во взаимной дополнительности понятий меры и частоты, которую хотелось бы видеть в форме математической теории двойственности. Пока же это – философский тезис. Философские вопросы отложим до главы 10.

## Глава 6. Динамический хаос, фракталы и алгоритмы

### 6-1. Новая математика для старой науки

Сорок лет назад, когда я учился на Физфаке МГУ, нас учили, что характер движения определяется типом уравнения, что интерес представляют только устойчивые траектории и что теория функций комплексного переменного предназначена для изучения наиболее гладких процессов, тогда как функции действительного переменного могут быть устроены сколь угодно рвано. Все четыре тезиса были тогда давно уже опровергнуты (притом – в рамках классической науки, а не в квантовой или релятивизме), но на преподавании и на ходячих поверьях это не отражалось нисколько. В среде физиков царило убеждение, что "мир устроен просто". Не знаю, насколько ныне изменилось преподавание, но в научном сообществе теперь образовались островки специалистов, знающих, что взаимодействие мира природы с миром математики устроено куда как интереснее.

Просто устроен не мир, а та физика, которая избегает изучать сложное, та, которую преподают повсюду, чью познавательную установку прекрасно сформулировал Эуген Вигнер: "Мир очень сложен, и человеческий разум явно не в состоянии полностью постичь его. Именно поэтому человек придумал искусственный прием – в сложной природе мира винить то, что принято называть случайным, – и таким образом смог выделить область, которую можно описать с помощью простых закономерностей. Сложности получили название начальных условий, а то, что абстрагировано от случайного, – законов природы" [Вигнер, 1971, с. 9]. Итак, сложное отождествлено со случайным, а случайное вынесено за рамки анализа. Можно назвать это **случайностью по Вигнеру**.

Но есть и другая физика – та, где сложное является как раз объектом анализа [Соколов, 1990]. В ней давно известно, что замена дискретных переменных непрерывными может радикально обеднять поведение системы, что уравнение диффузии может, при *достаточно сложных начальных условиях*, иметь решение в виде бегущей волны; что неустойчивое столь же обычно и важно, как устойчивое; что гладкие функции (обычные решения дифференциальных уравнений) преобладают в литературе лишь по традиции. Последним пунктом и займемся.

Дальнейшее, до конца следующего параграфа, в основном изложено по книге [Пайтген, Рихтер, 1993]. Вот сновные для нашей темы ее тезисы: "Таким образом, и детерминизм Лапласа не может быть абсолютным и вопрос о случайности и свободе вновь открыт!" (с. 159) и "дискретизация явно безобидной системы дифференциальных уравнений привела к невообразимо богатому и сложному поведению" (с. 107)

Таких новшеств, как динамический хаос, вполне хватило бы, чтобы физика последней трети XX века погрузилась в совсем новую математику, переворачивающую все традиционные представления. Но с ним оказался тесно связан еще один тип математического хаоса, *итерационный*. Если дифференциальные уравнения дают гладкие траектории, которые, запутываясь, порождают беспорядочность, то итерационные, наоборот, в ходе вроде бы беспорядочных скачков заполняют точками области, многие из которых оказываются очень красивыми узорами. Красота мира дифференциальных уравнений, которой ученые наслаждались 300 лет, бледнеет перед красотой мира дискретных итераций. Более того, она заставляет нас пересмотреть соотношение науки и искусства, закона и случая, рационального расчета и свободного творчества.

Еще около 1915 года французские математики Гастон Жюлиа и Пьер Фату стали изучать поведение на комплексной плоскости тех преобразований, какие до того исследовались лишь на вещественной оси. Поскольку квадрат мнимой единицы есть единица вещественная, то самые простые итерационные преобразования ведут себя фантастически сложно. Например, таково преобразование

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \tag{7}$$

где переменная $z=x+y$i и постоянная $c=a+b$i комплексны. В вещественной области это преобразование выглядело неинтересным – его бросающиеся в глаза свойства сводились к тому, что при малых ($x_0$, $a$) точки $x_n$ группируются около нуля, при больших уходят на бесконечность, а в двух пограничных точках остаются на месте(*). Зато в комплексной области творятся чудеса.

Прежде всего, пограничная область оказывается вовсе не окружностью, как можно было ожидать, а бесконечно изломанной кривой ("под лупой выглядит столь же изломанной, как и без нее"). Множество J точек, ограниченное этой кривой, называется *множеством Жюлиа*. Если $z_0$ лежит в его пределах, то $z_n$ никогда не покинет J, а если вне, то уйдет на бесконечность. Бесконечную изломанность можно описать как самоподобие: сменив лупу на микроскоп и безгранично увеличивая силу его увеличения, мы не увидим изменения характера кривой. Самоподобные множества были известны и до Жюлиа, но не привлекали внимания до 1970-х годов, когда компьютерная графика сделала самоподобие наглядным.

*Самоподобие — одна из форм симметрии*. Манфред Шрёдер, германо-американский физик и популяризатор, пишет: "Среди всех симметрий, пышным цветом расцветающих в Саду Инвариантности, лишь один побег до недавнего времени не был взлелеян – буквально вездесущая инвариантность при изменении размеров, называемая *самоподобием*" [Шрёдер, 2001, с. 17] и в качестве наиболее ярких примеров называет множества Жюлиа и множество Кантора (о нем мы сейчас узнаем). Насчет единственности он не вполне прав: напомню хотя бы реализационную симметрию, рассмотренную в п. 4-1 (этот "побег" тоже совсем "не взлелеян"), – но акцент на самоподобии как на виде симметрии очень важен.

В 1975 г. математик Бенуа Мандельброт (родился в Польше, учился у Жюлиа во Франции, прославился в США) ввел понятие *фрактала*, призванное формализовать представление о самоподобии. Попробуем описать его.

Самым простым примером фрактала служит *множество Кантора*, которое строится так. Разделим отрезок [0, 1] на три равных части и удалим среднюю треть, затем разделим так же и первую, и третью трети, удалив их середины; то же проделаем с получившимися четырьмя отрезками и т.д. (рис. 7). На n-ом шагу процесса получим $2^n$ отрезков, т.е. после бесконечного числа шагов будем иметь "пыль Кантора" – бесконечное количество бесконечно коротких отрезков (но не точек — разница стала ясна лишь с появлением нестандартного

(*)Начиная с 1960-х годов стали появляться работы об интересном (и даже хаотическом) поведении этого преобразования на вещественной оси при $a$, взятых из отрезка [—2; 1/4] – см. [Lyubich, 2000]. Но и тут разнообразие семейства кривых на вещественной плоскости ($x_0$, $a$) не идет в сравнение с таковым семейств на комплексных плоскостях.

анализа[*]). Легко видеть, что суммарная длина этих бесконечно коротких отрезков меньше любого положительного числа (до появления нестандартного анализа говорили, что она равна нулю). Множество этих отрезков и есть множество Кантора.

Этот фрактал самоподобен: рисунок одинаков для любой стадии процесса – убрав с него цифры, невозможно сказать, какая часть процесса изображена, и данное свойство оказывается гораздо более общим, чем строгое самоподобие. Таковы фотография следа молнии, береговая линия на карте, рисунок кровеносной системы и т.п. В этих примерах малый участок устроен столь же сложно, что и вся картина.

Построение математического фрактала – процедура бесконечная, тогда как всякая картина реального мира допускает лишь ограниченное число изменений масштаба: повышая детальность карты, мы в конце концов увидим отдельные камни и кочки, а разглядывая капилляр в сильный микроскоп – отдельные клетки. О возможности описывать реальные объекты фракталами можно сказать то же, что о возможности описывать суммы интегралами, но трудности встают противоположные – см. ниже, п. 3.

Главное свойство фракталов – дробная размерность, тогда как самоподобие может, говоря строго, и не наблюдаться. Глядя на карту береговой линии (удобнее – норвежского или таймырского фьорда, хотя свойство всеобще и открыто при анализе береговой линии Англии), мы не можем по характеру изломов определить, какого масштаба карта – качественно линия одинакова; но говорить о точном самоподобии нельзя. Зато можно убедиться, что длина линии неограниченно растет с ростом детальности карты (в километрах местности, а не только в сантиметрах карты). Кривая как бы заполняет некоторую часть (но не некоторые области) плоскости, что и формализуется понятием дробной (здесь – между 1 и 2) размерности.

Сам Мандельброт затруднился дать фракталу определение, сказав лишь: "Это понятие, как и хорошее вино, требует выдержки" [Пайтген, Рихтер, 1993, с. 137]. В самом деле: фрактал интересен двумя своими свойствами – самоподобной нелинейностью и дробной размерностью, но ни одно не годится в качестве общего определения, а если требовать их выполнения совместно, то окажутся вне рассмотрения многие интересные объекты, в том числе случайностные. Насколько знаю, за четверть века ситуация не прояснилась, и вместо определения фрактала бытуют приблизительные описания. Например: "Мандельброт определил понятие фрактала как структуру, состоящую из частей, которые в каком-то смысле подобны целому" [Иванова и др., 1994, с. 33].

Иногда размерность кладут в основу определения фрактала [Хайтун, 1999, с. 249], но нам будут интересны и самоподобные структуры с обычной размерностью (см. ниже, п. 3). Иногда отсутствие строгого самоподобия обходят, вво-

---

[*]Модификация теории множеств для обоснования нестандартного анализа существует уже в двух видах [Кановей, 2001].

дя понятие *статистического самоподобия*, а отсутствие бесконечной повторяемости (невозможность безгранично менять масштаб) – вводя понятие *предфрактала* [Иванова и др., 1994, с. 42, 35].

Так или иначе, «Фракталы становятся удобными моделями, чем-то вроде интегрируемых задач классической механики, для описания процессов в средах, ранее считавшихся неупорядоченными» (Ю.А. Данилов [Синергетическая..., 2000, с. 190]). Мы этим будем пользоваться, а за точным определением гнаться не будем.

### 6-2. Фрактальный хаос

Вернемся к уравнению (7), к границе множества Жюлиа. В простейшем случае она являет собой "фрактально деформированную окружность" с неподвижной точкой внутри (рис. 8). Каждому значению параметра $c=a+b$i соответствует свое множество J, что удобно изобразить на плоскости ($a$, $b$): здесь каждому J соответствует своя точка. Эти точки образуют *множество Мандельброта* M (на рис. 9 оно закрашено), граница которого тоже фрактальна. Можно сказать и иначе: если в уравнении (7) зафиксировать параметр c и менять начальную точку $z_0$, то получится семейство ломаных траекторий, заполняющих одно единственное множество J на плоскости (x, y), а если зафиксировать $z_0=0$ и изменять c, то получится множество M на плоскости ($a$, $b$).

Множество M связно (между любыми его точками можно провести линию, целиком лежащую в M), оно имеет ось симметрии ($b$=0), имеет главную часть, ограниченную кардиоидой (известная кривая 4-го порядка), и бесконечное множество почек. Внутри кардиоиды каждое множество J имеет приблизительно тот же вид, что на рис. 8, зато на ее границе ситуация резко меняется.

Граница множества M унизана *почками*. На рис. 9 видны: почка 1-го порядка – окружность на оси $b$=0, три почки 2-го порядка – окружности поменьше (одна на той же оси и две по бокам кардиоиды) и много более мелких почек более высоких порядков. Внутри почки k-го порядка каждое множество J имеет неподвижный цикл из k+1 точек. Каждая почка, как и кардиоида, облеплена бесконечным числом почек более высоких порядков. Кроме почек (они имеют внутренние полости), имеются фрактальные антенны, внутренних полостей не имеющие. Некоторые типы множеств J, расположенных по границе множества M, изображены на рис. 10.

Граница множества M являет пример фрактала, не обладающего самоподобием (границе всего множества M подобны лишь отдельные участки этой границы).

Если в пределах M каждое множество J связно, то вне множества M картина множеств J будет иная: каждое множество J несвязно, т.е. распадается на куски – вблизи границы M число кусков каждого J конечно, вдали – бесконечно ("пыль Фату").

Естественно, наиболее сложная структура множеств J наблюдается на самой границе множества M, где и приходится говорить о новом типе хаоса. Двигаться по самой границе невозможно, поскольку она на любом участке бесконечна, но если двигаться вдоль кардиоиды, заходя лишь в некоторые почки, то множества J, оставаясь связными, будут меняться самым удивительным образом, и чем выше порядок почки, тем сложнее устроены в нем границы множеств J. Для меня наиболее поразительна «долина морских коньков» [Пайтген, Рихтер, 1993, с. 120, 168], воспроизведенная также в работе [Чайковский, 2001а].

Если же мы сместимся чуть вовне от кардиоиды, то наш путь будет непрестанно пересекать границу M, и картины станут сменяться еще прихотливее: ничтожное изменение параметра будет изменять картину качественно – не только бесконечно усложнять систему сомкнутых "фрактально деформированных окружностей", но и обращать их в "дендриты" без внутренних полостей и в несвязные узоры.

Хотя каждый узор симметричен, смена их при многократном пересечении границы M оказывается хаотичной. Хаос этих узоров выражается в их бесконечном и часто непредсказуемом разнообразии. Как к этому новому типу хаоса относиться?

Можно вообще отрицать здесь хаос. Французский математик Адриен Дауди уверен, что здесь имеется семейство "очень сложных объектов, причем не хаотичных, а, наоборот, строго организованных". Наоборот, Мандельброт видит здесь сразу два типа хаоса – упорядоченный и беспорядочный, эрратический (лат. *erratic* – беспорядочный). Действительно, при пересечении границы M хаотичность качественно возрастает. К сожалению, об эрратическом хаосе Мандельброт сказал лишь, что не знает, как его исследовать. Приходится двигаться самостоятельно.

Динамическая система, задаваемая уравнением (7), демонстрирует как растянутые отображения (ничтожная разница параметров приводит к качественно иной картине, хотя сходство в типах симметрии близких множеств J очевидно), так и сжатые: формирование узора можно рассматривать как самоорганизацию. Это сочетание создает как раз те условия, какие нужны для возникновения наиболее сложной случайности, о чем шла речь в п. 4-4. Отсюда и двинемся.

### 6-3. Перемешивание, независимость и фракталы

Как уже было сказано в п. 4-4, в странном аттракторе возникает случайность сразу двух типов –во-первых, вдоль траектории (траектория *непредсказуема*), а во-вторых, между траекториями (близкие траектории *разбегаются* по далеким конечным состояниям). Первая принципиально важна тем, что позволяет увидеть новый факт: случайность возникает не от сложности, не от неустойчивости и не от помех, а в ходе реализации простого детерминированного процесса.

Траектории странного аттрактора структурированы: глядя, например, на "бабочку Лоренца", легко заметить, что кольца как бы упакованы слоями; если взглянуть на эти слои "в лупу", каждый слой окажется состоящим из слоев потоньше и т.д. Словом, налицо фрактал в его нестрогом понимании: "Топология странных аттракторов весьма примечательна. Она характеризуется масштабной инвариантностью, при которой структура аттрактора повторяется на все более мелких пространственных масштабах. Такие структуры, называемые фракталами, обладают любопытным свойством дробной размерности(*), промежуточной между размерностью точки и линии, линии и плоскости и т.д." [Лихтенберг, Либерман, 1984, с. 19].

В случае ограниченного фазового объема разбегание траекторий приводит к *перемешиванию* системы. Определение перемешивания см. в книге [Заславский, 1984, с. 28]. Наглядным примером перемешивания служит тасовка карт. Каждый может сам поставить простой опыт – взять упорядоченную колоду карт, перетасовать ее с той тщательностью, какая обычна в практике игр, и разложить на столе в ряд. Соседними окажутся около десятка пар и, вернее всего, более одной тройки первично соседних карт, чем пользуются в тех играх, где карты принято раздавать парами: попробуйте перетасовать карты с вдесятеро большей тщательностью и раздать их по одной (я это пробовал) – игра типа преферанса потеряет всякий интерес ввиду почти полного отсутствия нужных комбинаций. Этим иллюстрируется тот факт, что перемешивание есть постепенное *расцепление корреляций*. Иными словами, по ходу перемешивания постепенно возникает независимость между ситуациями, прежде зависимыми.

В п. 3-3.1 было сказано, что независимость заменяет в ТВ отсутствующую в ней случайность. Следовательно, зависимость затрудняет применение ТВ. Это затруднение обходят, вводя *условные вероятности*, т.е. допускают, что поле случайных событий можно случайным образом разбить на поля независимых случайных событий. Иными словами – что плохо перемешанное поле допускает представление в форме совокупности хорошо перемешанных фрагментов, в пределах каждого из которых элементы тоже хорошо перемешаны.

Однако не все виды зависимости допускают такое разбиение, и при некотором уровне зависимости между событиями ТВ вообще становится неприменима.

Независимость компонент может быть имманентно присуща системе (знаки числа по Ламберту, порядок витков в системе Лоренца и т.п.), или, другими словами, быть следствием симметрии системы. Но она может и быть порождена той или иной процедурой перемешивания, а это значит, что перемешивание

(*)Никакого иного определения фрактала не дано. В комментарии к этому месту Б.В. Чириков отметил, что термин "странный аттрактор" неудачен, поскольку такие аттракторы вполне обычны, и что "фрактальная структура хаотического аттрактора не является универсальной, это может быть, например, просто тор".

– один из тех феноменов, которые порождают вероятностную случайность. Но если так, то недостаточность перемешивания может вести к невероятностной случайности. Приведу один случай дефекта перемешивания, возникающий в простейшем ветвящемся процессе, рассмотренном в п. 4-7.

Легко видеть, что процесс рождения и гибели изображается фракталом – в том смысле, что ветвящееся древо самоподобно, и по его рисунку неясно, какая часть процесса изображена – начальная или фрагмент более поздней. Однако точное самоподобие достигается только при условии, что ни одна особь не гибнет (процесс чистого размножения), наличие же гибели приводит к обрыву отдельных ветвей (и самоподобие достигается лишь статистическое – см. формулу (40) на с. 42 книги [Иванова и др., 1994]). Именно этот обрыв и порождает невероятностную случайность: вымершие клоны имеют нулевую численность, а немногие выжившие – численность много выше средней; средние по фракталу (точнее, по фрактальному уровню данного поколения) подчиняются ТВ, но они, ввиду отсутствия перемешивания между клонами, мало говорят о реальных численностях.

Характер этой случайности хорошо виден на рис. 11: разные реализации численности Z надкритического ветвящегося процесса изображаются в логарифмических координатах разными прямыми, расстояние W между которыми сохраняется постоянным и вызвано хаотическим поведением Z в первых поколениях; случайная величина W стохастична, однако ее дисперсия стремится к бесконечности, когда ветвящийся процесс стремится к критическому [Харрис, 1966, с. 27]. Об этом подробнее пойдет речь в п. 7-5.

### 6-4. Элементарная ячейка пространства

Философ И.А. Акчурин [1974; 1985; 1999] давно разрабатывает концепцию единства научного знания. В ее основе лежит идея топологического единства научной проблематики. Одним из главных он полагает понятие *окрестности*, которая может быть и локальной (окрестность точки), и глобальной (окрестность как условие бытия). Для локальной окрестности Акчурин в 1974 г. предлагал понятие *ситэ* и в качестве базового примера рассматривал ситэ Евдокса – Декарта, определившее, по его мнению, всю специфику европейской науки. Суть этого ситэ в том, что окрестность всякой точки объявляется устроенной просто: сколь бы сложен ни был процесс, в достаточно малой окрестности всякой точки всякая функция мыслится как линейная или (в точке излома) как кусочно-линейная.

Эта идея породила математический анализ Ньютона – Лейбница и позволила создать математическое естествознание, но в XX веке обернулась мощным тормозом. В частности, в ее рамках не нашлось места случайности – недаром классическая наука пыталась от нее избавиться.

В XX веке во всех точных науках стали разрабатываться "нелинейные методы", и с их помощью (если это можно счесть помощью) создаются очень сложные конструкции для описания явлений, суть которых вроде бы проста – например, изгиб балки или распространение огня вдоль спички. (Само название "нелинейные" указывает, по-моему, на дефект исходного подхода к природе как к чему-то линейному, что теперь настало время усложнить.) В таких конструкциях виден общий дефект – механизм описываемого феномена вряд ли на самом деле линеен в своей локальной основе, поэтому его надо не усложнять "нелинейностью", а исходно рассматривать вне идеи локальной линейности. То есть нужно новое ситэ.

Удобно ввести понятие **ситэ Мандельброта**, которое мы будем трактовать как *наблюдаемую в каждом масштабе структурированность*. Но структурировано — значит, не перемешано, т.е. такое ситэ вводится там, где ни на каком уровне нет перемешивания, нельзя ввести вероятности – даже условные.

Очевидно, что это понятие шире понятия фрактала, поскольку не включает ни самоподобия, ни дробной размерности (хоть и ориентировано на их описание). Не будучи готов дать полное определение такого ситэ, дам его примеры: это – устройство любого фрактала, а также устройство множества вещественных чисел – как на глобальном, так и на локальном уровнях.

Любой отрезок оси вещественных чисел устроен в точности так же, как отрезок [0, 1], и окрестность любой точки устроена одинаково в любом масштабе. Глядя "в лупу" на отрезок [0, 1], мы увидим точно такие же отрезки (например, отрезок [0, 0,1]), а глядя на любой из них "в микроскоп" – снова такие же отрезки (например, отрезок [0,1, 0,11]) и так далее. Каждый отрезок, большой и малый, содержит континуум точек (что это значит, мы обсудим позже, в п. 5), а каждая (вещественная) точка любого отрезка описывается как бесконечная последовательность цифр, причем почти каждая последовательность является случайной по Ламберту. Налицо самоподобие, но дробной размерности нет – каждый отрезок имеет единичную размерность и соответствующую линейную (т.е. одномерную) меру: у отрезка [0, 1] это единица, у отрезка [0, 01] это 1/10, у отрезка [0,1, 011] это 1/100.

Что касается примеров ситэ Мандельброта из природы, то они приближённы, поскольку не допускают бесконечного числа уменьшений или увеличений масштаба. Так, глядя на спичку и наращивая "увеличение микроскопа", мы сперва увидим волокна, затем клетки, затем клеточные органеллы, затем макромолекулярные комплексы, затем молекулы, затем атомы, затем элементарные частицы. Не обсуждая вопрос строения элементарных частиц, заметим, что самоподобия здесь нет, но ни в одном масштабе нет и линейности (ни в каком приближении).

Поскольку (как показывают рулетка и странный аттрактор) даже далекий от запятой знак существен при неустойчивом движении, ситэ Мандельброта можно рассматривать как источник стохастичности реальных явлений. Поэтому для понимания природы случайности необходимо подробнее изучить строение поля вещественных чисел.

## 6-5. Континуум в различных пониманиях

Рассмотрим отрезок [0, 1] вещественной прямой, т.е. отрезок между нулем и единицей. Всякую его точку принято считать выразимой через вещественное число, т.е. через последовательность цифр:

$$x = 0,a_1,a_2,...,a_n,..., \qquad (8)$$

причем некоторые рациональные числа содержат далее какого-то n одни нули. В математическом анализе известна теорема Дедекинда, утверждающая, что никаких иных чисел тут быть не может (точнее, что любая сходящаяся последовательность чисел вида (8) имеет пределом число вида (8)). Однако выше, в п. 2-9, мы видели другое – числа устроены хитрее, чем кажется, и, в частности, для понимания вероятности полезны гипервещественные числа. Откуда они берутся, если верна теорема Дедекинда? Оказывается, они берутся из иной, нежели обычная теория множеств, идеологии.

Пусть математика и гордится тем, что ее истины выше истин остальных наук, поскольку каждая имеет доказательство, но само понятие доказательства – объект нескончаемых споров. В частности, в математике есть школа (*интуиционизм*), отрицающая доказательство от противного как ничего не говорящее нашей интуиции. А доказательство Дедекинда именно таково – допустим, что число некой иной природы существует, и придем к противоречию. Более того, в теории множеств фундаментальную роль играет *диагональная теорема Кантора*, тоже имеющая только доказательство от противного. Она гласит, что вещественные числа невозможно перенумеровать. Вот ее доказательство.

Допустим противное, т.е. что все числа, выразимые в виде (8), можно перенумеровать, т.е. записать в форме

$x1 = 0,a_{11},a_{12},...,a_{1n},...$

$x2 = 0,a_{21},a_{22},...,a_{2n},...$

.........................

$xk = 0,a_{k1},a_{k2},...,a_{kn},...$

.........................

и придем к противоречию: легко построить число $y = b_1,b_2,...,b_n,...$, отличное от чисел $x_k$, но принадлежащее отрезку [0, 1]. Для этого надо взять $b_1$, отличное от $a_{11}$; $b_2$, отличное от $a_{22}$; ...; $b_n$, отличное от $a_{nn}$, и т.д.; тогда y окажется отличным от каждого из перенумерованных чисел хотя бы одним знаком. Это – знаменитый "канторов диагональный процесс" в его простейшей форме.

Выводы из этой теоремы Георг Кантор сделал самые решительные – 1) что множество x всех чисел, выразимых в форме (8), несчетно (или: его *мощность* выше счетной) и 2) что оно есть *континуум* – т.е. непрерывное множество всех точек отрезка [0, 1]. Это было сделано в 1891 году, и с тех пор не затихает спор о том, что же на самом деле Кантор доказал, а что провозгласил без доказательства.

Большинство математиков признало оба эти вывода. Меньшинство же указывало и указывает, что построено лишь одно число y, быть может и новой природы, но вовсе не множество большей мощности. Противоречие, основа доказательства Кантора, не обязано указывать на новый тип бесконечности; оно может указывать на незаконность любого этапа доказательства. В терминах логики: Кантор смешал внешнее отрицание с внутренним [Бычков и др., 1999].

Ошибка фактически стала довольно-таки ясна, когда в 1905 году Жюль Ришар провел аналогичное "доказательство" в рамках конечного числа чисел. Пусть перенумерованы все вещественные числа, задаваемые алгоритмами (правилами вычисления), каждое из которых короче ста слов. Задаваемые так числа могут быть иррациональными, т.е. число их знаков – бесконечным, но число таких правил (а с тем и чисел) конечно. Запишем их одно под другим – поскольку строк получится меньше, чем столбцов, то можно провести диагональный процесс. Проведем его, т.е. получим число, которое заведомо не содержится в данной записи. Однако оно должно содержаться, ибо строится правилом короче ста слов. В этом – парадокс Ришара [Клайн, 1984; Мартин-Лёф, 1975].

Как бы к нему ни относиться, ясно, что диагональная теорема Кантора требовала пересмотра, чего ни сам Кантор (он тогда уже отошел от математики), ни его приверженцы не сделали. Причины на то были разные, но все, по-видимому, носили мировоззренческий характер. Для Кантора в это время на первом месте были богословские аргументы [Клайн, 1984; Бычков и др., 1999], которых мы касаться не будем, остальных же, на мой взгляд, удовлетворяло то, что теорема соответствовала интуитивному представлению об устройстве чисел: вещественных качественно больше, чем рациональных; притом любое можно записать рядом цифр, пусть и бесконечным. А интуиционисты, отрицая канторово понимание континуума, ничего не могли предложить взамен.

Удивительно другое: как раз формалисты исходили тут из интуитивных (и дажа бессознательных) соображений, тогда как интуиционисты – из формальных (из дефекта доказательства Кантора). Это важно помнить – различие школ не в уровне формализации, а в понимании сути истины и ее доказательства, т.е. в философии математики.

С тех пор согласия не достигнуто, но выяснено много нового. В 1931 году австрийский логик Курт Гёдель доказал, что всякая формальная система неполна (обсуждение см. [Паршин, 2000]). После осознания этого факта теорему Кантора естественно, на мой взгляд, записать так: всякая процедура нумерации вещественных чисел неполна, поскольку упускает хотя бы одно число; никакого способа увеличить число упущенных чисел не указано. Еще через 35 лет появился нестандартный анализ (см. п. 2-9), который дает (тоже на мой взгляд) интуиции совсем иное удовлетворение: за счет гипервещественных чисел отрезок [0, 1] содержит качественно больше чисел, чем множество чисел вида (8).

Тот факт, что это множество не исчерпывает точек отрезка, был ясен, по сути, еще при Канторе, который сам построил пример множества, содержащего "канторов континуум" точек, однако занимающего нулевую часть отрезка, на котором оно располагается. Это – описанное в п. 1 множество Кантора. Поскольку оно не занимает никакой конечной части отрезка, можно (с интуитивной позиции) отрицать, что "канторов континуум" есть континуум в смысле непрерывного множества точек. Поэтому нам необходимо внимательно рассмотреть канторову аргументацию.

Кантор дал два доказательства того, что счетное множество не исчерпывает множества вещественных чисел. Первое (1874 г.) состояло в следующем. Он рассматривал произвольную последовательность веществнных чисел и доказывал, что существует число у, в ней не содержащееся. Для этого он брал отрезок между первым и вторым членами последовательности – если между ними окажется не более конечного числа членов последовательности, то роль у сыграет любая иная точка отрезка; если бесконечно, то брался меньший отрезок внутри первого и т.д., пока левые и правые концы отрезков не сомкнутся в точке, которая (доказывал Кантор) и есть у [Кантор, 1985, с. 20-21]. Историк математики Ф.А. Медведев писал, что это – первое доказательство несчетности континуума (там же).

Многие математики выступили против Кантора, и один даже назвал его шарлатаном [Клайн, 1984, с. 236]. Хотя их аргументация мне неизвестна (я нигде не видал конкретных ссылок на нее, поскольку историки анализируют исключительно работы сторонников Кантора), но легко видеть, что в данном доказательстве использовано очень сильное, ниоткуда не следующее и неясное интуитивно утверждение: если даны отрезок и бесконечное количество чисел, то про каждое можно сказать, содержится ли оно в отрезке. (Замечание для математиков: утверждение более сильно, чем просто принятие актуальной бесконечности и чем аксиома выбора, ибо утверждает возможность просматривать весь бесконечный ряд и делать заключение про каждое его число – входит ли оно в отрезок(*) .) Проще сказать, что несчетность континуума тут постулирована.

Второе доказательство (диагональным методом) тоже, как сказано выше, несчетности континуума не доказывает. Остается признать, что несчетность континуума – особый постулат, призванный удовлетворить нашей интуиции и оправдать принятые в математике непрерывные конструкции, без которых невозможна, кстати, математическая физика. Но если так, то постулату мы вольны придавать ту форму, которая лучше всего описывает явления – как физические, так и чисто математические. Сделаем это с помощью концепции дополнительности, поскольку это оказывается удобно для целей алеатики.

(*)Историк математики Е.А. Зайцев высказал мне уверенность, что под произвольной последовательностью Кантор подразумевал произвольную закономерность; при этом просматривать ряд не надо. Возможно, но тогда доказано лишь, что никакая формула не охватит всех чисел.

### *6-5.1. Континуум, случайность и дополнительность*

Эмоциональное принятие правоты интуиционистов становится, на мой взгляд, для всех возможным с принятием положений нестандартного анализа: на отрезке [0, 1] действительно качественно больше точек, чем в "канторовском континууме", и это можно выразить разными способами, в том числе и введением гипервещественных чисел. "Где помещаются они? Они помещаются между действительными, заполняя пустоты между ними. Но разве существуют такие пустоты? Это как посмотреть" [Успенский, 1987, с. 116].

Насколько знаю, "посмотреть" можно тремя способами. Первый, классический – по Кантору: "В классической математике континуум воспринимается как совокупность своих (вещественных – Ю.Ч.) точек" [Мартин-Лёф, 1975, с. 62]. С этой позиции гипервещественных чисел просто нет, но она неинтересна, поскольку оставляет важные нам вопросы без ответа (точнее, не видит самих вопросов).

Второй подход – конструктивистский. *Конструктивизм* – уточнение интуиционизма, исходящее из того положения, что реальный смысл имеет только такой математический объект, для которого указан способ его построения. Он полезен (и, по-моему, необходим) при обучении(*), но, увы, подход крайнего конструктивизма оказался близок первому: как писал Мартин-Лёф, "можно попытаться, как Марков и его школа, конструктивизировать теорию континуума, рассматривая его как совокупность его конструктивных точек", но этот путь бесперспективен (там же).

Поясню: А.А. Марков (младший), глава советской школы конструктивистов, около 1960 года предлагал ограничить рассмотрение вещественных чисел одними лишь конструктивными числами (см. его комментарии к книге [Гейтинг, 1965](**)); даже если это выполнимо, то увело бы нас от ответа на желаемые вопросы, поскольку лишь сузило бы поле чисел по сравнению с классическим, тогда как нам надо его расширить.

---

(*)"Конструктивистская точка зрения – в противоположность метафорической – та, что имеется по меньшей мере надежда, что если обучающая математика имеет дело с изготовлением мысленных конструкций, мы можем пытаться понять, какими эти конструкции могут быть, и искать какие-то пути (такие, как компьютерные программы...) помочь студентам создать эти конструкции" [Dubinsky, 1999, с. 557].

(**)Ведущий интуиционист голландец Аренд Гейтинг отрицал, что континуум можно составить только из таких чисел, каждое из которых "определяется законом, который по любому натуральному n дает полное предписание для вычисления n-го члена последовательности", и предлагал включать в континуум все числа, определяемые бесконечно продолжающимися последовательностями, причем "безразлично, каким образом определяются члены последовательности, посредством ли закона, свободным ли выбором, жребием или как-нибудь иначе" [Гейтинг, 1965, с. 43]. Как видим, к построению континуума привлечена случайность.

Третий подход, которому следовал сам Мартин-Лёф [1975, с. 116], умеренный конструктивист, являет собой "интуиционистская концепция континуума как среды свободного становления", т.е. такое понимание континуума, при котором число его точек заранее не оговаривается, а вытекает из каждой задачи свое. Этот подход "может служить оправданием понятия случайной последовательности, задуманного фон Мизесом и разработанного Вальдом и Чёрчем". Здесь нужны два замечания.

Во-первых, попытка Мизеса понять случайность через определение "коллектива" (см. п. 2-6) является по сути интуиционистской – так считают сами интуиционисты. Один из них, голландец Аннэ Трёльстра, исследуя "понятие случайной последовательности и независимости случайных последовательностей», писал: «Анализ в нашем (интуиционистском – Ю.Ч.) смысле этой концепции (не вполне удовлетворительный) был предпринят теоретиком вероятности Р. фон Мизесом...; в недавние годы М. ван Ламблаген писал об этом... [Lamblagen, 1992]... Ван Ламблаген доказывает, что даже если мы сможем развить теорию вероятностей на аксиоматической основе, стартуя от понятия вероятностной меры, вместо понятия случайной последовательности, то мы окажемся перед вопросом: что такое случайная последовательность – когда столкнемся с применениями теории вероятностей" [Perspectives..., 1998, с. 198].

Во-вторых, отличие третьего подхода от второго видно из следующей реплики Маркова-младшего на точку зрения Гейтинга (см. предыд. сноску): по Маркову, следует ограничиться только конкретно вычислимыми числами, для каждого из которых задан алгоритм вычисления, а свободный выбор и метание жребия допускать нельзя; и заявлял: "Что же касается соответствия нашему интуитивному представлению о континууме, то это представление настолько смутно, что едва ли можно всерьез спорить о том, какая теория более ему соответствует" [Гейтинг, 1965, с. 165].

Континуум как "среда свободного становления" – это числовая ось, на которой числа не заданы, но любое требуемое может быть вычислено (если оно вообще вычислимо). Таково, на мой взгляд, единственное продуктивное понимание континуума, если вспомнить, что слово это означает непрерывность. Ведь континуум "как совокупность своих точек" – понятие внутренне противоречивое, поскольку никто еще пока не сложил непрерывного отрезка из точек. Попытка Кантора оказалась всего лишь самообманом и подменой слов, а недавние рассуждения А.Н. Паршина [2001] наводят на мысль, что сложить отрезок из точек невозможно в принципе. Точнее, Паршин, опираясь на идею П.А. Флоренского, говорит о взаимодополнительности понятий точки и линии, несводимых друг к другу.

Как видим, линия раздела двух школ, более всего сделавших для понимания устройства числовой оси, проведена как раз по признаку отношения к случайности. Не следует думать, что вопрос этот – сугубо абстрактный и к реальному поведению случайности отношения не имеет. Отнюдь. В п. 5-2 мы видели позицию Успенского, который выразил уверенность в необходимости одновременного рассмотрения различных моделей одного явления. В том же параграфе его книги высказана мысль, что единый масштаб чисел неинформативен, что величины, бесконечно малые с одной точки зрения, оказываются с иной позиции конечными и что это оправдывает основную идею нестандартного анализа. Это значит, что как бы тесно мы ни лепили точки, процесс останется дискретным, и на каком-то этапе (в каком-то масштабе) дискретность окажется определяющей суть явления. Для биологии, где субмикрообъект (ген) своим изменением (возможно, случайным) изменяет макрообъект (организм), а иногда и мегаобъект (экосистему), это очень важно: различие масштабов здесь может составлять 15 десятичных порядков. А в физике – даже 30 порядков.

Как в природе, так и в математике непрерывный объект содержит точки, но не складывается из точек. Другими словами, непрерывность – иной взгляд, нежели точечный; точнее, взгляд, дополнительный точечному. Это приводит к мысли, что и двойственность вероятности (п. 5-7) – естестственное ее понимание, годное не для отдельных задач, а для алеатики в целом.

## 6-6. Случайность как число

Желание некоторых конструктивистов построить систему чисел, не обращаясь к случайности, эмоционально понятно: если знаки числа выбираются случайно (свободным выбором или по жребию), то неясно, каким образом локализовать числа (гарантировать их упорядоченность) и как гарантировать всюду плотное заполнение заданного отрезка числовой оси. Им хочется видеть каждую точку оси вычислимой. Однако вычислимые точки составляют малую (с определенной точки зрения, нулевую) часть любого отрезка числовой оси, а подлинно случайные (не содержащие никаких закономерностей) последовательности цифр невычислимы [Якобс, 1972, с. 213], и им соответствуют неконструктивные точки отрезка [0, 1]. Без понятия случайности числовую ось не построить (это видно уже из работы Бореля 1909 года), и умеренный конструктивист Мартин-Лёф [1975] не только вполне это понимал, но и значительно углубил данное понимание.

Мы уже видели, что само наличие вероятности у огромного множества случайных явлений следует из строения поля вещественных чисел. Однако этим фактом феномен случайности не исчерпывается (почему вероятность-частота не стремится к пределу? Откуда берется случайность без вероятности?), а с нестандартной точки зрения и само это поле, как видим, не исчерпывает чисел, составляющих числовую ось.

Налицо иерархия способов упорядочения чисел, расположенных на одной общей оси: целые – дробные, рациональные – иррациональные, алгебраические – трансцендентные, конструктивные – неконструктивные, вещественные – нестандартные. Все, кроме целых, заполняют эту ось всюду плотно (между любыми двумя дробями можно вставить дробь, между двумя алгебраическими – алгебраическое и т.д.), так что более детальное разбиение оси, чем на дроби, вроде бы, при поверхностном взгляде, ненужно (что первые критики Кантора и полагали). Далее, все числа, кроме целых, проявляют случайность в своем строении: многие числа длиной в N знаков (т.е. рациональные) невыразимы короче, чем текстом из N знаков. Нужна ли тут иерархия? Быть может, для алеатики достаточно одного-единственного расширения множества чисел – того, которое достигнуто введением дробей?

Нет, иерархия чисел нужна для описания случайности – вспомним хотя бы, что "счетные вероятности" Бореля описываются только теорией вещественных чисел (точнее, теорией меры Лебега), что вероятность как отношение гипернатуральных чисел (см. п. 2-9) даже и вещественным числом, вообще говоря, не является и что, тем самым, взаимодополнительность вероятности-меры и вероятности-частоты (см. п. 5-7) ясна тоже лишь в рамках нестандартного анализа.

Поэтому важно знать, в каком смысле какие числа случайны. Среди стохастических в наивысшей степени случайны все неконструктивные числа – они являют собой единственный строгий пример и единственный класс *имманентно случайных* чисел [Чайковский, 1985]. Подробно этот тип случайности будет рассмотрен в главе 8, здесь же заметим, что сложность случайности в каком-то смысле уменьшается, быть может – монотонно, от неконструктивных чисел к ряду натуральных чисел (который совсем неслучаен); при этом, что особенно важно, данное уменьшение иногда может быть измерено как "дефект случайности" – см. конец главы 4, а также Пояснение на с. 271.

Учтя сказанное, легко увидеть, что канторова классификация множеств на конечные, счетные и несчетные для алеатики неудобна (даже если отвлечься от описанных в п. 5 неясностей теории Кантора). Заявив, что мощность множества Кантора равна мощности точек отрезка, теория множеств весьма затруднила понимание не только устройства чисел, но и случайности. Более содержательно для нашей темы различать числа целые, дробные, иррациональные алгебраические, трансцендентные (понимаемые как корни более сложных, чем алгебраические, уравнений), неконструктивные и нестандартные; и быть готовым к тому, что в каждой новой группе случайность устроена иначе, чем в предыдущей. Кстати, качественный скачок сложности устройства случайности имеет место *внутри области счетных множеств*: при переходе от целых чисел к дробным вступает в силу «всюду плотность» и, соответственно, ситэ Мандельброта.

Полное понимание сравнительной роли различных типов случайности чисел в алеатике – дело будущего, а пока попробую осветить различие случайности чисел алгебраических и неконструктивных.

## 6-7. Случайность по Ламберту и по Колмогорову

Мир случайностей на самом деле оказался устроен хитрее, чем он выглядит в алгоритмической ТВ, о которой шла речь в главе 2. Бесконечную непериодическую (т.е. случайную по Ламберту) последовательность легко получить самым простым алгоритмом – например, извлекая квадратный корень. Налицо парадокс: алгоритмически неслучайное оказывается случайным статистически.

Неужели никто из авторов алгоритмической ТВ этого не заметил? Нет, конечно заметили и провели соответствующее исследование, итог которого изложил почти популярно немецкий математик Конрад Якобс [1972].

Случайность по Ламберту означает всего лишь отсутствие периодичности в последовательности знаков числа, что не исключает квази-периодичности (наличия длинных закономерных участков, достаточно регулярно повторяющихся). Так вот, все числа, полученные с помощью алгоритмов, либо периодичны, либо квази-периодичны, тогда как числа, подлинно случайные по Колмогорову – Мартин-Лёфу, невычислимы.

Встает вопрос: каких чисел больше? Мартин-Лёф [1975, с. 117–120] дал ответ – вычислимые (конструктивные) числа являют нулевую часть вещественных (на отрезке [0, 1] покрываются отрезками бесконечно малой суммарной длины). Наоборот, *типичны* числа со случайным чередованием знаков или, другими словами, хаотичность по Колмогорову эквивалентна типичности по Мартин-Лёфу [Шень, 1992, с. 126].

Алгоритмическая ТВ разработана в 1960-е годы, а в 1980-е наступило разочарование. Как писал теоретик статистики Ю.П. Адлер, подход Колмогорова – Мартин-Лёфа приводит "к критериям случайности, бракующим практически все известные генераторы (случайных чисел – Ю.Ч.), что, впрочем, неудивительно" [Иванова, 1984, с. 7]. Встал вопрос о пользе такого подхода. Установилось мнение, что "абсолютное определение случайности (randomness), которое представляется осуществлением главной цели фон Мизеса", Колмогоровым и Мартин-Лёфом в принципе достигнуто, но их результат "настолько неэффективен... что конкретное использование последовательностей, случайных по Мартин-Лёфу, невозможно" [Philosophy..., 1993, с. 145, 160].

В частности, число "пи", вычисленное до 100 тыс. знаков, оказалось (в отличие даже от числа "е") вполне случайным с точки зрения всех использованных статистических критериев [Иванова, 1984, с. 30], а ведь оно вычисляется алгоритмически. Новый мощный компьютер дал совсем поразительный результат: число "пи" вполне случайно до 134 млн знаков [Шрёдер, 2001, с. 336-337]. Иными словами, конструктивизм попался в ту же ловушку, которую сам заметил у оппонентов и которой хотел избежать: "эффективная вычислимость" оказалась столь же абстрактна и далека от практической применимости, как и принципиальное существование, доказанное неэффективно, негативно (сведением к противоречию).

И школе Колмогорова вскоре пришлось признать, что случайность по Колмогорову – лишь частный случай практически интересной случайности: "Вообще говоря, некоторый объект может рассматриваться как алгоритмически случайный, поскольку:

а) он не имеет никакого короткого описания;

б) он имеет короткое описание, но процедура восстановления... требует огромных вычислительных ресурсов;

в) он имеет короткое описание, по которому быстро восстанавливается, но описание это нам неизвестно" [Шень, 1992, с. 130].

Добавлю, что сомнительна сама идея называть случайным конечный ряд знаков, который нельзя описать короче, нежели записав сам ряд — многие закономерности короче записать, чем описать. Например: ряд номеров дней (считая с начала года) двунадесятых праздников православной церкви.

Однако общий итог развития алгоритмической ТВ вполне положителен, как для самой ТВ, так и для алеатики в целом. Кроме отмеченной в главе 2 стохастичности неалгоритмической случайности, отмечу принципиальный характер факта эквивалентности хаотичности по Комогорову и типичности по Мартин-Лёфу – типичными оказались неалгоритмические (невычислимые) числа. Этот факт представляется мне тесно связанным с упомянутой в начале главы типичностью хаотических траекторий.

Открытие динамического хаоса показало, как случайность возникает в неслучайной системе, а алгоритмическая ТВ открыла, что случайность лежит в основе чисел, которыми мы пользуемся, и что они случайны в разной мере. Далее, важное свойство чисел состоит в том, что почти каждое содержит бездонную кладезь информации.

Целая кладезь информации содержится в числе независимо от того, существует ли алгоритм для его вычисления и умеем ли мы сегодня его вычислять. Могут спросить: при чем тогда вообще алгоритмы? На это можно ответить, что они многое объясняют. Во-первых, алгоритм реализует ту информацию, на которое определение числа (например: число "пи" есть отношение длины окружности к диаметру) лишь указывает. Во-вторых, алгоритмы дают лишь псевдослучайность. Правда, иногда, как у числа "пи", она оказывается очень высокого качества (не удается найти закономерности), и причина этого пока неясна, но пониманием того факта, что в целом случайность по Ламберту – не вполне случайность в статистическом смысле, мы обязаны алгоритмической ТВ. А в-третьих, все наши теории только к алгоритмически вычислимым числам и относятся.

Иногда говорят, что в достаточно длинной последовательности знаков числа "пи" можно найти всё что угодно, вплоть до поэм Гомера (если читать ее как закодированный буквенный текст), но это неверно. Из того, что здесь возможно любое сочетание знаков, не следует, что оно тут в самом деле есть. Другое дело – неконструктивное (невычислимое) число: если знаки его действительно следуют независимо друг от друга, как исходы бросания монеты, то любая последовательность обязана встретиться. Гугол ($10^{100}$) знаков вполне достаточен чтобы ожидать встретить данную строфу из Гомера, но нет никакой возможности ее реально встретить, поскольку рассматриваемое число невычислимо – по крайней мере до тех пор, пока действует нынешнее понимание вычислимости. Даже имея ЭВМ, способную выдать гугол случайных знаков, мы не смогли бы сказать, какое при этом число вычисляем.

### 6-8. Случайность по Колмогорову и растянутые отображения

Куда двигаться дальше для понимания случайности и ее роли в мире? Первое, что приходит в голову – нельзя ограничиваться поиском каких бы то ни было предельных значений. Поскольку все наши реальные действия конечны, а многие ограничиваются всего несколькими испытаниями или шагами, то нам нужны теории, ясно говорящие, что дает тот или иной метод за определенное число шагов. Этому посвящена часть главы 7. Другой путь – пытаться понять различие между псевдослучайностями. Ведь если, как учит алгоритмическая ТВ, имманентную случайность реально увидеть нельзя, то все наблюдаемые случайности – виды псевдослучайности. Их надо различать, а затем классифицировать. Этим мы займемся в главе 8, а здесь скажу лишь немного об одном новом подходе к оценке случайности последовательностей цифр.

Израильский математик Одед Гольдрайх [Goldreich, 1999] исходит из малой эффективности колмогоровского подхода к случайности и причин ее видит несколько. Первая – там фактически исследовалась неслучайность, так что искомый феномен выступает как предельная ситуация иного класса явлений, а не как собственно предмет исследования. Вторая – неудачно само определение случайности числа как максимальной длины задающего это число алгоритма. Третья – в данном подходе нет подлинного интереса к тому, что знают, а чего не знают о процессе случайных испытаний участники этого процесса. К сожалению, Гольдрайх, в отличие от Колмогорова, чужд проблеме обоснования ТВ, поэтому исходит из наличия вероятности у исследуемых им случайностей, однако его подход все-таки интересен для нашей темы.

Сперва Гольдрайх вводит понятие числового генератора – это алгоритм, растягивающий короткую последовательность ("цепь") нулей и единиц в гораздо более длинную цепь посредством "эффективной процедуры". Здесь очевидно следование как конструктивистам (у которых, однако, числовой генератор определялся иначе – как некое правило, преобразующее всякое натуральное n в рациональное число [Гейтинг, 1965, с. 163], т.е. в n-ое приближение к иррациональному числу), так и теории динамического хаоса, тоже изучающей растянутые отображения.

Гольдрайх называет псевдослучайным генератор, который выдает на выходе цепь длины n, неотличимую от подлинно случайной(*) цепи той же длины n никаким вероятностным алгоритмом (из некоторого описанного им класса таких алгоритмов). Он подчеркивает, что неразличимость субъективна, поскольку зависит от класса допустимых алгоритмов и вычислительных возможностей эпохи. В качестве приемлемого псевдослучайного генератора Гольдрайх приводит программу, которая на каждом шагу возводит в квадрат результат предыдущего шага и оставляеет от полученного числа k знаков. Этот генератор давно изучен и имеет период порядка $2^{2k}$ [Иванова, 1984, с. 30-32], т.е. более миллиона шагов при k=10. Для сравнения отмечу, что квази-период числа "пи" неизвестен, но заведомо много больше ста миллионов [Шрёдер, 2001, с. 337].

Класс чисел, псевдослучайных по Гольдрайху, естественно, шире класса цепей, случайных по Колмогорову: "существуют вероятностные распределения, которые не равномерны (и даже не близки статистически к равномерному), но тем не менее неотличимые от от равномерного распределения посредством эффективной процедуры" [Goldreich, 1999, с. 1215]. Колмогоровскую случайность Гольдрайх именует онтологическим подходом (т.е. объясняющим суть явления), а свою псевдослучайность – поведенческим подходом (там же). Ему хватает своего подхода, поскольку он занят вполне определенной случайностной проблемой, которую ему задала *криптография* – наука о шифрах. К шифрам предъявляется требование не давать постороннему никаких статистических "зацепок", по которым он мог бы начать процедуру разгадывания шифра, т.е. текст должен выглядеть как абсолютно случайная (с точки зрения доступных на сегодня алгоритмов) цепь. С этой позиции Гольдрайх считает свой подход вполне успешным, хотя и признаёт саму позицию субъективной.

Итак, хотя случайность по Колмогорову и малополезна практически, она она оказалась чрезвычайно полезна и как эталон для сравнения с иными случайностями (например, с растянутыми отображениями), и как отправной пункт для понимания природы вероятности. Однако ни один тип случайности, рассмотренный в рамках теории алгоритмов, не приблизил нас к пониманию того, откуда берется и что являет собой случайность без вероятности. К ней и надо перейти.

## Глава 7. Случайность без вероятности и теория без предельных теорем

Даже если вероятность удается ввести вне области стохастичности (устойчивости частот), то приходится говорить о принципиально новой вероятности –

(*)Видимо, речь идет либо о цепи исходов для идеальной монеты, которую он называет равномерно распределенной (в гл. 3 мы называли это равновозможностью раскладок), либо о случайности по Колмогорову.

вероятности-мере, не эквивалентной вероятности-частоте. Ниже дана попытка обосновать этот тезис. Не сомневаюсь, что рано или поздно данный круг проблем привлечет внимание математиков, пока же предложу свои соображения.

### 7-1. Неустойчивость частот и распределение Коши

В главе 4 мы видели, как уменьшение неопределенности рождает вероятность, и тем самым убедились, что вероятностное – отнюдь не самое случайное. Вопреки общему мнению, к самому случайному вероятность никогда не относится – даже при наличии многократной повторности испытаний (а тем более при ее отсутствии). То есть стохастичность выступает как промежуточная ступень между детерминированными и совсем случайными явлениями.

Этот вывод противоположен общепринятому ([Петров, Яблонский, 1980; Алимов, Кравцов, 1992; Тутубалин, 1993]), гласящему, что невозможность ввести вероятность вызвана сочетанием случайного и детерминированного компонентов в одном явлении. (Замечу – оба вывода общи тем, что в обеих ситуациях дисперсия выше, чем в чисто вероятностных явлениях, и потому их путают.) В пп. 4-7 и 6-3 был рассмотрен пример случайности, менее регулярной, нежели стохастичность – простейший ветвящийся процесс; в нем частота неустойчива по Лексису.

Прежде всего – почему в природе достаточно часто наблюдается неустойчивость частот? Мало кто думал на эту тему. Даже О.Б. Шейнин, блестящий знаток истории вероятностей, указал только знаменитого Муавра, который вообразил хаос, где "события не будут стремиться ни к какому определенному соотношению"; но и Муавр отверг такую возможность как абсурд; Мизес тоже отрицал ее [Шейнин, 1988, с. 13]. Колмогоров [1991, с. 42] ее признавал, но исследовать тоже не стал.

Изредка вопрос затрагивается мельком в руководствах. Например, Б.В. Гнеденко признавал, что утверждение о существовании вероятности "является содержательным утверждением, нуждающимся в каждом отдельном случае в обосновании..." [Гнеденко, 1961, с. 17]. К сожалению, нет речи о том, как вести обоснование "в каждом отдельном случае" – ведь для этого сперва надо хотя бы поставить общую проблему о причинах устойчивости и неустойчивости частот.

Ранее (гл. 4) была высказана мысль, что устойчивость частот гарантируется тройной симметрией, а потому их неустойчивость связана с уменьшением симметрии случайностей. При этом стохастическими (имеющими вероятности) и максимально симметричными оказались, как мы видели в главе 6, крайности – имманентная случайность и жесткая псевдослучайность. Дело в том, что имманентная случайность подчиняется той же тройной симметрии, что и основные типы псевдослучайности. Несимметричные случайности как бы располагаются между ними.

Имманентная случайность проявляется при отсутствии взаимодействий, в так называемом *событийном вакууме* и все-таки проявляет те же свойства, которые характерны для случайностей, рождающихся при определенных взаимодействиях. Налицо альтернатива: либо событийный вакуум – фикция, т.е. не зависимых ни от чего событий попросту не бывает (и надо говорить не о событийном вакууме, а о "черном ящике взаимодействий" [Заславский, 1984, с. 215] как о причине гауссовости), либо он действительно существует, но тогда он явно обладает тем свойством, что возникающие там случайности симметричны. Точнее, и жесткая псевдослучайность, и событийный вакуум могут обладать общим экстремальным свойством, описанным в п. 5-5.

По-видимому, равновозможность так же выделена среди событий, как инерция – среди движений. Если на тело ничто не действует, оно движется по инерции; если ничто не влияет на случайное явление, оно проявляет равновозможность в смысле Я. Бернулли. Как гравитация искривляет физическое пространство, делая геодезические линии кривыми, вплоть до их замкнутости, так, по-видимому, взаимодействие событий (если оно не сводится к перемешиванию(*)) искривляет тройную симметрию случайности, вплоть до исчезновения вероятностей.

При этом возникает, насколько мне известно, всего два типа распределений – с симметричной колоколообразной плотностью (распределение Коши) и с резко асимметричной плотностью, ведущей себя при больших $x$ как гипербола. Естественно желание вывести этот факт из какой-то общей теории. Ее пока нет, но есть одно приближение к ней – теория устойчивых распределений, которой мы коснемся в п. 2. Но сперва рассмотрим распределение Коши.

Мы закончили п. 5-5 упоминанием того, что круг случайностей может быть шире, чем принято считать. Как расширить его? Проще всего сделать это путем рассмотрения случайных серий с бесконечными дисперсиями, т.е. – рассмотрения неустойчивости по Лексису. По теореме Хинчина (см. п. 3-5), бесконечные дисперсии совместимы с ЗБЧ, если случайные величины распределены одинаково и существует их мат. ожидание. Этот факт можно выразить так: некоторую асимметрию, связанную с нарушением равновозможности событий, компенсирует симметрия организации серий. Но что будет, если асимметрию увеличить еще более – так, что мат. ожидание тоже станет бесконечным?

Самый факт его бесконечности исключает выполнимость ЗБЧ, но остается возможность сходимости суммы случайных величин не к мат. ожиданию, а к какой-то иной константе. Оказывается, этого можно достичь, еще более повысив симметричность самих случайных величин: известен пример весьма симметричной случайной величины (она принимает лишь значения +k и –k с вероятностями, пропорциональными $1/k^2$), которая, не имея мат. ожидания, все-таки обладает суммой, условно сходящейся к некоторой константе [Стоянов,

(*)Перемешивание как раз и ведет к жесткой псевдослучайности.

1999, с. 156–157]. Однако сама вычурность примера говорит о том, что с исчезновением мат. ожидания мы вступаем в область случайностей совсем иной природы. В качестве первого примера такой случайности модифицируем рулетку Пуанкаре.

Пусть в рулетке Пуанкаре вместо стрелки крутится вертикальное двустороннее зеркальце, отражающее узкий луч от неподвижного источника. Если отраженный луч падает на круговой цилиндр, то рулетка в принципе не отличается от прежней (разве что отраженный луч обегает окружность вдвое быстрее, чем стрелка или зеркальце). Но если луч проецируется на прямую стенку, то равномерному распределению угла остановки зеркальца соответствует распределение на бесконечной прямой $x=\mathrm{tg}\ \alpha$, т.е. $\alpha=\mathrm{arctg}\ x$. Это – распределение Коши, введенное в п. 4-6.

Как видим, понижение симметрии физической задачи с круговой до двусторонней сделало случайную величину (точку падения луча в момент остановки) неограниченной, что обратило равномерное распределение (быстро сходящееся к гауссову, как мы видели на рис. 2) в распределение Коши, тоже внешне симметричное (колоколообразное), но резко асимметричное внутренне: исчезла равновозможность исходов, а с тем и устойчивость частот.

Любопытно, что распределение Коши возникает также и при несимметричном взаимодействии гауссовых в широком смысле(*) случайных величин. Например, по Коши распределена величина $\frac{X}{\sqrt{Y}}$, где X распределена нормально, а Y – по любому из распределений хи-квадрат, плотности которых даны на рис. 3 [Шметтерер, 1976, с. 96].

Распределение Коши явилось исторически первым примером устойчивого распределения случайной величины с неустойчивой частотой [Золотарев, 1983, с. 10]. Нам надо охарактеризовать класс устойчивых распределений как целое.

### 7-2. Устойчивые распределения неустойчивых частот

Закон распределения случайных величин называют *устойчивым*, если сумма (точнее, линейная комбинация(*) ) одинаково распределенных величин ока-

---

(*)Следуя работам С.Д. Хайтуна, будем называть *гауссовыми в широком смысле* распределения, имеющие конечные дисперсии (или, что по сути то же самое, "тонкие хвосты").

(*)Линейной комбинацией называется сумма, в которой слагаемые могут входить с различными коэффициентами. Поскольку в нашем случае все коэффициенты могут равняться 1, мы будем рассматривать просто суммы, но класс устойчивых распределений найден путем решения функционального уравнения для функций распределения, а это невозможно без выявления области возможных значений коэффициентов. Простое изложение см. [Золотарев, 1984, с. 25-27]. Тем самым, искомый класс найден приемом функционального анализа (как в свое время Гаусс нашел нормальное распределение), безотносительно к какой-либо теории случайности.

зывается распределенной по тому же закону, что и слагаемые. Среди устойчивых распределений только одно – гауссово – относится к миру вероятностных явлений, а все остальные – к миру неустойчивых частот.

Иногда теорию устойчивых распределений излагают в курсах ТВ [Ламперти, 1973; Феллер, 1984] (хотя в терминах нашей темы это – другой раздел алеатики), причем всегда делается упор на их сходство (на то, что они – обобщение гауссового, его "ближайшие родственники" [Золотарев, 1984, с. 5]); при этом остается в тени их фундаментальное различие: все описываемые устойчивыми распределениями, кроме гауссова, случайные величины неустойчивы по Лексису, т.е. описывают события, которые имеют вероятности-меры, но не имеют вероятностей, понимаемых в виде "пределов" частот (т.е. частот, сходящихся к некоторой небольшой области, как это сказано в п. 2-7).

Нас будут интересовать *устойчивые распределения неустойчивых частот*. Изучение их началось в 1920-х годах и, в интересующем нас смысле, почти завершилось в 1930-х и практически окончательно – в 1960-х. Сперва Пойа, еще не имея понятия устойчивости распределения, доказал, что в искомом классе только одно распределение – гауссово – имеет конечную дисперсию, затем французский математик Поль Леви ввел понятие устойчивости распределения и описал основные свойства устойчивых распределений, в чем к нему присоединился Хинчин. Наконец, в 1939-1940 годах был установлен основной для нашей темы результат – теорема Гнеденко – Дёблина (о ней ниже). Еще лет через 20 Мандельброт предложил использовать устойчивые законы для анализа гиперболических распределений (мы говорили о них в пп. 5-5 и 5-6). И хотя главный вопрос (почему гиперболические распределения столь обычны в практике) даже не был поставлен, дальнейшие исследования приняли характер "решения головоломок" (в смысле Куна) или, в лучшем случае, чисто прикладных.

Хотя почти все устойчивые плотности невыразимы через элементарные функции, но известно, что все устойчивые плотности (кроме гауссовой) убывают при больших *x* приблизительно как гиперболы вида

$$f(x) = x^{-1-u}, \quad \text{где } 0 < u < 2 \qquad (9)$$

и что все устойчивые плотности одновершинны [Золотарев, 1983; 1984]. Формуле (9) удовлетворяет при u=1 плотность распределения Коши. При u=2 распределение обретает конечную дисперсию, и, соответственно, сумма становится сходящейся не к гиперболе, а к гауссову распределению, согласно ЦПТ. Семейство этих плотностей зависит от четырех параметров, из которых нам важны два – показатель u скорости убывания f(x) с ростом x, а также параметр асимметрии b, обращающийся в нуль при полной симметрии плотности (например, для распределения Коши). Некоторые устойчивые плотности приведены на рис. 12 (где $\alpha$ означает наше u, а $\beta$— наше b).

Основное для нас свойство устойчивых распределений дается теоремой Леви: если распределение суммы независимых одинаково распределенных величин сходится к какому-то распределению F, то это F устойчиво [Ламперти, 1973, с. 100]. Такую сходимость случайных величин с бесконечными дисперсиями Стоянов [1999, с. 158, 160] назвал *обобщенным ЗБЧ*, не связав ее, однако, с устойчивостью.

Теорема Леви показывает, что устойчивость в некотором смысле есть обобщение гауссовости: если распределение суммы случайных величин, *имеющих* конечные дисперсии, в широких условиях сходится к гауссову (в этом состоит ЦПТ), то *не имеющих* (но одинаково и устойчиво распределенных) – к случайной величине, распределенной по тому же закону, или ни к чему не стремится.

Естествен вопрос: можно ли сходным образом обобщить ЦПТ, и ответ утвердителен. А именно, теорема Гнеденко – Дёблина гласит: сумма одинаково распределенных случайных величин сходится к негауссову устойчивому распределению тогда и только тогда, когда плотность f(x) распределения каждого слагаемого убывает с ростом x приблизительно как гипербола вида (9) (подробнее см. [Хайтун, 1989, с. 109]).

Почти все устойчивые плотности двухвосты. На рис. 12 видно, что исчезновение левого хвоста достигается при значении параметра: b=1 (крайняя асимметрия); при иных b кривые всегда двухвосты [Золотарев, 1983, с. 173; 1984, с. 31]. Лишь 4 устойчивых плотности удается выразить формулами [Золотарев, 1984, с. 30-31]:

1) Гаусса (u=2, зависимости от b нет);
2) Коши (u=1, b=0);
3) Леви (u=1/2, b=1).
4) Леви (u=1/2, b= —1).

Первые две плотности колоколообразны и симметричны, вторые очень близки к гиперболам. Кроме этих одномерных плотностей, хорошо изучено распределение Хольцмарка (u=3/2) [Золотарев, 1983, с. 55], описывающее гравитационное поле звезд в трехмерном пространстве.

Гиперболические распределения предложены во многих науках, естественных и гуманитарных. Например, принято считать, что гиперболически распределены люди по степени богатства (но не заработка) – распределение Парето, виды организмов по родам – распределение Виллиса, слова по их встречаемости в текстах – Ципфа, ученые по числу публикаций – Лотки, города по числу жителей – Саймона, землетрясения по мощности – распределение Гутенберга – Рихтера.

Сказанное заставляет обратить на устойчивые распределения особое внимание. Если вершина плотности расположена при $x$>>0, это создает иллюзию сходства с обычной ("гауссовой") статистикой, где вершина – нечто близкое к наиболее вероятному. Но иллюзия обманчива: в силу (9) дисперсия f(x) бесконечна, и ожидать реализации основной массы значений случайной величины вблизи абсциссы, соответствующей вершине, не приходится. А вот если вершина расположена при $x$<0 или около нуля, причем величина $x$ по своему смыслу положительна, то тогда правый хвост устойчивой плотности хорошо моделирует плотность гиперболического распределения (о них шла речь в пп. 5-5 и 5-6). Поэтому такое распределение хорошо описывается языком теории устойчивых распределений (на что впервые обратил внимание Мандельброт около 1960 года). Однако надо всегда иметь в виду, что сами по себе устойчивые плотности никогда строгими гиперболами не бывают – даже в тех вырожденных случаях, когда они однохвосты (b=1 на рис. 12; кроме того, при b= –1).

Бытует (но далеко не господствует) разумное предположение, что гиперболические распределения столь же важны для статистики, сколь и гауссово распределение. Однако объяснения их появления, сравнимого по степени общности с тем, как Пуанкаре толковал появление гауссова распределения (суммирование малых воздействий), не предложено.

Не раз отмечено, что сама по себе форма кривой ничего не говорит о законе, ее породившем. Более того, комбинируя приемы МС, можно одни и те же данные представить самыми разными распределениями: "не только логистическое, но также нормальное, Коши и другие распределения могут быть подогнаны под тот же самый материал" [Феллер, 1984, с. 69]. Тем не менее, принято считать, что факт наблюдения гиперболической плотности распределения случайной величины свидетельствует о наличии некоего особого порождающего механизма и, более того, что появление гиперболы в модели явления доказывает адекватность модели.

Наиболее характерна в этом отношении введенная физиками концепция *самоорганизованной критичности* [Bak e.a., 1988], авторы которой исходят из убеждения, что сам факт гиперболичности говорит о наличии самоорганизации в наблюдаемой системе. Даже если "система" является всего лишь кучей песка. И пусть математик, рецензируя популяризатора, справедливо сетует: <<Физическое понятие самоорганизованной критичности сведено к тривиальному "Крупные события встречаются реже мелких событий, так что отношение между ними может во многих случаях быть выражено простой математической формулой">> [Durrett, 1999, с. 674], – но и он не говорит, в чем должен состоять нетривиальный подход.

В связи со всем сказанным, выскажу свою позицию: гиперболическое приближение описывает случайные величины с неустойчивыми частотами. Ни о самоорганизации, ни о детерминированной компоненте случайного явления, ни вообще о каком-либо конкретном механизме гиперболическая плотность не свидетельствует, как не свидетельствует об их отсутствии гауссоида. Тот факт, что при обрушении кучи песка размеры отпадающих от нее массивов распределяются по величине согласно гиперболе [Бак, Чен, 1991], говорит о самоорганизации кучи не более, чем распределение ошибок по Гауссу говорит об отсутствии самоорганизации ошибок.

Даже наоборот – перемалывание всяких случайностей в гауссову (согласно ЦПТ) выглядит, на мой взгляд, намного более организованным, чем обрушение куч. Именно отсутствие той небольшой организованности (симметрии), какая обычна в стохастических процессах, и ведет, надо полагать, к росту хаотичности сверх той, что обычна для стохастичности.

Более удачно, на мой взгляд, указание на «характеристический масштаб» – в стохастических процессах он есть (например, количество вариантов, период полураспада), а в более хаотических (в том числе в кучах) его нет, вследствие чего наблюдаются «едва устойчивые структуры», рушащиеся от малейшего воздействия [Шрёдер, 2001, с. 489].

Но почему тогда тут говорят о самоорганизации? Потому, что самоорганизация тоже часто порождает (при наличии случайности в системе) гиперболическую плотность распределений наблюдаемых случайных величин. Хотя утверждение: "Степенные (гиперболические – Ю.Ч.) законы можно рассматривать как свидетельство самоорганизованной критичности" [Бак, Чен, 1991, с. 19] – еще предстоит обосновать или опровергнуть, однако наблюдение гиперболы действительно побуждает искать системную случайность, а она чаще всего выступает в форме самоорганизации.

Но не обязательно: ниже мы увидим, что гиперболу может порождать как уменьшение хаотичности ("слабый хаос" [Бак, Чен, 1991, с. 22]), так и увеличение ее сверх стохастичности (например, в ветвящемся процессе). И если, наблюдая гауссоиду, почти никто не пытается строить выводы о механизме явления, то не следует этого делать и при виде гиперболы – она может иметь самые разные причины или много причин сразу. Зато имеет смысл разграничить те условия, что порождают гиперболу, от условий, порождающих гауссоиду и другие колоколообразные плотности. Попробуем это сделать.

## 7-3. Поиск причин гиперболичности плотностей

Самое простое объяснение состоит в указании на положительную обратную связь, носящую, как известно, дестабилизирующий характер. Ее легко видеть, например, в ветвящемся процессе роста клона (см. п. 4-7): чем выше численность, тем выше и скорость ее роста; То же самоускорение можно усмотреть и в социальных процессах, протекающих по принципу "успех порождает успех". Правда, сама по себе положительная связь порождает вовсе не гиперболические распределения, а экспоненциальные, т.е. устойчивые частоты, но эту трудность сумел обойти еще Гаролд Юл, когда в 1924 г. положил в основу своей модели сразу два взаимоуравновешивающих ветвящихся процесса – порождение видов и порождение родов (см. п. 9-4.1).

Как было сказано в п. 5-5, существуют выводы гиперболических распределений из допущения экстремальности энтропии, но рассуждения при этом, мягко говоря, нестроги, а исходные посылки авторов неясны. Единственным их оправданием служит, по-моему, то, что идеология их следует за Гауссом, который в 1809 г. вывел подобным образом нормальный закон из "принципа наибольшего правдоподобия" [Gauss, 1855, с. 10, 113-121]. Но если Гаусс указывал на сделанные им допущения и их нестрогость, то нынешние авторы, соблазнившись простотой примитивного экстремального метода, видимо полагают, что открыли объективную истину; хотя никто из них не может даже сказать (в отличие от Гаусса), максимум или минимум он искал. Подчас один и тот же вывод одними дается как поиск максимума, а другими – как поиск минимума энтропии.

Все эти работы сомнительны как математически, так и содержательно (в смысле соответствия модели объекту), однако были неизбежны в качестве обоснования перехода исследователей от статистической ПМ к системной. С переходом исследователей к диатропической ПМ (см. гл. 8) подобные модели, полагаю, либо улучшатся качественно, либо отпадут сами собой.

Один из подходов к гиперболичности, идущий от Дж. Ципфа, является психофизиологическим, т.е. специфическим для гуманитарных наук: "Природа, говорим мы, в основном гауссова, социум (человек) негауссов" [Хайтун, 1989, с. 111]. Природа имеется в виду неживая, тогда как "биологические системы, занимающие, по-видимому, в этом ряду промежуточное положение" [там же], остаются фактически без описания. При всей ограниченности, такой подход удобен тем, что дает оправдание всевозможным экстремальным приемам вроде "принципа наименьшего усилия" [Zipf, 1949], осмысленным только для сознательных объектов.

Нужен, однако, более общий подход, чем психофизиологический, – хотя бы потому, что гиперболические распределения в неживой природе встречаются, и отнюдь не как исключение. Должен ли подход к гиперболичности быть вероятностным? Многие считают, не приводя аргументов, что вероятностями тут пользоваться можно.

Так, С.Д. Хайтун уверен, что "все методы измерения в социальных исследованиях имеют одну – вероятностную – природу" и даже предлагает конкретный метод, основанный на теореме Гнеденко – Дёблина [Хайтун, 1989, с. 8; 109-110]. Но беда в том, что из центральной предельной теоремы ЗБЧ следует, а из теоремы Гнеденко – Дёблина не следует. Она всего лишь утверждает, что предельное распределение обладает некоторым (красивым) свойством суммируемости, но ничего не говорит о том, будет ли у этого распределения, к примеру, мат. ожидание. Нет его ни у распределения Коши, ни у гипербол при $u<1$. А вероятность есть мат. ожидание частоты – читайте хотя бы Уиттла.

Завораживает неудачное слово "устойчивость". Лучше бы говорить – "инвариантность к свертке" (о свертках шла речь в п. 3-5), поскольку "устойчивые законы репродуцируют себя при свертках с точностью до линейной замены переменных" [Ламперти, 1973, с. 95] – вот и всё.

Надо понять, что устойчивость распределения имеет мало общего с устойчивостью движения: движение называется устойчивым, если малые возмущения мало меняют его траекторию; наоборот, малое изменение распределения хотя бы одного из слагаемых может привести к тому, что теорема Гнеденко – Дёблина просто не будет иметь места. В то же время гауссово распределение действительно устойчиво в физическом смысле – к нему сходятся суммы (и не только суммы) самых разных, в том числе и неодинаково распределенных величин, что и делает его основой МС. Замечу для математиков: ЦПТ имеет как интегральную форму, так и локальную, аналога которой мы здесь не имеем и потому не можем рассчитывать на сходимость плотностей к гиперболам.

В вероятностной природе гиперболических распределений уверен и А.Е. Якимов [2000, с. 25]: для него негауссовы распределения "состоят из описания устойчивого распределения предельных сумм независимых случайных величин, если это распределение рассматривать снизу – от формирующих его дестабилизирующих факторов... Это всего лишь теория одного, весьма достойного и достаточно общего примера из теории вероятностей, когда рассматривается по оси абсцисс значение действующего на объект дестабилизирующего фактора, а по оси ординат – количество таких факторов, это спадающая зависимость, по количественным оценкам близкая к обратной степенной зависимости". (Далее автор излагает свою трактовку гауссоиды, чего касаться не будем.)

Здесь смешаны разные понятия – устойчивые распределения из ТВ (они никогда не бывают "спадающими", а всегда имеют максимум, как мы видели в п. 2) и эмпирические гиперболические распределения, которые никто прежде не объяснял через суммирование "дестабилизирующих факторов" (и Якимов должен бы дать своему взгляду объяснение).

После всего сказанного ясно, что надо заняться выяснением свойств распределений неустойчивых частот, не ограничиваясь устойчивыми распределениями.

### *7-3.1. Память как источник неустойчивости частот*

Приняв во внимание, что стохастичность связана с забыванием начальных условий, и глядя на ветвящиеся процессы (а они известны и физикам, и химикам, и биологам, и другим), можно допустить, что неустойчивые частоты – общее свойство систем, несущих в себе память о своем прошлом, о происхождении [Чайковский, 1990, с. 86]. В частности, несет ее всякий ветвящийся процесс. Иной вид памяти являет собой *случайное блуждание*, которого мы уже касались во Введении.

Если, бросая много раз идеальную монету, мы следим не за частотой гербов, а за превышением числа выпадений герба над числом выпадения цифры, то процесс можно представить как случайное блуждание по прямой, при котором каждый шаг делается направо или налево с равной вероятностью. При этом блуждающий объект как бы помнит часть истории своего блуждания, и память состоит в том, что его положение на прямой есть алгебраическая *сумма* всех предыдущих шагов (в этом отличие от частотного подхода, где фиксируется *частное*). В полном противоречии с обыденной интуицией, объект почти всегда будет находиться далеко от начала блуждания, и в итоге мы получаем весьма хаотичную величину, график одной из реализаций которой (10 тыс. шагов) изображен у Феллера [1964, с. 100] и частично воспроизведен на обложке читаемой вами книги.

Хотя Феллер выбрал «самый умеренный» из имевшихся у него графиков, мы с удивлением видим, что первые 500 шагов блуждание происходит почти исключительно на положительной полупрямой (превышение гербов), причем примерно первые 120 и последние 240 шагов из пятисот – только на ней. Наоборот, около 80 шагов (от 180 до 260) траектория колеблется около нуля. Но пересечения нуля в дальнейшем становятся всё более редкими (от 3 тыс. до 6 тыс. – ни одного).

Эта случайная величина не является устойчивой ни по Колмогорову, ни по Леви. Правда, с нею связана довольно вычурная величина, описываемая распределением Леви [Феллер, 1964, с. 102] (его плотность изображена ни рис. 12б (β=1) и является однохвостой, хотя и не монотонной), но это обстоятельство не должно вводить нас в заблуждение, поскольку не описывает самого блуждания.

Если само блуждание устойчивым распределением не описывается, встает вопрос – как его описывать. Основную информацию дает исследование «точек возврата» (точек, в которых траектория блуждания пересекает ось абсцисс, т.е., иными словами, моментов, когда доля гербов в точности равна 1/2). Точки возврата являют собой случайную величину, дискретное распределение которой задается формулой

$$z = p(r, 2n) = 2^{-(2n-r)} C^{n}_{2n-r},$$

из которой видно – вероятность z того, что за время 2n траектория ровно r раз вернется к оси абсцисс, максимальна при r=o, r=1 и монотонно убывает при r>1 [Феллер, 1964, с. 97; Колмогоров и др., 1982, с. 89]. Тем самым, самые вероятные исходы блужданий – с одним пересечением или без единого пересечения, так что случайная величина, описывающая число возвратов неограниченно долгого блуждания, имеет монотонно падающую однохвостую плотность. Характер убывания весьма различен по r и по n, что видно из асимптотической формулы:

$$z \approx \frac{\exp(-r^2/4\pi)}{\sqrt{\pi \cdot n}}.$$

Как видим, при данной длительности блуждания n вероятность иметь число возвратов r очень быстро убывает с ростом r, что и было отмечено в начале Введения: начавший проигрывать проигрывает с большой вероятностью и дальше. Казалось бы, вероятность z должна расти хотя бы с ростом длительности блуждания n, однако она при этом тоже убывает, пусть и очень медленно. И вот итог: «Чем продолжительнее серия бросаний, тем реже возвращения в нуль» [Феллер, 1964, с. 98].

Приведенная асмптотическая формула фактически являет собой предельную теорему для блуждания по прямой. Она, как и теорема Кардано – Бернулли, может быть доказана чисто комбинаторно, т.е. из симметрийных соображений. Я намерен разобрать этот вопрос в работе [Чайковский, 2002], пока же замечу, что отмеченная неустойчивость частот отнюдь не говорит тут о выходе за рамки обычной ТВ, а является всего лишь итогом реализации простейшей марковской цепи (вероятности переходов для которой приведены у Феллера [1964, с. 370]).

Итак, введение памяти (марковости) в простейший гауссов (точнее, сходящийся к гауссову) процесс бросания монеты приводит к почти гиперболическому (по n) распределению для блуждания.

За последние 80 лет исследования в разных науках показали, что распределения, похожие на гиперболы, наблюдаются на столь различных объектах, что искать им частные объяснения вряд ли стоит. Наиболее общее понимание проблемы предложил Б.И. Кудрин, к работам которого мы обратимся в главе 9: *квази-гиперболичность естественно возникает всюду, где есть нежесткая система со слабыми связями, являющая собой в каком-то смысле целостность.*

Причина этой общности распределений пока неясна.

### *7-3.2. Неустойчивость, не связанная с памятью*

Пока что нам остается рассматривать характерные примеры. Первый дает распределение Коши: не связанное с памятью нарушение равновозможности дает не гиперболу, а нечто похожее на гауссоиду. Наоборот, все примеры, связанные с памятью, приводят к чему-то похожему на гиперболы. Обратного, т.е. что всякая гиперболическая плотность свидетельствует о наличии случайности с памятью, утверждать не берусь. Возможно, что упомянутая в п. 2 гиперболическая плотность фрагментов обрушения кучи песка не связана с памятью.

Одной из наиболее четко связанных с памятью о прошлых состояниях системой является язык. Если я загадал слово, взял наугад книгу с полки, открыл ее наугад и успешным исходом считаю нахождение загаданного слова, то никакой вероятности заранее назвать не могу. Даже если для всех книг полки составлен частотный словарь, он, как мы узнаем в главе 9, мало поможет, поскольку частоты слов неустойчивы.

## 7-4. Краевые распределения и квази-гиперболы

Мир негауссовых случайностей более мягок и разнообразен, чем гауссовых, тут нет привычной физикам четкой воспроизводимости массовых опытов, поскольку нет устойчивых частот. Однако математическое описание возможно. Читая учебник Уиттла, довольно легко понять, что дело в симметрии и в экстремальности: тройная симметрия перемалывает любой набор суммируемых случайностей, ею обладающий, в одну случайность – гауссову, экстремальную (и, в частности, самую симметричную). Можно пойти и дальше: признать, что всякая устойчивость частот есть разновидность симметрии [Марков В.А., 1988, с. 50].

Случайности, не обладающие тройной симметрией, не обладают, за редкими исключениями, устойчивыми частотами. Но возникают ли при этом гиперболические плотности? Если все устойчивые плотности одновершинны, то с этого и надо начинать анализ вопроса: какие из реальных (наблюдающихся на практике) плотностей одновершинны? Увы, я таковых назвать не могу.

При исследовании несимметричных негауссовых плотностей мы вместо гипербол повсюду встречаем **квази-гиперболы**, отличающиеся от гипербол наличием горба или нескольких горбов посреди склона [Кудрин, 1991а, с. 16]. На рис. 13 приведено несколько примеров, из которых наиболее интересен график распределения химических элементов в Солнечной системе (рис. 13а [Озима, 1990, с. 15]). Нам важен не столько пилообразный характер кривой (он скорее говорит, что по каким-то физическим причинам надо рассматривать распределение четных и нечетных элементов порознь), сколько наличие трех горбов, из которых железо-никелевый наиболее выразителен.

На рис. 13б [Фуфаев, 2000, с. 44] на электротехническом материале видно, каким образом в руках исследователя возникает гипербола, которой сам материал, на мой взгляд, не дает (подробнее см. далее, п. 9-6). Наконец, рис. 13в, материал для которого взят из работ [Willis, 1922; Yule, 1924; Williams, 1964] (а распределение видов рукокрылых по родам подсчитано мною), показывает на биологическом материале, что мы имеем дело с квази-гиперболами.

Кочующие из книги в книгу гиперболы либо являются ранговыми распределениями[*], а не плотностями распределений, либо, если это плотности, то они получены путем недопустимого огрубления данных, обычного при использовании полулогарифмического масштаба, предлагаемого "для большей наглядности", поскольку все горбы на нем сглажены почти или вовсе начисто. Ранговое распределение по определению монотонно убывает и потому здесь нас интересовать не может. А вот монотонно падающие почти гиперболические плотности нам интересны. Будем называть их **краевыми** плотностями, а их функции распределения – краевыми распределениями. Возможно, что все они описывают системы с памятью о прошлых состояниях.

Немногими, кто, вопреки моде, продолжают чертить плотности в линейном масштабе, много лет являются теоретик техники Б.И. Кудрин и его ученики – см. главу 9. Часто их данные ясны и без графиков. Таково распределение персонажей романа Михаила Булгакова "Мастер и Маргарита" по частоте их упоминания:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| число упоминаний | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| число таких лиц | 201 | 90 | 34 | 19 | 9 | 4 | 3 | 1 | 3 | 4 | 4 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1. |

[*]Ранговым называется распределение, в котором значения случайной величины расположены в порядке их убывания.

Далее каждая частота (число упоминаний) представлена не более чем одним персонажем [Кудрин, 1991, с. 253]. Последний микроподъем (двое упомянутых по 18 раз) неинформативен, зато подъем на частотах 9 – 15 являет собой явное отклонение от гиперболы.

Для сравнения – мой подсчет по "Словарю названий животных" (том "Млекопитающие") видов в родах отряда рукокрылых (летучих мышей), который содержит 899 видов в 173 родах:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| число видов в роде | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| число таких родов | 75 | 23 | 19 | 13 | 8 | 5 | 3 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1. |

Далее каждая частота (число видов) представлена не более чем одним родом. Здесь подъем относительно гиперболы (на частотах 9 – 14) не так ярок, но тоже являет очевидное отклонение от гиперболы.

За счет добавочной вершины (горба) краевая плотность является гиперболой лишь приближенно. Это отличает ее от устойчивых (по Леви) распределений, которые все одновершинны. Следовательно, краевые плотности сами по себе неустойчивы по Леви.

Это выглядит досадным неудобством, оплошностью природы, но если подумать, иначе и быть не могло: устойчивыми являются предельные распределения, мы же наблюдаем реальные феномены. И если гауссоида встречается на практике довольно часто, то это потому, что реальные суммы часто сходятся к нормальному закону довольно быстро и процесс этот, согласно ЦПТ, мало зависит от характера распределений слагаемых. В конце главы 3 говорилось также, что, вернее всего, случайности, порождающие гауссоиду, не только суммируются. Ни о чем подобном в мире неустойчивых частот пока не известно.

Однако краевые распределения тоже достаточно типичны. Они настолько типичны для больших систем, что этот факт нуждается в обосновании. В механике известно понятие "*грубая система*" (то же, что структурно устойчивая) – это система, не меняющая поведения при малом изменении параметров. В этом смысле системы, порождающие гауссову случайность, грубы, что и выражается в виде ЦПТ. Естественно допустить структурную устойчивость (грубость) краевых распределений, но в каком смысле? Ведь устойчивость по Леви явственно нарушается малым изменением показателя гиперболы. Хотя ныне данный смысл и неясен, но и сейчас можно довольно уверенно предположить, что всякое краевое распределение есть результат процесса более сложного, нежели суммирование независимых одинаково распределенных случайных величин.

Возможно, грубость краевых распределений будет доказана в форме какой-то предельной теоремы (ее можно будет назвать краевой предельной теоремой), но пока таковой нет, следует идти каким-то иным путем. Самый простой и очевидный путь – исследовать не предельное поведение, а конкретные текущие значения частот.

## 7-5. С предельными теоремами и без них (анализ текущих значений)

В главе 3 мы видели, что сходимость к нормальному распределению, гарантируемая в силу ЦПТ, бывает иллюзорна. Таких примеров можно привести много, но не менее важно, что под сходимостью в ТВ понимают, как правило, совсем не то, что в математическом анализе, т.е. не приближение одной функции к другой (так называемая поточечная сходимость), а всего лишь сближение их по какой-то обобщенной величине, притом весьма нерегулярное (так называемая *слабая сходимость*). Например, к пределу может стремиться мат. ожидание или значение какой-то одной вероятности. В исследованиях негауссовых устойчивых законов идея слабой сходимости доминирует [Круглов, Королев, 1990], а ведь прикладник часто думает, что речь идет именно о поточечной близости случайных величин.

Кроме того, всегда ли надо искать какие-то предельные формулы, даже если они описывают важные нам величины? Хотя в самой ТВ господство идеи предельных теорем для сумм общепризнано ("Среди специалистов считается общепринятым, что предельные теоремы для сумм независимых случайных величин определяют лицо и выражают познавательную ценность современной теории вероятностей" [Круглов, Королев, 1990, с. 9]), однако при использовании вероятностных идей в практике обычно важны не пределы, а реальные значения средних величин за реальное число опытов. Если сходимость медленна и в ее ходе текущие значения средних и дисперсий сильно смещаются, поиск предельных значений для практики малоосмыслен. Если же и условия, в которых наблюдается массовое явление, то и дело меняются (таковы многие биологические и, в частности, все эволюционные задачи), то предельный подход просто бессмыслен.

Словом, основных изъянов теории, основанной на предельных теоремах, видится мне два – первый: анализ почти всегда ограничивается интегральной сходимостью вместо локальной; второй: предельная ситуация подается вместо анализа реального поведения реального объекта во времени. Как же быть? Если возможен прямой подсчет, то лучше его проделать. Приведу пример, показывающий возможность эффективного исследования текущих значений случайных величин.

Четверть века назад мне удалось таким путем выяснить все важные для моих тогдашних целей черты поведения случайных численностей клонов [Чайковский, 1977а,б]. Большинство из них совсем не видны из формул для предельных величин. Суть проделанного состоит в следующем.

В то время, как и сейчас, в математической генетике было принято оценивать качество генотипа по его *селективной ценности* s, которая определяется так: 1+s – это среднее число потомков на особь на поколение. При s=0 ветвящийся процесс является критическим, а при s>0 – надкритическим. Еще Фишер в 1922 г. показал, что предельном случае (бесконечное время) малое преимущество клона ($0<s<<1$) гарантирует ему некоторую вероятность вытеснения конкурента, преимуществом не обладающего. Надо было исследовать ход процесса в биологически более реальных допущениях, и тут оказалось, что, вопреки Фишеру, выживание или гибель клона определяется не его селективной ценностью, а посторонними обстоятельствами, в частности, хаотичностью.

Первый подход [Чайковский, 1977а] состоял в качественном рассмотрении процесса конкуренции двух клонов как матричной игры – это позволило преодолеть трудность, связанную с тем, что генотип, удачный в одних ситуациях, неудачен в других. Приведу выдержку из Заключения данной статьи.

<<Следует признать, что биологически бессмысленно рассматривать постоянные селективные ценности $s=const>0$. Следует признать, что s, там, где ее вообще можно ввести, есть функция многих переменных, способная менять знак как по ходу роста клона..., так и при повторной реализации одного и того же процесса.

Заметим, что даже в матричноигровой модели, где искусственно зафиксированы почти все параметры, успешность клона все-таки выражается не числом, а функциональной матрицей. Как известно, любая матрица A, составленная из действительных чисел, характеризуется единственным числом – ценой игры v(A) – задающим соотношение сил игроков игры A (см. любой учебник теории игр, например [Льюс, Райфа, 1961]); любая другая характеристика игры с помощью числа будет характеризовать не игру как таковую, а какой-то определенный способ играть в нее, поэтому универсальная характеристика конкуренции двух клонов должна основываться на цене игры... Однако цена игры реализуется непременно лишь в игре оптимальных игроков, т.е. игроков, знающих все элементы игровой матрицы и умеющих рассуждать за противника, тогда как у клонов просто нет средств для оптимального поведения: показано, что для нахождения оптимальных стратегий в игре, в которой игроком является однородный коллектив, члены коллектива должны обмениваться достаточно сложной информацией [Чайковский, 1971], что в нашем случае невозможно. Приходится признать, что в рамках модели не существует числа, характеризующего превосходство клона.

Впрочем, в поисках числа s нет необходимости, так как для выживания клону вовсе не нужно иметь высокого значения какой-либо средней величины, характеризующей скорость размножения, – ему необходимо и достаточно сохранить при всех t ненулевую численность>>.

Второй подход [Чайковский, 1977б] был **мажорирующим** – хотя перед этим было показано, что число s нельзя ввести содержательно, но это не мешает использовать идеологию селективных ценностей для отрицательных суждений, если сделать в модели все допущения односторонними. А именно – "желая доказать некоторый факт, будем делать только те упрощения, которые заведомо не благоприятствуют доказательству...; если факт удастся доказать в этих допущениях, то он заведомо верен и без них" (с. 1478). Доказательству же подлежал тот факт, что малых различий в селективных ценностях недостаточно для эффективного различения судеб их носителей.

Принято считать, что всякий обладатель положительного s рано или поздно вытеснит всех обладателей нулевого и отрицательных s, оказалось же, что разрастающийся и вымирающий клоны ведут себя слишком сходно в течение первой сотни поколений, так что судьбы их определяются отнюдь не их селективными ценностями. Это вызвано тем, что рассматриваемый ветвящийся процесс близок к критическому, а потому хаотическая компонента W (см. п. 6-3 и рис. 11) весьма нерегулярна.

Подход был чисто количественным: сравнивались судьбы клонов за первую сотню поколений. Выяснилось, что феномен неоднозначности частоты (компонента W) практически целиком определяет судьбу каждого клона (его выживание или гибель) в первые десятки поколений, определяет безотносительно к различиям в селективной ценности клонов. При этом почти все они вымирают. Тем самым, различие в селективных ценностях существенно лишь для тех клонов, которые выжили в этом неизбирательном (и практически – нестохастическом) случайном истреблении, затрагивающем подавляющее большинство клонов. Наоборот, в ходе первых десятков поколений в выгоде окажется тот клон, у кого меньше разброс численностей. Подробнее см. далее, п. 9-7. Всё это естественно приводит к той мысли, что в алеатике как целом место предельных теорем должно быть более скромным, чем в ТВ.

### *7-5.1. Дисперсии слишком большие и слишком малые*

До сих пор все невероятностные эффекты касались тех случайностей, где дисперсии неограниченно растут и тем самым не дают сформироваться устойчивым частотам, трактуемым как вероятности. Однако существует явление прямо противоположное, оно относится к так называемому *эффекту Шноля*. Сам эффект многопланов, и потому его естественно рассмотреть в главе 8, здесь же ограничимся одной его деталью.

В работе [Шноль и др., 1998] приведены графики плотности распределения случайной величины, являющейся числом актов радиоактивного распада в единицу времени. Всем давно известно, что эта плотность выражается дискретным законом Пуассона, причем с ростом числа точек кривая приближается к гауссоиде, но сорокалетние опыты убедили авторов, что гауссоида есть результат огрубления кривой, имеющей ясную и устойчивую пилообразную форму, т.е. гауссоида как бы оторочена множеством узких локальных пиков. Авторы пишут:

<<Относительная узость "пиков" и "впадин" означает, что полиэкстремальность не является следствием вероятностных причин: ширина этих экстремумов в соответствии со статистикой Пуассона должна быть порядка $\sqrt{N}$, где $N$ среднеарифметическая величина. Значения $N_i$ для соседних экстремумов

очень близки и соответствующие распределения оказались бы взаимно перекрыты>> [Шноль и др., 1998, с. 1132].

Действительно, каждый пик можно представить своей тонкой гауссоидой, а тонкая гауссоида описывает плотность случайной величины с малой дисперсией. Но почему их перекрытие должно обязательно означать невероятностную природу регистрируемых случайностей? Это "обязательно" только с той общепринятой точки зрения, что весь наблюдаемый процесс являет собой одну-единственную случайность, получающуюся в силу ЦПТ. А ведь ЦПТ имеет смысл лишь в предположении, что суммирование независимых случайных величин – единственная процедура, формирующая итоговое распределение, итоговую случайную величину.

Авторы сами абзацем выше подчеркивают, что найденная ими закономерность "не противоречит подчинению процесса радиоактивного распада статистике Пуассона", потому что "существующие статистические критерии согласия гипотез нечувствительны к тонкой структуре". Другими словами, авторы вполне понимают, что общепринятая точка зрения основана всего лишь на огрублении данных, но почему-то делают очень общий вывод о невероятностной природе наблюдаемых пиков.

По-моему, дело и проще, и сложнее. Проще, поскольку ясно видна та дыра в ТВ, которая не позволяет даже подступиться к объяснению описанных кривых. Это – господство интегральных методов и идей, тогда как здесь исследуется поточечная сходимость(*). Сложнее, поскольку для ликвидации дыры потребуется новая теория.

### *7-5.2. Многовыборочный метод*

Если сказанное выше верно, то оказывается под вопросом и господствующее в математической и практической статистике убеждение, что истина обязательно выяснится при достаточном удлинении выборки, т.е. в пределе. Будучи далек от данного круга проблем, ограничусь отсылкой к двум дискуссионным статьям специалистов, где, справедливо возражая против необдуманного повсеместного применения стандартной ("фишеровской") статистики, авторы [Алимов, Кравцов, 1992; Тутубалин, 1993] призывают использовать *многовыборочный* метод, гораздо более простой и надежный.

Суть его можно грубо пояснить простым примером. Если монета брошена 500 раз и упала гербом 280 раз, надо ли признать ее несимметричной? Вместо сложных и не дающих однозначного ответа манипуляций с доверительными интервалами(*) метод предлагает взглянуть на каждую сотню бросаний: если

(*) На этот факт мое внимание любезно обратил С.А. Иванов.

(*)Доверительный интервал (см. о нем любой курс статистики) играет в математической статистике ту же роль, какую в ЗБЧ (в трактовке Пуассона и позже) играет вероятность P, с которой справедлива оценка вероятности p. Отказаться от доверительного интервала – значит отказаться от толкования объективной вероятности через субъективную.

гербы преобладают в каждой сотне, то монету надо признать несимметричной, если нет – воздержаться от суждения.

Примером многовыборочного метода может служить и исследование отношения мальчики/девочки при рождении. Само соотношение меняется от работы к работе очень сильно – от 43/42 до 14/13. И это для огромных выборок (целые страны и исторические периоды). Поэтому никто не сомневается в достоверности самого феномена (преобладание мужских рождений), хотя о его механизме до сих пор неизвестно ничего, а размер самого эффекта столь изменчив, что допускает самые разные трактовки.

Для оценки эффективности многовыборочного метода надо выяснить, как он обходится с теми парами, в которых соотношение оказывается обратным. Формально говоря, само наличие хотя бы одной такой пары требует отказаться от суждения, однако ясно, что этого никто не станет требовать, если суждение в целом очевидно. Так, еще Граунт, первооткрыватель отношения "мальчики/девочки", обнаружил, что статистика одного провинциального церковного прихода демонстрирует для одного короткого периода преобладание женских рождений. Он ничего не знал о правилах статистической обработки наблюдений, но не стал сомневаться в верности феномена преобладания мужских рождений, а ограничился замечанием: "И возможно, что в некоторых других местах рождается больше женщин, чем мужчин, что, ввиду изменчивости пропорции, я вновь советую изучить любопытным" [Graunt, 1939, с. 71].

Говоря попросту, Граунт признал верность феномена интуитивно. Как мне представляется, то же самое делается и нынешними исследователями, но это свое убеждение они склонны прятать за актом выбора подходящего "доверительного" интервала. Лучше не делать этого, а прямо признать интуитивный характер всякого, в том числе и статистического, вывода. Поскольку всякий выбор – процедура невероятностная, на ней и имеет смысл теперь остановиться.

### 7-6. Свободный выбор как случайность без вероятности

О свободном выборе как случайности размышлял еще Лейбниц. Вот как резюмировал его мысли израильский философ Эльханан Якира: "Бог Лейбница – не Демиург, обозревающий познаваемый и вечный мир", "Бог не выбирает индивидуальные возможности; он выбирает между целыми совозможными системами, которые являют собой возможные миры, каждый из которых обусловлен определенными первичными намерениями Бога"; и именно этот факт неполной детерминированности "допускает случайность частных феноменов" [Yakira, 1989, с. 74, 81].

Что касается математики произвольного выбора, то ей едва сто лет. Точнее, ее рождение можно видеть в работах Эрнста Цермело 1900-х гг. Работы касались двух тем.

В рамках ***первой*** Цермело положил начало теории игр, т.е. моделированию конфликтных ситуаций. В любом конфликте возникает неопределенность, связанная с тем, что каждый его участник, выбирая способ действия, должен учесть намерения противника (противников).

Основным в теории игр стал (уже после Цермело) принцип *минимакса*. Он постулирует, что каждый игрок действует так, чтобы гарантировать себе максимальный возможный выигрыш в наихудшей для него игровой ситуации. Проблема свободы выбора не столько решена тут, сколько обойдена (как в ТВ обойдена проблема случайности испытания): решение достигается путем введения принципа, вроде бы очевидного, но на деле редко применимого и, главное, ничего не оставляющего от факта игры. Ведь всякий процесс игры есть последовательность актов свободного выбора.

Если в ТВ инвариантом, лежащим в основе теории, является вероятность, то здесь в роли инварианта выступает результат применения принципа минимакса; он именуется *решением игры*. Решение игры – это набор оптимальных стратегий каждого игрока и их средних выигрышей. В тех играх, где решение существует, оно играет ту же роль, что в серии испытаний играет вероятность.

Сама идея ввести принцип, общий для всех участников игры, означает, что идеальные игроки мыслятся как образующие единую систему, т.е. идея реализует **четвертую** ПМ. Реальные же игроки не могут ни точно решить игру, ни отказаться от своих эмоциональных предпочтений, зато хотят играть (переживать процесс игры). Поэтому неопределенность сохраняется, что и делает игру игрой, т.е. совокупностью актов свободного выбора. Игры в этом смысле – возможный предмет будущего интереса ученых в рамках **шестой** ПМ, видящей мир как систему предпочтений.

До сих пор анализ случайности мы вели путем ее детерминизации, т.е. путем выявления инвариантов в случайном. Таковы судьба, шифр, скрещение путей, вероятность, устойчивая частота, устойчивое распределение, решение игры, предпочтение. Казалось бы, иначе анализ и не может вестись, однако нельзя забывать, что случайность по сути своей противоположна инварианту. И как раз ***вторая*** тема Цермело дала толчок к движению в направлении отказа от инвариантов: он в 1904 г. заявил, что многие теоремы можно доказать не иначе, как признав возможность *выбрать* из каждого бесконечного множества по одному элементу.

Это допущение является особой аксиомой, принятие или непринятие которой меняет суть многих теорий. Подробнее см. [Клайн, 1984; Медведев, 1982]. Выбор можно представлять себе и как происходящий по какому-то правилу, и как свободный, т.е. произвольный. Первый относится скорее к теории алгоритмов, а второй как раз и относится к нашей теме. Можно сказать, что ТВ (вместе с теорией устойчивых распределений неустойчивых частот) – та часть алеатики, где нет свободного выбора.

Произвольный выбор сразу же был использован *теорией меры.* Понятие линейной меры, призванное обобщить понятие длины на сколь угодно "рваные" подмножества множества точек отрезка, оказалось удобным для описания простой случайности и легло позже в основу ТВ. А именно, последовательность нулей и единиц можно представить себе и как запись серии бросаний монеты, и как некоторое число отрезка [0, 1]. Совокупность всех серий (континуум Кантора – см. п. 6-5) рассматривается тогда как эквивалент этого отрезка; т.е. единичная мера (длина отрезка) оказывается вероятностью *полного* события, состоящего в том, что наверняка реализуется хоть какая-то серия. С этой точки зрения можно, вместо процедуры бесконечных бросаний, изучать устройство множества действительных чисел. Идея эта, по-видимому принадлежащая Борелю, и породила ТВ в ее нынешнем понимании.

Если охватить мысленным взором *все* подмножества, на какие можно разбить отрезок, то подавляющая их часть будет выглядеть абсолютно случайными; с этой позиции идея Бореля (блестяще развитая в 1933 г. Колмогоровым) естественна. Более того, она подтверждена практикой: ТВ сносно описывает широкий круг явлений. Однако в ТВ нет произвольного выбора: как многими говорилось и не раз отмечено в части 1, каждое подмножество берется в расчетах ровно один раз. Это значит, что для описания свободного выбора математика должна выйти за рамки ТВ. В самом деле, если ввести произвольный выбор в теорию множеств, то среди подмножеств множества точек отрезка окажутся такие, что не имеют меры.

Пример этого дал в 1905 г. Джузеппе Витали. Замкнем единичный отрезок в окружность. Назовем две точки родственными, если расстояние между ними рационально, и чуждыми, если оно иррационально. Счетное множество всех точек, родственных данной, назовем семейством. Очевидно, что два семейства либо совпадают, либо не имеют общих точек. Вся совокупность точек окружности при этом – объединение несчетного множества семейств. Выберем из каждого семейства по одному представителю $y$. Множество $\{y\}$ всех этих представителей будет неизмеримым – доказательство см. например в книге [Шилов, 1960, с. 148].

Увидеть, каким образом в этом примере рождается невероятностная случайность, легко. Рассмотрим действительное число $z$, образующее семейство, как точку, на которую указала, остановившись после долгого вращения, бесконечно тонкая стрелка, ось которой – в центре нашей окружности. Это – обычная вероятностная процедура, причем случайная величина $z$ распределена равномерно на единичном отрезке. Чтобы получить произвольное число этого семейства, надо прибавить к $z$ произвольное рациональное число $m/n$, т.е. выбрать произвольно пару натуральных $m$ и $n$. Во всей совокупности актов выбора пар нет распределения вероятностей, т.е. акт выбора не имеет вероятности-меры. Дело в том, что ввиду произвольности выбора все $y$ могут оказаться на любом (в том числе и сколь угодно малом) отрезке.

При вероятностном выборе это невозможно, поскольку там каждое подмножество рассматривается вместе с симметричными ему (по всем мыслимым типам симметрии) подмножествами; в этом, по сути, и состоит лежащий в основе ТВ принцип равновозможности. Т.е. *добавление произвольного выбора к равновозможности уничтожило вероятность*, понимаемую как меру.

В этом значение примера Витали для алеатики: ведь предыдущие примеры демонстрировали только отсутствие вероятности-частоты, поскольку касались одних лишь устойчивых распределений, где вероятность-мера *постулировалась* (хоть и не равнялась, в силу бесконечности дисперсий, вероятности-частоте).

### 7-7. Неизмеримость без свободы выбора

Может создаться ложное впечатление, что случайность без вероятности – специфика психических явлений. Поэтому важно иметь примеры, показывающие, что душевная деятельность – не единственный источник свободного выбора, а сам свободный выбор – не единственный источник неизмеримости. В нестандартном анализе (о нем сказано в гл. 2) легко видеть неизмеримые множества, имеющие отношение к нашей теме.

Вот пример. Приняв, что множество всех точек единичного отрезка [0, 1], записанных в t-ричной системе, есть запись множества исходов всех возможных бесконечных серий бросаний симметричной t-гранной кости (об этом см. в главах 2, 4 и 6), имеем: мера (длина) всего отрезка есть вероятность реализации хоть какой-то серии и равна 1, а вероятность получить любую заданную серию равна нулю. Нулю же равна вероятность получить любой набор (различных серий) конечной длины. Это значит, что мы, ограничив длину набора каким-либо числом n, конечным или счетным, получаем множество точек отрезка количеством, конечным или счетным, получаем подмножество множества точек отрезка [0, 1], имеющее нулевую меру; если же количество не ограничивать, то получается множество либо нулевой (таково множество Кантора — см. с. 124), либо положительной меры. Считается, что какая-то мера обнаруживается всегда. (См., впрочем, Пояснение на с. 271.)

При обычном (стандартном) понимании действительного числа иных возможностей нет, но в нестандартном анализе мы можем ограничить длину серий гипернатуральным числом N. Можно также фиксировать N-й знак во множестве бесконечных серий, например – взять все числа, у которых на N-м месте стоит 1. При этом "множество (стандартных) действительных чисел и будет неизмеримо по Лебегу (... доказательство несложное: оно основывается на том, что, грубо говоря, любой интервал заполняется этим множеством наполовину)" [Успенский, 1987, с. 56]. Поясню: во-первых, наполовину интервал заполняется только при t=2; во-вторых, мера данного подмножества складывается из интервалов, целиком принадлежащих этому подмножеству.

Не входя в спор о том, можно ли считать стандартными числа, у которых фиксирован гипернатуральный знак, подумаем, что же такой пример может значить для алеатики. По-моему, что он может быть полезен там, где приходится иметь дело одновременно с числами, различающимися на много порядков, так что одни по отношению к другим выступают как бесконечные, но в то же время сами по себе должны изучаться как конечные. Это мы увидим в главе 9.

Однако с позиций интуиционизма и, особенно, конструктивизма (см. гл. 6) приведенные выше примеры неизмеримости ничего не значат как неконструктивные – в том смысле, что фактически построить соответствующие множества нельзя. Поэтому важно отметить, что конструктивный пример неизмеримого множества тоже существует [Мартин-Лёф, 1975, с. 113]. Он намного более сложен.

### 7-8. Пропенсивная случайность

Принятие случайности как свободного выбора в качестве основной, определяющей наиболее важные случайные явления мира, означает переход к новой ПМ. В п. 5-2.1 уже была, в порядке прогноза, обрисована креативно-пропенсивная ПМ.

Первоначально (1957, 1965 гг.) Поппер ввел понятие пропенсивности как взгляд на вероятность. В виде базового примера он рассматривал игральную кость, а вероятность выпадения грани или комбинации граней видел как предпочтение, оказываемое игровой ситуацией на полет кости; это предпочтение он называл "диспозиционным свойством" и сравнивал с силой в ее физическом понимании [Поппер, 1983, с. 422 и далее].

Примерно так же рассматривали пропенсивность и его первые последователи. Например, Д. Меллор писал, что имеет дело только со статистической вероятностью, что его интересуют бросание костей и радиоактивный распад; он признавал субъективное понимание вероятности физических событий и при этом утверждал, что разрабатывает пропенсивную концепцию Поппера; своим главным делом он счел "дать приемлемое основание (account) природы пропенсивности и ее отношений к реальности случая (chance) и к диспозиционным свойствам" [Mellor, 1971, c. XII]. На это, естественно, последовало возражение: "Но неясно, как диспозиционные предикаты могут быть поняты, или, точнее, что мы говорим о свойстве, если классифицируем его как диспозиционное" [Mackie, 1973, c. 120]. Вся концепция оставалась мало популярной.

Тем удивительнее, что позже, уже в глубокой старости, Поппер сумел дать идее пропенсивности новое развитие. Эту новую концепцию пропенсивности изложила философ Н.С. Юлина [1995]. К сожалению, она в самых ключевых местах не снабдила свои формулировки цитатами из Поппера, так что не всюду ясно, что принадлежит ему, а что ей, но идея от этого не перестает, разумеется, быть интересной.

Прежде, прилагая пропенсивность исключительно к вероятности, Поппер, по сути, не выходил за рамки третьей ПМ, тогда как для нашей темы пропенсивность важнее рассмотреть в тех ситуациях, когда вероятность ввести не удается, – только тогда шестая ПМ обретет собственную познавательную ценность. И вот заявлено: "Выходом является принятие предрасположенностей или диспозиций, не поддающихся вероятностному исчислению, за реальные физические явления" [Юлина, 1995, с. 53].

Никакого развития этой мысли нет, и сразу за данной фразой идет цитата из Поппера, носящая обычный вероятностный характер, однако из предыдущего текста статьи можно извлечь всё, что нам нужно (кроме персонификации высказанных мыслей). Речь идет о свободе выбора.

Прежде чем излагать новую концепцию пропенсивности, нужно заметить, что предпочтение в его обычном понимании является по самой своей сути величиной невероятностной, даже если облекается в вероятностную терминологию. Привычные фразы, вроде "Вероятно, завтра будет дождь", "Она с вероятностью 9/10 примет его предложение", "Я оцениваю свои шансы как шестьдесят против сорока" и т.п., обычно не содержат вероятностного элемента ни в одном из смыслов, рассмотренных в главе 2. Ближе всего они к моральной вероятности (поскольку она говорит о предпочтительности одного мнения над другими), но тут сравниваются не мнения, а объективные варианты. Такими фразами мы попросту оцениваем предпочтительность той или иной ситуации, а вероятностный язык – не более чем дань третьей ПМ, т.е. на сегодня – дань уходящей эпохе. Так что новая идея пропенсивности очень своевременна.

<<Поппер утверждает, что... можно привести объективные основания для свободы воли. Она возможна, если исходить из тезиса об открытости Вселенной к появлению новых качеств... Это значит: следует признать, что каузальные связи могут носить как жесткий, так и пластичный характер, выражаться и в инвариантных законах, и в вероятностях, и в не открытых еще закономерностях. "Мы живем в открытой Вселенной... Она частично каузальная, частично вероятностная и частично открытая...". Подчеркивая открытость Вселенной, Поппер имеет в виду ее открытость для разных непредсказуемых возможностей... Творчество нового, в том числе и творчество самого человека, постоянно изменяет всю ситуацию, ограничивает наши возможности предвидения будущего, но в то же время делает свободу воли реальным фактором формирования будущего... В статье 1973 г. "Индетерминизм недостаточен" он писал, что наша цель состоит не в том, чтобы привести основания для наших случайных и непредсказуемых действий, а в том, чтобы понять, как мы можем действовать по здравому размышлению и свободно [...]. Признав человека свободным или по меньшей мере частично свободным, логично то же самое сказать и о природе: физический мир открыт. [...] И признать, что каузальность – это только частный случай предрасположенности, равный 1>> [Юлина, 1995, с. 46–47]. (Видимо, автор имела в виду "равной 1".)

Как видим, пропенсивность понимается как творчество по Бергсону (см. п. 5-2.1), который, к сожалению, не упомянут. Не упомянуты и более новые авторы – натурфилософ и прогнозист Эрих Янч с его "открытой целью" [Jantsch, 1980, с. 202] и математик-философ В.В. Налимов с его тезисом: "Личность – это спонтанность. Спонтанность – это открытость вселенской потенциальности" [Налимов, 1989, с. 204].

К Налимову мы обратимся в главе 10, а здесь замечу, что отождествление причинности с предрасположенностью, равной единице, означает, что предрасположенности приписана какая-то мера. К сожалению, вопрос о мере не обсуждается – видимо, мера предполагается вероятностной.

В самом деле, единственный аргумент, приведенный в пользу преимущества пропенсивного взгляда над прежними, таков: "При традиционном исчислении вероятность появления на Земле из атомов органики, человека и культуры нулевая. Если же исходить из существования не поддающихся измерению предрасположенностей, действовавших в уникальной ситуации, в которой находилась Земля, то появляются основания для правдоподобного объяснения" [Юлина, 1995, с. 48]. Аргумент слаб: такие основания дает простое предположение – что вероятности нужных для происхождения жизни событий не были независимыми. На это указывали многие, в том числе Янч в своей концепции "встречи", которой он посвятил главу книги [Jantsch, 1980]. Введение новой сущности оправданно, если она не просто указывает на нечто "не поддающееся измерению" и дает ему имя, но указывает новые пути познания.

Одним из таких путей мне видится понимание предрасположености как выбора, а он как мы видели, невероятностен. На сегодня неясно, возможно ли вообще ввести здесь меру. В частности, по-моему, не причинность – вид предрасположенности, а, наоборот, предрасположенность – вид причинности, как бы мягкая причинность. Другой путь виден на модельном объекте шестой ПМ – магнитной кости (конец п. 5-2.1): изменяя пропенсивное поле, можно изменять вероятности, вплоть до их исчезновения в достаточно сложном поле. Можно даже сказать, что такое поле выступает в творческой роли. Мы вернемся к теме предрасположенности в главе 10.

## Глава 8. Случайность и разнообразие

В начале главы 6 было сказано про случайность по Вигнеру (вынесение сложного в качестве случайного за рамки анализа). Она господствовала в физике, но такой путь на сегодня оказался тупиковым. Даже физика, более других наук гордившаяся общими принципами, всё более увязает в разнообразии изучаемых ею явлений. Вообще же, всякая наука начинается с упорядочения некоторых данных, до этого казавшихся хаотическими, а наука о разнообразии (**диатропика** – см. [Чайковский, 1990]) ставит целью упорядочить сами эти процедуры частных упорядочений, в ходе которых из случайного выявляется закономерное.

Кстати, бытует мнение, что химия – отрасль физики, но оно в корне неверно: у них разные предметы исследования. Если физика всячески уклоняется от анализа разнообразия, то предмет химии – прежде всего разнообразие веществ. Именно в химии родилась идея *гомологических рядов* изменчивости, перешедшая в конце XIX века в биологию и ставшая основой при поиске закономерностей разнообразия. Эволюционист Эдвард Коп, совершивший этот переход, прямо проводил параллель между биологией и химией: "У американского палеонтолога Копа [Cope, 1896] в его рассуждениях об особенных путях эволюции родов и видов выдвинута идея гомологичных рядов на основе параллелизма изменчивости. Среди высших групп животных, по его мнению, можно установить ряд "гомологов" по по тому же принципу, как для спиртов и их производных" [Вавилов, 1987, с. 93]. Кстати, понятие "ряд" – исходное в диатропике. К рядам Копа – Вавилова мы обратимся в главе 8.

Если начинать с истоков, то полезно замечание Якиры, что для Лейбница "существует много степеней и фактически много видов вероятности", так что следует аккуратно обдумывать (peser), какая когда имеет место [Yakira, 1989, с. 120]. Если уточнить, что в таких суждениях речь всегда идет о градации не вероятностей, а случайностей, то замечание Якиры нам полезно: в который уже раз мы видим в Лейбнице основателя как диатропики, так и алеатики. Очевидно, кроме того, что случайности надо как-то классифицировать. И не беда, если первые попытки будут так же фрагментарны, как "гомологические ряды" химии и биологии.

## 8-1. Типы случайных явлений

Во Введении было сказано про апории случайности. Методом апорий Любищев [1982, с. 133] определял самые сложные понятия – например, понятие эволюции, и перечисленные мной 12 апорий случайности являют собой попытку обрисовать случайность, но вовсе не классификацию случайностей. Позже, в книге [Чайковский, 1990, гл. 3], приведено 7 типов случайности, т.е. попытка классификации:

(А) *непонятая* или *неизвестная закономерность*. Спектр таких явлений очень широк – от детских стишков-считалок (где закономерность не видна только малышам) до последовательности знаков иррационального конструктивного числа (где закономерность вообще нельзя установить изучением самой последовательности, но закономерность есть – алгоритм вычисления). Вспомнив реплику Леви-Брюля (начало Введения), что для первобытных людей нет ничего случайного, легко увидеть, что вся история алеатики есть, в некотором смысле, совокупность попыток понять, какова роль типа (А) и есть ли иные типы случайности. Многие из пишущих во все времена были (вслед за Демокритом) уверены что иных типов нет. Хотя Шейнин [1988, с. 23] декларировал: "Отрицание случайности... заслуженно забыто", но это не так – сторонников этой архаичной позиции можно встретить до сих пор. Позиция их чисто эмоциональна;

(Б) *скрещение несогласованных процессов.* Еще Аристотель выделял этот тип и приводил пример случайной встречи знакомого на улице, когда ни один из участников не слонялся по улицам без определенного дела. Отличие от типа (А) не всем очевидно, поэтому замечу: пример Аристотеля действительно можно трактовать как неизвестную закономерность (если я узнаю планы знакомого, встреча с ним будет неслучайной), но этим тип (Б) отнюдь не исчерпывается – два и более причинных ряда могут быть известны, и все-таки несогласованность их может определять суть дела. Таковы случайность движения молекул газа и случайность мутаций: никакой прогресс знаний не заставит отказаться от случайностного описания первого и некоторых аспектов второго (см. гл. 9). Вообще, несоответствие целей всегда в некотором смысле выступает как случайность. Подробнее см. [Чайковский, 1990, с. 69];

(В) *уникальность*. Этот тип случайности трудно идентифицировать потому, что, не располагая повторностью, нельзя различить апории. Например, случайностью мы называем то, что *может не* повториться при воспроизведении прежних условий, тогда как богословы называют чудом то, что *не может* повториться при тех же условиях. Такое различие за один раз не выявляется (поэтому и вопрос "случайно ли происхождение жизни?" не получит ответа, пока не будет обнаружена или воспроизведена еще хотя бы одна жизнь). Тип (В) важен для понимания *разнообразия* явлений, поскольку оно, как правило, уникально: хотя сами объекты появляются и исчезают многократно, но их разнообразие при этом не повторяется, а лишь полнее разворачивается – ни планета, ни вид организмов, ни язык, ни поэт не появляется дважды. Поппер [1983, с. 418 и далее] применил к анализу уникальности свою концепцию предрасположенности, но его мысль осталась мне непонятна;

(Г) *неустойчивость движения*. Как мы видели в предыдущих главах, данный тип вызван нерегулярностью отображения множества начальных точек движения во множество конечных. Некоторые отказывают типу (Г) в самостоятельном статусе, считая его комбинацией предыдущих, однако эта позиция ограниченна, что стало очевидным с рождением теории странных аттракторов. Легко видеть, что тип (Г) так же лежит в основе концепции естественного отбора, как тип (Б) – в основе концепции ненаправленной изменчивости (см. гл. 9);

(Д) *относительность знания*. Она, строго говоря, не относится к случайности как природному явлению, но для разграничения полей деятельности надо тут о ней сказать тоже. Об относительности знания говорят в разных смыслах. Иоганн Кеплер в 1595 г. писал, что истинное "заключение, выведенное из ложных посылок, является случайным; а его внутренняя ложность немедленно обнаруживается, как только его применяют к иному объекту, чем тот, для которого оно было выведено" [Kepler, 1938, с. 15]. Именно для того, чтобы преодолеть эту **случайность по Кеплеру**, полезно исследовать не отдельные факты, а их ряды, что и делает диатропика [Чайковский, 1990].

Другой смысл относительности знания связан с *принципом дополнительности.* Первая формулировка принципа – в форме *соотношения неопределенностей* Гейзенберга – прямо связала случайность с относительностью знания. Затем Бор, истолковав неопределенность как частный случай дополнительности и придав последней общефилософскую интерпретацию, отмечал возникновение взаимодополнительных пар (аспектов) в самых разных областях знания. Такова взаимодополнительность точек зрения, терминологий, наук, культур и т. д. [Алексеев, 1978].

Тогда же Любищев, развивая концепцию пробабилизма (см. с. 33, 39, 228), писал, что в процессе познания метрическая точность достигается в ущерб общности (достоверности) знания об объекте и наоборот. Так, всем известен тезис Дарвина, согласно которому эволюцию движет естественный отбор. В нем никто не сомневается, если понимать его в самом общем смысле – как апробацию на жизнеспособность, которой среда подвергает организмы. В таком виде тезис многих не удовлетворяет своей расплывчатостью, но оказывается, что уточнить его можно только ценой уменьшения достоверности (отсюда и бесчисленные споры о роли отбора в эволюции); наконец, если описать феномен отбора математически точно, то такое описание нельзя будет приложить ни к одному природному процессу, поскольку оно оперирует с немногими наугад взятыми параметрами организма так, словно они – единственные существенные для его судьбы свойства [Чайковский, 1985]. Словом, закономерное с одной точки зрения может быть случайно с другой, и никуда от этого не деться;

(Е) *имманентная* случайность, т.е. случайность, внутренне присущая данному объекту (явлению). Если во всех случайностях типов А-Д оставалась хотя бы абстрактная возможность видеть псевдослучайность, то в некоторых явлениях современное научное мировоззрение такой надежды нам не оставляет, и приходится говорить об имманентной случайности. Как математическое понятие она существует безусловно: приходится признать имманентно случайной последовательность знаков любого неконструктивного числа (см. п. 6-6). Оказывается, что почти все действительные числа неконструктивны, и если рассматривать этот математический факт как модель реальности, то возникает мысль о преобладании в природе имманентно случайных процессов над детерминированными и псевдослучайными.

Однако всякий конкретный пример случайности может быть, в принципе, с развитием знаний, отнесен к одному из типов псевдослучайности: даже радиоактивный распад, обычно приводимый в качестве примера чисто самопроизвольного (а потому имманентного объекту) процесса, демонстрирует некоторую управляемость (нейтрон, например, быстро распадается вне ядра).

Поэтому вопрос об имманентности случайности оказывается на деле связанным с вопросом об относительности знания.

Если вы объявили какое-то явление имманентно случайным, то вас может опровергнуть любой, кто укажет в нем закономерность, вами не замеченную. Даже для простейших множеств – числовых последовательностей – нет способа практически установить, что они случайны. Например, последовательность знаков числа "пи" случайна в том смысле, что ни один статистический критерий не поможет предсказать (хотя бы в вероятностном смысле) (n+1)-й знак по n предшествующим знакам. Статистик вправе назвать эту последовательность случайной, но это – случайность типа А и только, ибо любой знак числа "пи" вычисляется;

(Ж) *произвольный выбор.* Он рассмотрен ранее, в п. 7-6, и здесь остается добавить, что случайностью естественно назвать всякий выбор элемента (или ряда элементов) из какого-то множества, если наблюдатель не может характеризовать этот выбор в однозначных терминах. Другими словами, случайность разнообразия можно характеризовать как такой взгляд на него, при котором мы отказываемся исчерпывающе характеризовать отдельные объекты, но можем, хотя бы в принципе, характеризовать их множество. Подробнее см. [Чайковский, 1990, с. 73].

### *8-1.1. Дополнительность номотетики и идиографии*

Словом, либо надо характеризовать исследуемое множество как некое качественное целое, как систему (при этом каждый элемент описывается не своими признаками, а местом в системе – тезис Любищева), либо описывать детально (в том числе метрически) отдельные элементы и мириться с тем, что свойства разных элементов выступают друг относительно друга как случайности. Можно уточнить мысль Любищева специально в аспекте анализа разнообразия: то, что достоверно с одной позиции исследования, может быть сомнительным, т. е. в некотором смысле случайным, с другой (дополнительной по Бору) позиции. Неточность процедуры познания неизбежна уже по той причине, что даже исчерпывающее теоретическое описание, проведенное с одной позиции, окажется набором более или менее случайных фактов с какой-то другой.

Рассмотрим любое частное утверждение, хотя бы, например: "этот стол – деревянный". Фраза – чисто *идиографическая* (т.е. указывает на частный конкретный факт), но несет в себе в свернутом виде мощную *номотетическую* (т.е. выражаемую правилом) информацию. Ведь слово "стол" – символ принадлежности к некоторому абстрактному множеству столов, указание на номотетику. Еще мощнее свертка информации в слове "деревянный", которое указывает на все предметы, сделанные из дерева, причем дерево может быть любое; т. е. проведена еще и свертка по всем видам деревьев, тогда как, например, слово "дуб" уже означает свертку по всем видам и экземплярам, принадлежащим к данному роду. Но более всех абстрактно слово "этот", формализующее не предметы или их качества, а отношение их к говорящему. Оказывается, идиографический факт формулируется как *пересечение номотетик*.

Отметив это, можно перейти к вопросу о том, что номотетично, а что идиографично в той или другой научной дисциплине. Это зависит от позиции исследователя, целей, которые он ставит, и средств, которыми он располагает. Так, для математика "Курс геометрии" – номотетический текст, а "Курс практической систематики высших растений" – сугубо идиографический, и мало кто замечает, что для ботаника ситуация прямо противоположна. Действительно, геометрия для него, если только он не увлекается математикой, – набор теорем, которые нельзя усвоить иначе, чем заучив их, и наличие доказательств не упорядочивает для него текст, но только загромождает (надо заучивать еще и их); наоборот, инструкции "Практической систематики" упорядочивают для него море растений, стоящее перед глазами, дают метод свернуть необозримое множество признаков в компактное множество диагнозов. Словом, номотетично то множество, в котором данный исследователь видит номотетику.

Номотетико-идиографический анализ завершал в книге [Чайковский, 1990] выявление семи типов случайности. Кроме этих семи типов, есть и другие способы группировать случайные явления – например, по наличию или отсутствию устойчивых частот (см. гл. 7). Прежде чем заняться остальными способами, следует сказать о попытках модифицировать саму данную семерку.

## 8-2. Новое в выявлении типов случайностей

Несмотря на общее небрежение ученых к теме случайности, все-таки можно найти в литературе кое-что новое. 10 лет назад Шейнин упорядочил те случайности, какие нашел у Пуанкаре. Это оказались: (1) неустойчивость движения, (2) "результат запутанных (complicated) причин", (3) "результат слабых причин, ведущих к малым эффектам" и (4) "пересечение цепей событий" [Sheynin, 1991].

На самом деле у Пуанкаре можно найти, кроме этих, и другие типы случайности: например, он указывал на (5) случайность как уникальность: "Самый большой случай – это рождение какого-нибудь великого человека" [Пуанкаре, 1999, с. 22].

Но нам интереснее тип (3): "слабые причины, ведущие к малым эффектам" требуют особого рассмотрения, поскольку для авторов, мыслящих в рамках третьей ПМ, они являют собой основу понимания гауссовости (см. гл. 3). Существенно, что случайность типа (3) мыслится у Пуанкаре всегда как вероятностная (и даже как гауссова), тогда как о его "запутанных причинах" этого не утверждается.

Как сказано в главе 5, есть более общее и более очевидное (чем статистическое) толкование широкой распространенности нормального распределения, а именно, системное, основанное на его симметрии и экстремальности. К тому же не стоит переоценивать обычность гауссоиды в реальных явлениях – часто ее додумывают по традиции (чисто статистической).

Словом, тип (А) оказался (чего я прежде не замечал) состоящим из двух разноплановых подтипов. Первый – запутанность, т.е. случайность по Вигнеру, а второй – случайность, вызванная сложением малых воздействий. Но выделять их в отдельные типы вряд ли следует, ибо при этом была бы утеряна их общность – оба являют собой нечто непонятое, а возможно и недоступное пониманию.

Тут пора сказать о единственном известном мне отклике на семерку (А) – (Ж) – он содержится в книге методолога Н.Ф. Овчинникова [1996]. Из его критики видно, что и другие типы в действительности неоднозначны.

Николай Федорович не склонен выделять относительность знания в особый тип случайности: "Трудно согласиться с тем, что идиографичность и номотетичность, иначе говоря, описательная и собственно теоретическая часть науки... зависят от позиции исследователя – то, что для математика номотетично, то, скажем, для ботаника идиографично, и наоборот. Я полагаю, что идиографичность и номотетичность – это особенности научной теории и составляют предмет методологического исследования, существующего вне исследователя" [Овчинников, 1996, с. 134]. Очевидно, автор хотел сказать не "существующего", а "существующий".

Не спорю – предмет исследования лежит вне исследователя. Однако у меня шла речь об исследовании конкретного материала учеными-практиками, не помышляющими о методологии. То, чего они не хотят знать, для них случайно по Вигнеру; а для методолога то же самое неслучайно. Так что оснований отрицать случайность типа (Д) пока не вижу.

Сам Овчинников делит случайности всего на две группы – *имманентную* (ту, что внутренне присуща явлению, беспричинна) и *субъективную* (ту, что "обусловлена нашим неполным знанием детерминированных процессов"): <<А в сущности – пишет Овчинников, – можно считать, что существует только один тип случайного события – это событие, не имеющее причины, "имманентное", как назвал его Ю.В. Чайковский. Основание для усмотрения такого типа случайных событий – это, как писал еще Лукреций Кар, так называемый "клинамен". Иначе говоря, событие, нарушающее строго детерминистическое поведение природных процессов>> [Овчинников, 1996, с. 135].

Здесь кое с чем придется спорить. Слов нет, каждый может называть случайностью то, что ему нравится. Конечно, имманентная случайность явным образом противостоит всем остальным типам, которые поэтому часто объединяют термином "псевдослучайность", что и сделано (за вычетом типов (Д) и (Ж)) в моей "Диатропике".

Если классифицировать только явления (а не мнения и не понятия), то прежде всего хочется разделить случайности на два "царства" – *псевдослучайные* (где случайность порождается не самим явлением, а способом его познания или его взаимодействием с другими явлениями) и *имманентно случайные*. Те и другие могут быть как материальными, так и идеальными. Однако Овчинников противопоставил имманентной случайности субъективную, т.е. явлению – мнение, а это вряд ли может привести к работоспособной классификации.

Мне остается заметить, что субъективная случайность не всегда связана с незнанием. Согласно пословице "чужая душа – потёмки", мы обычно не можем сказать, почему другой человек поступил не так, как мы полагаем правильным. Если, например, он поступил себе во вред по незнанию, то налицо псевдослучайность, но если – по своему сознательному усмотрению, отличному от нашего, то налицо его *свободный выбор,* выступающий для нас как случайность. И дело отнюдь не в знании — он может, зная то же, что и мы, иначе взвешивать "за" и "против", и даже менять их местами. Впрочем, субъективный аспект выходит за рамки нашей темы.

Наоборот, прямо к теме относится желание моего почтенного критика ограничить имманентную случайность "клинаменом" Эпикура – Лукреция, о котором мы говорили в главе 1. Это давняя, идущая от Гаусса и прокламированная Пуанкаре позиция – что суть стохастичности коренится в возмущениях. В предыдущих главах показано, что есть и другие источники случайности – прежде всего, устройство вещественного числа (ситэ Мандельброта, случайность по Ламберту) и неизмеримость, связанная со свободным выбором. Тем самым, псевдослучайность не обязательно связана с субъективностью.

И мне было приятно прочесть, как Чендов [1974, с. 95] вспоминал слова Пуанкаре (1907 г.): "Что касается явлений, которые... представляются случайными, а в общей связи предсказываются исчислением вероятностей, то ясно, что эти представления не перестанут быть верными и в тот день, когда мы лучше узнаем закон этих явлений". Это значит, что нам приходится обращаться с подлинными случайностями и псевдослучайностями одинаково, если для них работает единый аппарат.

В связи с этим весьма ценно то замечание Овчинникова, что произвольный выбор можно отнести к случайности как непонятой закономерности. Хотя в общем виде это утверждение не всегда верно (о чем сказано выше), но мне действительно следовало обратить внимание на то, что *многие явления случайны сразу в нескольких смыслах*.

Что касается самой дихотомии имманентная случайность – псевдослучайность, то она лишь кажется простой, тогда как проведение ее на практике затруднительно и даже не всегда возможно. Приведу примеры.

*Радиоактивный распад* мыслится нынешней физикой как имманентно случайный. Наоборот, всякая последовательность знаков конструктивного числа является не более чем псевдослучайной, о чем мы выше говорили. Принадлежа противоположным "царствам", с точки зрения возможностей и удобств вероятностного описания два эти типа случайностей почти идентичны и практически далеко не всегда различимы. В частности, по таблице случайных чисел нельзя в общем случае сказать, как она получена – случайным механизмом или псевдослучайным.

С другой стороны, развитие науки может, как уже говорилось, выявить зависимость распада атома от его среды, и это переведет распад в другое "царство". То же в принципе возможно в отношении любого материального явления. Другое дело – явления математического мира – они могут быть имманентно случайны по определению. Таково *неконструктивное* число. Именно этот пример убеждает, что об имманентной случайности имеет смысл говорить, однако ни одного неконструктивного числа мы не знаем и никогда не узнаем.

Третьим и самым ярким примером является обсуждавшийся нами ранее *парадокс Ламберта,* демонстрирующий, что один и тот же феномен может принадлежать сразу обоим "царствам". В нынешних понятиях парадокс состоит в том, что конструктивное иррациональное число неслучайно в одном смысле (каждый его знак вычислим) и случайно в другом (порождает бесконечную последовательность, по которой нельзя угадать еще не вычисленные знаки). То же являет собой феномен странного аттрактора.

В силу сказанного, мы будем пользоваться прежней семеркой (А) – (Ж), но оговорим, что к одному типу могут принадлежать явления совсем разной природы и различного поведения, а одно явление может быть отнесено к разным типам. Следовательно, семерка полезна для ориентации в мире случайностей, однако, как и набор апорий, не дает однозначной классификации случайностей. Не думаю, что такая классификация случайностей, проводимая по их природе, вообще возможна.

Зато можно определенно сказать, что случайные явления допускают различные способы группировки по их проявлению или способу описания. Их можно делить 1) на обладающие вероятностью (как устойчивой частотой) и не обладающие; 2) на в принципе не имеющие причины (имманентно случайные) и могущие ее в принципе иметь (если факт наличия причины известен, то явление называется псевдослучайным, даже если сама причина пока неизвестна); 3) на связанные с чьей-то мыслью (субъективные) и не связанные (текущие объективно). Известные нам на сегодня примеры имманентной случайности все являются вероятностными и объективными, а в остальном одно и то же явление может принадлежать разным парам.

Надеюсь, что в будущем появится лучшая классификация случайностей, пока же добавлю еще один способ ориентироваться в мире случайного. Речь идет о ступенях случайности [Чайковский, 1996а].

## 8-3. Инварианты и ступени случайности

Сгруппируем случайности по степени беспорядочности. Выстроим их в ряд или в ряды, от наименьшей к наибольшей беспорядочности, и получим ступени для восхождения к "самой случайной" случайности. Тогда можно будет увидеть, на какой ступени в каком ряду какая случайность располагается.

Отправным для нас будет понятие *детерминизации* [Пятницын, 1976], означающее выявление в случайном неслучайного, т.е. каких-то инвариантов. Каждый из приемов детерминизации (и даже полный отказ от нее) утверждается в науке и обществе не сам по себе, а в рамках соответствующей ПМ, принятой в данное время.

### *8-3.1. Инварианты случайности*

Исторически первым и самым радикальным актом детерминизации было отождествление случайности с судьбой в рамках нулевой ПМ. От случайности при этом практически ничего не оставалось, поэтому почти весь прогресс алеатики можно рассматривать как смягчение приемов детерминизации. В рамках первой ПМ детерминизация состоит в постулировании вероятности, которая не является случайной величиной. Здесь вероятность – тот инвариант ряда равных возможностей, который исчисляется, когда каждая возможность взята один раз. Вот почему и раздаются реплики о "редукции случайного к неслучайному" – см. п. 0-6. На практике существование вероятности обычно означает устойчивость частот.

В рамках второй ПМ случайность – результат скрещения незримых закономерностей, слишком сложного для обсчета или недоступного из-за недостатка знаний. Инвариантом тут выступают *законы природы*, исторически прежде всего – механики. Например, считается, что случайность выпадения герба вызвана необозримо сложными условиями полета монеты.

Зато привычное нам понимание случайности как чего-то, что выявляется в длинной серии опытов, связано с третьей ПМ. Здесь инвариант – *устойчивость частот*.

Если частота неустойчива, случайному событию нельзя приписать определенную вероятность-частоту. (Хотя и можно ввести вероятность-меру, но здесь она не несет физического смысла.) Тут рушится вся идеология средних величин, на которой традиционно строилось наше обращение со случайностями, но в науку входит еще один инвариант случайности – *устойчивое распределение неустойчивых частот*. Он оказывается характерным для системной случайности, т.е. для четвертой ПМ.

Другой системный инвариант случайности демонстрирует теория игр. Инвариантом здесь является результат применения принципа минимакса, именуемый решением игры (см. п. 7-6).

Хотя системная случайность едва начинает входить в науку и далека от сознания большинства, уже можно говорить о еще двух ПМ и, соответственно, о двух группах случайностей – диатропической и пропенсивной.

Пятая, диатропическая, ПМ видит мир как неформально упорядоченное разнообразие. Статистическим идеям усреднения и корреляции она противопоставляет идею обобщения, а системной идее оптимальности – идею плюрализма.

В пределах данной ПМ случайности очень различны, а инварианты подчас трудноуловимы. Простейшим и исходным инвариантом диатропики является **ряд**. Если во множестве объектов, казавшемся хаотическим, удается выявить некие ряды в чём-то сходных объектов, то налицо неполная хаотичность.

Именно с выявления рядов предлагал начинать анализ изменчивости ботаник Н.И. Вавилов [1987, с. 97]: "Закон гомологических рядов показывает исследователю-селекционеру, что следует искать. Он намечает правильности в нахождении звеньев, расширяет кругозор, вскрывает огромную амплитуду видовой изменчивости... Мутации, идущие как бы случайно в разных направлениях, при объединении их обнаруживают общий закон". Добавлю лишь, что случайность при этом не исчезает, а только обнаруживает нестохастический инвариант (набор рядов, или спектр изменчивости).

Другим нестохастическим инвариантом разнообразия является фрактальное самоподобие, например, инвариантная случайностная структура ветвящегося процесса. Замечательно, что хотя инвариант определяется через вероятности гибели, но частоты (т.е. численности частиц) в ветвящемся процессе с течением времени быстро теряют устойчивость, т.е. явление перестает быть вероятностным (см. п. 4-7.1).

Третий пример диатропического нестохастического инварианта дает та же теория игр. Реальные игроки не могут ни точно решить игру, ни отказаться от своих эмоциональных предпочтений, поэтому неопределенность, обойденная стандартной теорией игр, сохраняется, что и делает игру игрой, т.е. совокупностью актов свободного выбора. Игры как таковые в этом смысле – возможный предмет будущего интереса ученых в рамках шестой ПМ, пропенсивной. Она видит мир как систему склонностей и предпочтений, которые, когда их научатся исчислять, станут примером пропенсивного инварианта случайности; однако сам тот факт, что в одной игре разные игроки могут обладать различными инвариантами, есть феномен диатропический.

Как сказано в п. 7-6, случайность по сути своей противоположна инварианту. Следовательно, истинной ("самой случайной") случайностью надо признать ту, у которой в принципе нет инварианта. Таковой случайностью можно считать акт свободного выбора, но его можно считать и неслучайным.

Есть точка зрения, видящая истинную случайность в очень сложной фрактальности. Процесс рождения и гибели – случайный одномерный фрактал, случайное ветвление кровеносных сосудов можно назвать трехмерным фракталом, а электроактивность спящего мозга – пятимерным фракталом. На этом пути сформулировано понятие "истинной случайности": ее трактуют как нечто вроде *бесконечномерного фрактала*, который понимают как невозможность описать наблюдаемую случайность никаким конечным набором вероятностей и фракталов. Такова, как полагают, электроактивность бодрствующего мозга. Подробнее см. [Пригожин, Стенгерс, 1994, с. 88-90].

С этим пониманием "истинной случайности" трудно согласиться (ясно, что речь идет всего лишь о закономерности, слишком сложной для понимания, т.е., в сущности, о второй ПМ), но для алеатики интересна заявка физиков на классификацию случайностей – от детерминированного одномерного хаоса, т.е. вероятностного феномена типа бросаний монеты, до бесконечномерного фрактала. Этот ряд нам надо достроить.

### *8-3.2. Ступени случайности*

Итак, явления, которые можно всерьез описать с помощью понятия "вероятность", далеко не самые хаотические: они обладают очень жестким инвариантом – устойчивостью частот. Возможно, что они – не самые распространенные в природе. Попробуем выстроить случайные явления в порядке смягчения той детерминизации, какая используется при их описании.

***Ступень 0***. Детерминированный акт, в котором никакой случайности нет (для данного исследователя с его теоретическими установками, знаниями, инструментарием и целями). Эту ступень приходится включать в классификацию потому, что грань случайного и детерминированного субъективна. Пример: на вопрос "каков десятый знак числа пи?" один, тот, кто знает, ответит "3", другой – "не знаю", и оба ответа будут детерминированными; однако тот, кто не знает и не может узнать, но заинтересован в даче верного ответа, может сказать наугад.

***Ступень 1***. Явление, состоящее из детерминированных и стохастических компонент. Наглядный пример – стрельба в цель: выбор цели и акт прицеливания неслучайны, но всегда возникает случайный разброс попаданий. У греков (сближавших случайность с судьбой и не знавших вероятности в нашем смысле) для этого процесса существовали слова *стохазомай* (целиться, догадываться, отгадывать) и *стохастикос* (меткий, догадливый); однако в данной книге слово "стохастический" является синонимом слова "вероятностный". Следует различать варианты:

1а: случайная компонента имеет вероятность. Такова стрельба, но есть гораздо более яркие примеры – те, что демонстрируют организующую роль случайности систем, в общем-то детерминированных – например, детерминированный автомат в случайной среде (см. ниже, п. 5). Более новый пример – планетные кольца; организующую роль в них играют частицы-странники – см. далее, п. 9-1.

1б: игра идеальных игроков. Поведение каждого определяется набором вероятностей, составляющим его оптимальную стратегию; но вычисление самих этих вероятностей производится каждым игроком детерминированно, согласно принципу минимакса — см., например, [Льюс, Райфа, 1961].

***Ступень 2.*** Вероятностное явление – то, которое в процессе повторения однотипных ситуаций встречается с устойчивой частотой. Ему (и случайным процессам) почти целиком посвящена мировая литература о случайности. Варианты:

2а: псевдослучайные явления (*детерминированный хаос*). Такова, например, последовательность знаков иррационального числа;

2б: подлинная (имманентная объекту) случайность. Таковы неконструктивное число (число, для вычисления которого в принципе нет алгоритма) и радиоактивный распад (в общепринятой трактовке; точнее см. ниже, п. 6).

***Ступень 3.*** Явление, демонстрирующее устойчивую частоту, которая, однако, на поверку оказывается состоящей из отдельных компонент, укладывающихся в интегральную ЦПТ, но обладающих своим локальным поведением, радикально отличным от нормального в широком смысле (таков, например, эффект Шноля, см. ниже, а также п. 7-5.1). Возможно, что такова и основная масса вероятностных явлений.

***Ступень 4.*** Явление, не имеющее устойчивой частоты, но выражающееся через переходные вероятности случайного процесса. Таково случайное блуждание.

***Ступень 5.*** Явление, не имеющее устойчивой частоты, но входящее в коллектив явлений, допускающий описание с помощью распределения вероятностей-мер. До утверждения четвертой ПМ почти нацело выпадало из сферы внимания ученых, хотя математический аппарат для него давно описан: теория негауссовых устойчивых распределений. (Негауссовы распределения легко выявляются по медленному убыванию – "толстым хвостам"; для них накопление статистических данных вообще не повышает точности знания, если мат. ожидание бесконечно.) Сюда относятся:

5а: случайность простых негауссовых систем, например – одномерный фрактал;

5б: случайность сложных негауссовых систем (таковы многомерные фракталы);

5в: явление, описываемое теорией устойчивых распределений, но не обнаруживающее связи с системностью (таковы распределение Коши и распределение Хольцмарка).

***Ступень 6***. Случайное явление, не выражаемое распределением вероятностей, но допускающее измерение частот. То есть имеется случайность, обладающая вероятностью-частотой, но нет достаточных оснований для введения вероятности-меры. Такая ситуация возникает всякий раз, когда частота извлекается из массового материала обработки актов свободного выбора. Например, если рассматривать литературный текст как последовательность таких актов, то феномен квази-гиперболического распределения частот слов выступит как факт отсутствия вероятностей у подобных частот (см. п. 9-5), поскольку меру саму по себе тут никто еще не предложил, да и вряд ли это возможно.

***Ступень 7***. Случайное явление, не выражаемое ни распределением вероятностей, ни частотами, но всё же допускающее какую-то детерминизацию. Примеры:

7а: Произвольный выбор с предпочтением (оно и является тут инвариантом). Так, привычная фраза "он на 90% уверен, что она примет его предложение" звучит статистически, но статистики в ней нет ("он" вовсе не собирается сто раз повторять предложение), и проценты (или шансы) означают не вероятность, а степень предпочтения, в которой выражено отношение "его" к "ее" произвольному выбору;

7б: игра реальных игроков. Включает произвольный выбор (как с предпочтением, так и без него). Инвариантом служат (кроме предпочтений) правила игры.

***Ступень 8***. Истинный хаос, не допускающий детерминизации. Примеры:

8а: бесконечномерный (см. п. 3.1 этой главы) фрактал со случайными точками ветвления, излома или разрыва. Хотя и возможна предельная структура такого фрактала (т.е. инвариант), но приведенный пример рассматривал попросту нечто более хаотичное, чем любой фрактал.

8б: Произвольный выбор без предпочтений. Так, если мы обратимся к совсем незнакомым людям с предложением: "Скажите что-нибудь", то можем ожидать чего угодно (например, ругани), и предпочтение (или частоту) можем оценить (как до опыта, так и после) разве что для молчания, поскольку не задан алфавит, из которого могут выбираться возможные ответы.

## 8-4. О математических моделях случайного

Как уже сказано в Предисловии, эта книга избегает математического моделирования в тех формах, какие более всего приняты в литературе, поскольку там обычно даже не упоминаются те трудности, которым книга посвящена. Точнее говоря, у нас вовсе не будет речи об *имитационных моделях*, когда ставится цель имитировать какие-то желаемые свойства объекта. К ним относится подавляющее большинство математических моделей. Речь пойдет только об **ориентационных** и **мажорирующих** моделях. Первые призваны показать какие-нибудь новые логические возможности, до моделирования остававшиеся незамеченными, а вторые должны ограничить реальный круг приложимости таковых возможностей.

Однако сам я начал именно с имитационных моделей эволюции, где, как и большинство авторов, "искал кошелек под фонарем". Поэтому и путь к алеатике оказался через оценку роли разных типов моделей.

Первый раз, когда мне пришлось исходить из наличного математического аппарата, а не из реальных свойств изучаемого объекта природы, был связан с желанием ответить на вопрос о том, может ли коллектив простых стохастических объектов решить достаточно сложную задачу оптимизации (матричную игру). Ответ удалось найти [Чайковский, 1971а], и состоял он в том, что возможности таких коллективов скромны.

В этой работе было показано, что для нахождения оптимального поведения в матричной игре игрок, являющийся однородным коллективом автоматов, должен обладать как минимум следующим свойством: каждый член коллектива должен знать номер хотя бы одного действия, к которому в данный момент t следует переходить. Если же он знает чуть меньше – что выполняемое им действие следует менять (но неизвестно, на какое), то при наличии трех и более действий игра сводится к бесконечному перебору действий без приближения к решению. В данной работе еще господствует идеология предельного подхода, позже мною не использованная.

При чтении статьи надо иметь в виду, что публикации не повезло: на с. 1027 спутаны номера формул с номерами из списка литературы. Еще менее повезло ее переводу [1971б]: на с. 1246 он содержит смысловые ошибки. Оба печатных текста стали мне доступны лишь по их выходе в свет.

Хотя исходная установка модели, позволившая мне применить аппарат теории игр, была заимствована из третьей ПМ (мне тогда представлялось, что реальные объекты в случайной среде способны оценивать средние величины, что дискретные величины можно заменять непрерывными) и оказалась далекой от биологической реальности, однако результат имел для меня решающее значение: начиная работу, я был уверен во всесилии естественного отбора (так нас всех учили), а по окончании стал искать в литературе данные об иных механизмах эволюции. Тем самым, модель оказалась ориентационной.

Вскоре один механизм, ответственный за простые эволюционные акты, был найден генетиками и сформулирован мною – генетический поиск. Он непременно включает элемент случайности, но в целом целенаправлен. Для понимания этого тоже понадобилась математическая модель [Чайковский, 1974; 1976]. Она основана на теории стохастических автоматов, о которых речь в следующем параграфе.

**Генетическим поиском** называются "те чрезвычайные режимы работы генетической системы, когда в ней изготовляются новые тексты ДНК" [Чайковский, 1976, с. 156-157; 1990, с. 96]. Наиболее важным выводом концепции генетического поиска мне представляется тот, что объектом естественного отбора не могут служить признаки, а может служить в каждый данный момент эволюционного времени только один-единственный **квант селекции**, т. е. несомненно полезное приобретение, неразложимое отбором на части (т.е. части этого качества не могут в реальных условиях отбираться по отдельности), но способное быть отобранным как целое. В свою очередь, понятие кванта селекции позволило придать разумный (реалистический) смысл понятию естественного отбора. Об этом пойдет речь пойдет в главе 9.

Третья математическая модель касалась ограничения круга задач, в принципе доступных для решения с помощью общепринятых имитационных моделей. Была построена мажорирующая модель естественного отбора (модель, в которой все предположения благоприятствуют эффективности отбора) в виде ветвящегося процесса и показано, чего отбор заведомо сделать не может. Она была упомянута ранее, в главе 7, а подробнее будет рассмотрена далее, в п. 9-7. К проблеме случайности относится также тот круг ориентационных моделей, который связан с теоремой Гёделя о неполноте. Может ли материальная система в каком-то смысле определять сама себя, подобно разговорному языку? Содержательный ответ возможен только в рамках модели, и такой моделью представляется формальная система, содержащая арифметику.

Для таких систем известна теорема Гёделя: всякая непротиворечивая система дедуктивно неполна. Это значит, что в ней можно сформулировать истинное утверждение, которое, однако, нельзя вывести из аксиом этой логики посредством правил вывода этой логики. Существенно, что истинность этого утверждения доказать можно, но это будет доказательство-проверка, а не доказательство-вывод; другими словами, Гёдель показал, что возможно утверждение, в истинности которого можно убедиться средствами данной логики, если утверждение уже сформулировано, но самый вывод этого утверждения (нахождение формулировки) требует более общего аппарата, нежели данная система [Паршин, 2000]. В связи с этим я когда-то написал:

"Поскольку теорема Гёделя обобщается на любую достаточно богатую логическую систему, можно сказать следующее: все формальные системы делятся на две группы в отношении разнообразия их свойств – на примитивные и гёделевские. Примитивная система полностью определяет свои свойства в том смысле, что любой факт, формулируемый на ее языке, в ней формально выводится; вся эволюция в рамках такой системы сводится к удлинению текстов, записываемых по раз навсегда заданным правилам. Наоборот, гёделевская (включающая арифметику) система способна к качественной эволюции: в ее рамках можно записать осмысленный текст, смысл которого не вытекает из правил его построения (на основе более коротких текстов), хотя и согласован с этими правилами. Получение такого текста в рамках системы неформально и может быть формализовано только путем добавления новой аксиомы (выхода на новый логический уровень). Добавление аксиомы выглядит произвольным (*случайным*) актом с позиций прежней логики, но закономерно с позиций новой (расширенной) логики: добавляется именно аксиома, которая нужна для формального вывода заданного утверждения" [Чайковский, 1985, с. 166].

Мне было приятно узнать, что это не был плод невежества – близкую мысль высказал недавно Паршин, закончивший ее словами: "Должна существовать теорема Геделя в биологии, показывающая невозможность полного описания живых организмов в чисто генетических терминах" [Паршин, 2000, с. 55]. Мою статью он увидел позже.

Еще один тип ориентационных моделей – это автоматы, которые не моделируют никакого конкретного объекта, зато демонстрируют неизвестные ранее возможности случайного поведения. Впервые их рассмотрели в 1960-х годах московский кибернетик М.Л. Цетлин (увы, вскоре безвременно умерший) и сложившаяся вокруг него группа исследователей. Они обнаружили ту форму оптимального поведения, которая может реализоваться только в среде, случайно реагирующей на действие объекта. Эти работы служат отличной иллюстрацией организующей роли случайности, о чем скажем в следующем параграфе.

Вскоре американский биокибернетик Стюарт Кауфман открыл другой класс автоматов, ничего конкретно не моделирующих, но коллектив которых способен к *самоорганизации*. Вывод Кауфмана: эволюция может эффективно протекать не в детерминированных и не в хаотических системах, на границе между порядком и хаосом, причем приближение коллектива автоматов к этой границе сравнительно легко достигается путем уменьшения числа связей между автоматами [Кауфман, 1991].

Замечу: во-первых, тут фактически речь идет о кванте селекции: объектом отбора могут эффективно служить не признаки, но способы организации систем; а во-вторых, на границе порядка и хаоса наблюдается нестохастическая случайность (см. п. 5-4).

### 8-5. Организующая роль случайности

Независимо от того, считать ли случайность реальным феноменом или способом говорить о непонятном, нельзя отрицать, что она играет организующую роль. Достаточно вспомнить, что неподвижно растущее растение не может иначе распространять свои семена, как предоставив их на волю случая. У опыляемых ветром и опыляемых насекомыми эти случайности достаточно разноплановы, но они есть всегда. Да и сознательно действующий человек не мог бы эффективно размножаться, вовсе исключив из этого процесса случайность. Говоря шире, случайность необходима для действия в разнообразном мире.

Организующая роль случайности хорошо выявлена в ряде физических работ – см., например, пункт "Конструктивная роль динамической неустойчивости движения" статьи [Климонтович, 1996], где отмечено, что разбегание траекторий при динамическом хаосе обеспечивает физическую и информационную целостность системы; и пункт "Тепловой шум в биосистемах – необходимый компонент их работы" статьи [Иваницкий и др., 1998], где сказано: "Тепловой шум в биосистемах... выполняет две полезные функции – поиск партнеров при молекулярных взаимодействиях и адаптационную изменчивость". (Последняя, замечу, далеко выходит за рамки шума, что мы увидим ниже, в п. 5.2.) Недаром с древности важной частью многих социальных действий является жеребьевка, а в наше время в науке и технике распространены методы случайного поиска.

Рассмотрим кратко автоматные модели. *Триггер* (логическая схема с двумя действиями, чередующимися в зависимости от внешнего сигнала) обладает некоторой разумностью по сравнению с чисто случайным "поведением" бросаемой монеты, что видно из следующего. Пусть среда может действовать на объект двумя способами – штрафом и поощрением, причем первое действие объекта штрафуется с вероятностью p1, а второе – с вероятностью p2. Если объект – триггер, меняющий действие при штрафе и не меняющий при поощрении, то, как легко вычислить [Цетлин, 1969, с. 25], его средний выигрыш больше, чем выигрыш объекта, меняющего действие чисто случайно. Улучшить его поведение (получить больший средний выигрыш) можно, сделав триггер инерционным, т. е. меняющим действие не при первом штрафе. Для этого он должен уметь считать время, т. е. иметь цепочку внутренних состояний, которые меняются одно за другим без изменения действия (невидимо для внешней среды). Таков автомат с линейной тактикой (АЛТ), предложенный М. Л. Цетлиным в 1961 г.

Вообще, конечным автоматом называется объект, имеющий n состояний и заданное правило перехода из одного состояния в другое. Состояния объединяются в k групп, именуемых действиями автомата; автомат, выполняющий действие i, штрафуется внешней средой с вероятностью $p_i$ (поощряется с вероятностью 1- $p_i$), не зависящей от номера состояний внутри группы. Правило смены состояний для АЛТ таково: если в момент t было поощрение, то в момент t+1 номер состояния увеличивается на 1 или (если он уже был равен максимальному числу d – *глубине памяти* АЛТ) не меняется; если же в момент t был штраф, то номер состояния уменьшается на 1 или (если он уже был равен 1) происходит смена действия на следующее (действия образуют кольцо), и в нем автомат занимает тоже номер 1. Автомат задается двумя графами: один – поведение при поощрении, другой при штрафе (рис. 14а).

При d=1 АЛТ становится триггером, а при d, стремящемся к бесконечности, он оптимален, т. е. реализует практически только то действие, штраф за которое минимален (но, замечу для математиков, теряет эргодичность). Для приемлемой разумности d должно заметно превышать k–1, а вероятности $p_i$ – достаточно различаться.

Если переход от одного действия к другому происходит случайно (рис. 14б), то мы получаем автомат, моделирующий точковый мутагенез, о котором см. п. 9-4.2.

Идеология асимптотически оптимальных автоматов основана на идеалах третьей (статистической) ПМ со всеми ее недостатками: благом признан средний выигрыш, хотя с ростом глубины памяти автомат реагирует всё медленнее, а в пределе вообще не реагирует, так что такая оптимальность практически ничего не значит. Поэтому интерес представляет не асимптотическая оптимальность, а оптимальность при данном d. Такой автомат описал А.А. Милютин [1965]. Это – автомат со сравнивающей тактикой (АСТ).

Разумность данного автомата достигается не столько за счет инерционности (хотя и она необходима), сколько за счет регулярной смены действий. Если АЛТ считает штрафы и поощрения, сохраняя одно и то же действие, то АСТ –

меняя их. *Автомат оказался вероятностным*: в каждом действии есть одно состояние, попав в которое, он никогда не меняет действие при поощрении и редко – при штрафе. Милютин предложил и детерминированный автомат, ведущий себя очень сходно и, следовательно, получающий почти тот же средний выигрыш (но все-таки неоптимальный). Принципиально, что в неслучайной среде детерминированный АСТ вообще не может функционировать. Налицо организующая роль случайности.

АСТ замечателен тем, что ведет себя *антиинтуитивно*. На рис. 14в он изображен для k = 2, d = 8. Он состоит из двух подсистем, каждая из которых почти или вовсе лишена целесообразности – в верхних четверках состояний смена действия обязательна, независимо от штрафа, а в нижней четверке он при штрафе вовсе не считает время, так что сама по себе нижняя четверка не лучше триггера. Переход от нее к верхней четверке возможен только после трех поощрений подряд, а затем штрафа. И все же легко видеть, что если первое действие чаще штрафуется, а второе – чаще поощряется, то автомат быстро попадает в нижнюю четверку справа, откуда выходит редко и ненадолго. В главе 9 мы увидим, что это помогает понять генетический поиск.

Такая ситуация достаточно типична: существует множество объектов, которые без случайностного компонента распадись бы на отдельные бессмысленные состояния или движения. В главе 9 мы убедимся на примере коллектива автоматов, как введение случайности в акт поведения радикально упрощает поиск и повышает надежность работы организма.

### *8-5.1. Случайность в игре*

Теперь надо рассмотреть организующую роль случайности в игровых ситуациях. Если рассуждать в рамках вероятностей и оптимальных стратегий, то встает вопрос, какими минимальными возможностями должен обладать игрок, чтобы уметь решать игру. В одном частном смысле эта задача была поставлена и решена мною в самом начале работы над проблемами случайности. Речь шла об информационных возможностях игроков (автоматов или их коллективов).

Вопрос был поставлен так: что обязан знать игрок об игре, чтобы решение было в принципе возможно? Простейший тип игры – *матричная* игра, т.е. игра двух игроков, в которой первый должен выбрать одно из m действий, а второй – одно из n действий, и задание этой пары определяет выигрыш первого (он же – проигрыш второго). Выигрыши образуют матрицу размером mXn. Решение игры в общем случае являет собой пару *оптимальных стратегий* (два набора вероятностей, с которыми игроки применяют свои действия), и реализующийся при этом средний выигрыш – *цену игры*. Для матричной игры решение всегда существует (теорема фон Неймана, 1928 г.), причем игрок, применяющий свою оптимальную стратегию, гарантирует себе выигрыш не менее цены игры, независимо от того, как ведет себя противник (и получает больше цены, если противник ошибся).

Решение может быть найдено с помощью эффективной процедуры – решения системы дифференциальных уравнений. Эту процедуру я и использовал для ответа на поставленный выше вопрос [Чайковский, 1971].

А именно, поиск решения игры был рассмотрен как взаимодействие двух больших коллективов достаточно простых автоматов, когда каждый акт поиска состоит в том, что каждый автомат первого коллектива играет с автоматом второго согласно игровой матрице. Разумность игрока (коллектива) как целого достигается сравнением выигрышей групп, применяющих в данный момент одно и то же действие (применяющих одну и ту же "чистую стратегию"). При этом распределение автоматов коллектива по действиям играет роль коллективной памяти.

Сама по себе приближенная оценка средних внутри коллектива несложна: достаточно каждому автомату между актами игры несколько раз случайным образом обменяться половиной своего текущего выигрыша с несколькими соседями, чтобы в коллективе быстро выровнялась величина, близкая к среднему выигрышу коллектива. Столь же легко оценивается выигрыш, средний по автоматам, выполняющим данное действие, а значит можно оценить и их разность – среднюю *выгодность* данного действия. Этот случайный обмен и несет организующую функцию.

Оказалось, что для решения игры знать игровую матрицу необязательно. Достаточно, чтобы каждый автомат знал лишь один из номеров действий, к которым в данный момент выгодно переходить (причем каждый выгодный номер какой-то части автоматов известен); наоборот, знание выгодности собственного действия недостаточно: если каждый автомат знает лишь то, что номер выполняемого им действия надо сменить на другой (неизвестно какой), то коллективы бесконечно блуждают. Тем самым, граница эффективности случайного поиска в игре оказалась четкой: если известно только, где плохо, игра не решается, а если каждому члену коллектива известно хоть одно из направлений к лучшему, то решается.

Подробнее это рассмотрено в п. 4.3 книги [Чайковский, 1990], а идея доказательства (данного в моей диссертации) приведена в заметке [Чайковский, 1971а]. Поскольку заметка в итоге оказалась единственной публикацией доказательства, ее надо пояснить.

Игровые задачи интересовали меня в одном отношении – можно ли их решать методом проб и ошибок. С этой позиции среди методов решения важны те, которые можно трактовать как случайный поиск. Наиболее привлекала внимание доказанная в 1950 г. теорема Брауна – Неймана: всякая симметричная игра (игра, в которой роли обоих игроков одинаковы; она описывается антисимметричной матрицей размера mXm) может быть решена путем решения системы (m – 1) обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой переменными являются вероятности применения действий первым игроком. Доказательство ее построено на двух свойствах симметричной игры: во-первых, она имеет нулевую (а потому заранее известную) цену, а во-вторых, достаточно найти оптимальную стратегию одного игрока – у другого будет та же. Правую часть каждого уравнения образует кусочно-аналитическая функция, которая равна выгодности данного действия (в данном случае – выигрышу первого игрока при данном действии, если этот выигрыш положителен, и равна нулю в ином случае) [Льюс, Райфа, 1961, с. 551].

Здесь сумма выгодностей действий игрока является так называемой функцией Ляпунова, и потому решение системы прозрачно как аналитически, так и поведенчески. Однако в таком виде задача не привлекает ввиду явной искусственности симметричной игры. К счастью, оказалось, что симметрия игры ни при чем: теорема сохраняет силу для произвольной матричной игры. Эту систему уравнений естественно рассмотреть как модель поведения двух бесконечных коллективов автоматов, непрерывно играющих попарно в матричную игру, причем переменные величины будут играть роль распределений автоматов по действиям в данный момент поиска. Существование решения означает, что данные коллективы способны к оптимальному поведению.

Естественно встал вопрос: существует ли решение системы уравнений, в которых вместо выгодностей взяты невыгодности? Оказывается – нет. Удалось найти простой пример игры 3Х3, в котором система уравнений не приближается к решению игры (траектории блуждают по всему фазовому пространству). Это и было интерпретировано мной как недостаточность штрафов – в игре коллективов надо поощрять тех, чьи действия лучше среднего. И наконец, оказалось, что численное значение выгодностей лишь замедляет процесс поиска: быстрее всего ищут те, кто знает лишь знак выгодности, т.е. лишь номер действия, к которому следует перейти.

Конечно, факт решаемости игры не несет существенного поведенческого смысла, поскольку и сами автоматы, и способ их обмена информацией слишком сложны и надуманны. Однако указание информационной границы, ниже которой решение заведомо невозможно, весьма осмысленно: самая простая конфликтная ситуация (матричная игра) оказывается неразрешима методом случайного поиска, притом – даже в самом грубом приближении. В этом и состояло для меня ориентационное значение игровой модели. Грубо говоря, рассмотрение ее привело сперва к отказу от попыток решать эволюционные задачи методом проб и ошибок, а затем и к пониманию ограниченности статистической ПМ вообще. Подробнее см. главу 9.

### *8-5.2. Случайность и тенденции*

*Тенденцией* называется закономерность, вполне очевидная, но нечеткая и не поддающаяся точной формулировке; чаще всего это происходит вследствие наличия противоречащих примеров. В 1907 г. философ Анри Бергсон ввел в оборот эволюционной литературы тенденцию как эволюционное понятие, и главным его примером были тенденции царств природы: хотя всем известны понятия животного и растения, однако нет ни одного признака, позволяющего четко различить их; главное свойство растений (фотосинтетический механизм) является лишь тенденцией – есть растения паразиты, а есть животные с фотосинтезом (многие жгутиконосцы и др.).

Колмогоров, как мы видели в главе 2, понимал вероятность тоже как тенденцию. По-видимому, никакое знание, в том числе точное, невозможно без нечетких понятий. В сущности, об этом и вел речь Любищев, говоря о пробабилизме (см. выше, п. 2). Для той же цели разрабатывается так называемая нечёткая логика, тесно связанная с модальной логикой, а через нее – с индефинитикой [Чендов, 1974].

Для нашей темы важен та тенденция, которую С.В. Мейен, палеонтолог, эволюционист и философ, назвал *мероно-таксономическим несоответствием*(*). Этим термином Мейен обозначил "отсутствие соответствия между классами частей и классами самих индивидов" [Мейен, 1984, с. 18]; для нас это значит, что распределение меронов по таксонам и наполнение таксонов меронами в определенной степени случайны. Данная тенденция характерна для разнообразия любых объектов. Так, для таксона "завод" характерен мерон "высокие вытяжные трубы", труба – как бы символ завода, но возможны заводы без них, зато данный мерон характерен и для таксона "теплоцентрали". После работы Мейена [1984], правильнее характеризовать случайность типа Б как скрещение несогласованных тенденций (процесс – это тенденция во времени).

Организующая роль мероно-таксономического несоответствия выражается во многом и, в частности, во всех процессах приспособления: для обретения старым таксоном нового свойства чаще всего прежний мерон используется не по назначению, а как положено мерону иного таксона. В биологии этот феномен известен как *принцип смены функций* и является основным при объяснении появления новых органов в эволюции. Так, рыба, оказавшись на суше, использует плавники для ползания, что в ходе эволюции может привести к появлению лап. Аналогично, тракторный завод может быстро перейти на выпуск подвижной бронетехники, даже если это не планировалось при проектировании завода, т.е. было случайным в смысле (Б) для его проекта.

Случайность такого типа возможна в качестве массовой именно потому, что пространство таксонов связано с пространством меронов не прямо (мерон – таксон), а как бы наискось, косой сеткой – через мероно-таксономическое несоответствие.

---

(*)Таксон – это класс объектов, а мерон – класс их частей. Каждая птица имеет клюв, а таксон "птицы" имеет мерон "клювы"; в этот мерон входит и клюв утконоса (млекопитающее). Наоборот, для таксона "пресмыкающиеся" обычен мерон "лапы", но у змей лап нет. Мерон, строго соответствующий таксону – редкость (позвоночник у позвоночных, цветок у цветковых и т.п.).

## 8-6. Эффект Шноля и диатропика случайности

Как говорилось в главе 5, всякая ПМ пытается описать со своей позиции все явления и, в частности, всевозможные случайности, однако не все явления в данную ПМ хорошо укладываются. Поэтому нельзя говорить о знаковой или диатропической случайности, но можно говорить о знаковом или диатропическом описании той или иной случайности. Более того, некоторые категории случайных явлений не имели удовлетворительного описания до появления соответствующих ПМ, о чем тоже в главе 5 шла речь. В качестве яркого примера случайности, для описания которой не было языка вплоть до появления пятой (диатропической) ПМ, можно привести ту, которую вот уже почти полвека исследует биохимик С.Э. Шноль.

Его исследования коснулись самых разных природных явлений, и всюду было обнаружено, что за экспериментальной "гауссоидой" скрывается сложная и достаточно устойчивая плотность распределения исследованной случайной величины, причем локальные пики не исчезают с накоплением данных, а четко воспроизводятся. В п. 7-5.1 этот феномен уже был кратко описан, и обнаруженная Шнолем плотность была названа отороченной гауссоидой, а сейчас надо добавить, что сами отороченные гауссоиды от опыта к опыту меняются, причем не как попало, а выстраиваются в достаточно стройные ряды. Точнее говоря, если кривые сгладить неким однообразным методом, то их оказывается всего около 30 вариантов, тогда как самих опытов проведены тысячи. Таблицы см. [Шноль и др., 1998], а одна из них дана и у меня [Чайковский, 2001].

Главное для нашей темы состоит в том, что "формы компьютерных гистограмм, имитирующих статистику Пуассона, ничем не отличаются от гистограмм, построенных по результатам измерения радиоактивности" [Шноль и др., 1998, с. 1137]. К сожалению, компьютерные кривые не опубликованы, но приняв на веру, что какие-то из них существуют и чем-то схожи с природными, можно заключить, что налицо не просто какой-то особенный материальный процесс, но подлинно алеатический феномен. Итак, можно уверенно говорить про *эффект Шноля*. Точнее, он состоит из трех феноменов:

1. Феномен отороченной гауссоиды (простой эффект Шноля),
2. Ряды изменчивости отороченных гауссоид (диатропический эффект Шноля),
3. Космофизический эффект Шноля (в работах Шноля содержатся материалы о существовании еще одного интереснейшего явления – зависимости рядов изменчивости от космофизических обстоятельств; но этого явления мы касаться не будем. См. о нем [Блюменфельдь, 2002]).

Даже въедливые критики, отвергнувшие всё в работах Шноля (в том числе и космофизический компонент), тем не менее почти в точности воспроизвели эффект отороченной гауссоиды и поместили соответствующие графики; один из них приведен на рис. 15. В тексте их статьи этот факт (совпадение их собственных данных с данными отвергаемой концепции) не упомянут, а в подписи к рисунку сказано лишь: <<По нашему мнению, наблюдаемые локальные максимумы и минимумы есть результат "статистической инерции">> [Дербин и др., 2000, с. 211].

Что имелось в виду, не сказано, и приходится признать, что простой эффект Шноля – доказанный факт. Как сказано в п. 7-5.1, этот факт ясно говорит о недостаточности языка и идеологии ТВ для описания самых обычных, хрестоматийных вероятностных явлений. При этом важно иметь в виду, что и на кривых гиперболических распределений также «существуют неизбежные выбросы (зубцы), отражающие не ошибку и не случайность, а свойства ценоза, и требующие модификации... методов, экстраполирующих экспериментальные данные» [Кудрин, 1991а, с. 16].

Потребность в алеатике налицо[*], а всеобщность феномена говорит о том, что и причина столь же обща и что для описания эффектов, подчиняющихся статистике, как стандартной, так и гиперболической, нужен новый общий подход.

Зацепкой к нему может оказаться факт, едва отмеченный авторами походя: "Эта типичная фрактальность требует для своего объяснения дальнейших экспериментов" [Шноль и др., 1998, с. 1133]. (Как историку науки мне очевидно иное – накопление данных без руководящей идеи бесперспективно. На сегодня эффект Шноля нуждается не в новых опытах, а прежде всего в рабочей теории, которая подскажет, какие нужны опыты, и затем, вернее всего, уступит место иной теории.) Возможно, что дело окажется не во фрактальности, а в самоподобном строении действительой оси (см. гл. 6). К сожалению, опубликованных данных для анализа недостаточно, а установить с группой Шноля контакт мне не удалось.

Сама же группа, увы, ставит "развитие теории" на последнее место в ряду своих задач [Шноль и др., 1998, с. 1139]. Вольному – воля, но вряд ли тогда стоит сетовать на косность оппонентов: насколько знаю, в истории науки нет примера, когда бы факт преодолел неприятие ученого мира без объясняющей теории. Повторяю, сама теория может быть затем отброшена, но факт без объяснения сообществом к рассмотрению не принимается – такова логика социальной истории науки.

Разумеется, наличие рабочей теории лишь необходимо, но недостаточно для принятия новых фактов. Достаточным условием представляется, в терминах главы 5, соответствие теории бытующим в обществе представлениям, т.е.

---

[*]Это видят и Шноль с соавторами; они именуют алеатические аргументы арифметическими. Они надеются вывести отороченную гауссоиду из механизма многостадийного химического (но, замечу, не радиоактивного!) процесса и выявления комбинаторики взаимодействий [Шноль и др., 1998, с. 1137]. На мой згляд, надежда напрасна – таким путем можно получить нечто вроде биномиальной плотности (как сделал 300 лет назад Я. Бернулли), а она одновершинна. Суть надо искать глубже.

господствующим ПМ. С позиции третьей (статистической) ПМ феномен отороченной гауссоиды нелеп.

Что касается втоого эффекта Шноля, то отсутствие его подтверждения в опытах критиков [Дербин и др., 2000] настораживает, но не более – ведь и опровержения их метод дать не мог ввиду его грубости. Если действительно наблюдается ограниченное и обозримое разнообразие плотностей распределения одной и той же случайной величины, то налицо ситуация, совсем незнакомая математикам и физикам, зато хорошо известная в тех науках, где разнообразие – исконный предмет анализа (химия, биология, лингвистика и др.). Исследование тут естественно начать с упорядочения разнообразия, т.е. с выявления рядов изменчивости. Как сказано ранее, такие ряды сперва были выявлены в химии, где получили название *гомологических*. С их помощью открыто множество новых веществ (например, ряды углеводородов).

В 1920 г. Н.И. Вавилов с помощью данного метода предсказал существование одного вида злаков (безлигульная рожь) [Вавилов, 1987]. Параллель химии и биологии в этом пункте достаточно очевидна [Урманцев, 1979], но игнорируется почти всеми. Принято писать, что гомологические ряды в биологии – следствие сходства генов у близких видов (например: «Связано это с тем, что от общего предка может быть унаследован не фенотипический признак, а только кодирующие его гены» [Клюге, 2000, с. 19]), хотя всем, это пишущим, известно, что это не так. Например, общеизвестна параллель рядов жилкования у крыльев насекомых и у листьев растений.

Можно полагать, что аналогично будут описаны ряды изменчивости отороченных гауссоид. Для принятия их научным сообществом понадобится то же самое, чего пока не хватает рядам Копа – Вавилова, т.е. смена господствующей ПМ, поскольку анализ разнообразия в терминах третьей ПМ никогда не удается. Системолог Ю.А. Урманцев сделал попытку описать его в терминах общей теории систем, но и он успеха у коллег не имел. Видимо, успех возможен с утверждением пятой ПМ, когда самодовлеющий характер законов разнообразия станет для ученых очевидным.

Однако уже сейчас надо пытаться понять, что означает сам феномен рядов, т.е. повторности форм плотностей. Если он реален, то приходится сделать обескураживающий вывод: подлинно независимых событий не существует. Эта мысль не раз уже высказывалась. Например, сто лет назад немецкий статистик и философ Карл Марбе выступил с серией работ, в которых утверждал, что природа обладает памятью и что поэтому, в частности, после 17 подряд выпадений герба вероятность его дальнейших выпадений должна уменьшиться(*). В наше время с похожей идеей выступил английский биолог и философ Руперт Шелдрейк [Sheldrake, 1981]. О нем будет немного сказано в следующих главах.

(*)Со своей теорией Марбе выступал и позже [Marbe, 1934] и вызвал обширную полемику, ныне забытую.

"Теория Марбе должна быть отвергнута, так как она не подтверждается опытами" – писал Феллер [1964, с. 153], но вернее было бы написать, что она не подтверждена и не опровергнута, поскольку для этого потребовалось бы бросить реальную монету более 2 млн раз. И только теперь, с обнаружением группой Шноля того факта, что эффект "памяти" или "статистической инерции" в основе своей одинаков для физического процесса реализации случайностей и для его имитации на компьютере, можно приступить к проверке компьютерного аналога схемы Марбе.

В свете эффекта Шноля можно полагать, что идею Марбе будет трудно опровергнуть. Поэтому стоит повторить слова методологов "Мы на самом деле не знаем, что такое независимость" [Кац, Улам, 1971, с. 72]. Как мы видели (п. 3-3.1), понятие независимости было введено в ТВ просто для удобства построения теории, и даже радиоактивный распад не вполне может считаться имманентно случайным явлением (см. выше, п. 1, тип Е), т.е. даже для него независимость отдельных актов нельзя постулировать. В ТВ независимость попросту постулирована, а всякое обоснование ТВ выводит феномен независимости из каких-то конкретных допущений, которые иногда справедливы, а иногда нет.

Так, с позиции механического подхода независимость событий – всего лишь расцепление корреляций, что особенно хорошо видно на "бабочке Лоренца": сперва переходы между "крыльями" довольно редки, а затем принимают стохастический характер. Тот факт, что в схемах динамического хаоса ЗБЧ и ЦПТ вытекают из распада (decay) корреляций, показала, например, Юнг [Young, 1998]. Возможно, что эффект Шноля наблюдается только на временах, меньших, чем время расцепления корреляций.

Однако кроме механического, возможны и другие подходы к эффекту Шноля. Он, например, определенно свидетельствует, что в диатропической части алеатики от ведущей роли предельных теорем придется отказаться, поскольку "принятые методы статистической обработки результатов, основанные на центральных предельных теоремах, не приспособлены к анализу тонкой структуры распределений" [Шноль и др., 1998, с. 1138]. Прежде всего это касается интегральных теорем, но и к локальным следует относиться с осторожностью. Надо помнить, что мы всегда имеем дело с текущими, а не с предельными значениями измеряемых величин, причем взаимодействуют сами случайные величины, а не их средние значения.

## Глава 9. Алеатика и другие науки

Не будучи ни в какой мере знатоком упоминаемых далее наук (кроме биологической эволюции), я не претендую ни на оценку их основной проблематики, ни на типичность для них тех примеров, которые привожу далее с целью показать некоторые возможности алеатики. Не в силах уследить за новейшими успехами этих наук, надеюсь, что читатели простят меня за отставание на 10-15 лет, если вспомнят, что физики до сих пор обсуждают, в качестве современных, вероятностные вопросы квантовой теории середины XX века, что методологи рассуждают о случайности в понятиях 1920-х годов, а дарвинисты вообще основывают свои теории на идее случайной мутации, как она выглядела сто лет назад. В таких условиях мои заметки вполне могут быть полезны, тем более, что мне тут важнее увязать новое со старым, нежели гнаться за новейшим.

### 9-1. Случайность в планетной астрономии

В работе [Чайковский, 1987] было показано, что планетная астрономия (и планетная механика в частности), слывущая самой точной и детерминированной из наук, в действительности пронизана идеями случайности, притом подчас самыми расплывчатыми. Так, случайность вроде обратного вращения Венеры вряд ли можно уверенно отнести к какому-либо типу (даже к уникальности) или какой-либо ступени.

Один из выводов был тот, что "гораздо перспективнее искать объяснения статистической закономерности в целом", нежели каждому отдельному факту (с. 82). Проводилась параллель между космической и биологической эволюцией (мы затронем ее ниже, в п. 8). Статья касалась классических областей небесной механики, не связанных с проблемой многих тел; теперь добавлю, что доказательство невозможности однозначного решения задач движения трех и более тел (1966 г.) ввело сюда все реалии теории динамического хаоса.

Вот в пояснение факт из теории планетных колец. Там описаны "частицы-странники", чьи траектории похожи на траектории в странных аттракторах. "Перепутывание областей питания и зон незахваченных обломков объясняется наличием обломков-странников, которые, попеременно ускоряясь и замедляясь в поле крупных расходящихся тел, путешествуют между ними по довольно сложным траекториям". Судьба такой частицы "вблизи спутника, который она догнала, также может сложиться по-разному в зависимости от совсем ничтожных смещений в начальных координатах. Можно сказать, что частицы-странники – это стохастическая компонента нашей динамической и, в основном, детерминированной системы" [Горькавый, Фридман, 1994, с. 120-121].

Эта случайность ступени 1 (согласно п. 8-3.2) может как обладать вероятностной компонентой, так и не обладать, но в любом варианте случайная компонента играет организующую роль в создании и поддержании целостной системы.

### 9-2. Связь алеатики с физикой

Гауссова идеология возникла из тех физических задач, которые легко трактуются в рамках второй ПМ. Однако считается (и в этом влияние третьей ПМ), что нормально распределена любая физическая величина, которая, подобно ошибке измерения, является суммой большого числа независимых малых слагаемых, почти уравнивающих друг друга. Но почему эти незримые компоненты именно суммируются? Почему они независимы? Иногда говорят, что их взаимодействия могут быть более сложными, но что таковой сложностью можно "в первом приближении" пренебречь. При этом, однако, встает более каверзный вопрос – почему порядок малости этих пренебрегаемых добавок выше порядка малости самих незримых величин? Если вдуматься, тут налицо порочный круг (см. конец главы 3).

Единственным оправданием гауссовой идеологии служит практическая эффективность ТВ, т.е. ссылка на тот факт, что она работает там, где она работает. Пример радиоактивного распада рушит и эту сомнительную аргументацию: Откуда данный атом "знает", что сейчас именно ему надо распасться, если не взаимодействует с другими объектами? Распад идет в некоем событийном вакууме и все-таки проявляет те же свойства, которые характерны для потока взаимодействий. Так в потоке ли суть?

Налицо альтернатива. Либо событийный вакуум – фикция, т.е. не зависимых ни от чего событий попросту не бывает (и третий эффект Шноля, если он имеет место, говорит в пользу этого); тогда надо говорить не о событийном вакууме, а о "черном ящике взаимодействий" [Заславский, 1984, с. 215] как о причине гауссовости многих процессов. Либо он действительно существует, но тогда он явно обладает тем свойством, что возникающие там случайности обладают равновозможностью (симметричны).

В п. 7-1 говорилось, что, по-видимому, взаимодействие событий (если оно не сводится к перемешиванию) искривляет тройную симметрию случайности, вплоть до исчезновения вероятностей. Несимметричная случайность легче всего выявляется там, где налицо ее индикатор – гиперболическое распределение частот. Ту же роль индикатора играет и *гиперболическая релаксация*: если чисто вероятностная релаксация имеет, как известно, вид экспоненты от времени (скорость затухания пропорциональна числу частиц), то в когерентных системах она носит гиперболический характер (для простой гиперболы скорость пропорциональна числу пар взаимодействующих частиц).

На этом основана диагностика физической когерентности: Фриц-Альберт Попп, немецкий биофизик и автор концепции *биофотонов*, объясняющей феномен "биогенетических лучей" (сверхслабого полихромного когерентного излучения биообъектов, которое открыл А.Г. Гурвич), пишет, что если зарегистрирована экспоненциальная релаксация, то можно считать продукт распада исходящим из хаотического поля, а если гиперболическая, то – из когерентного поля. "Для этого решения нет более необходимости придерживаться идеи постоянной частоты" – заключает Попп [Recent advances..., 1992, с. 53], желая этим сказать, что нашел объяснение полихроматического характера биофотонного "лазера"; с позиции алеатики можно сказать большее: по-видимому, стоит искать неустойчивость частот этого излучения. Однако, когда Попп полагает биофотоны основным инструментом самоорганизации в эволюции, это кажется мне преувеличенным. Осторожнее будет и здесь говорить лишь об организующей роли случайности.

Столь же важна гиперболическая релаксация в *спин-стекольной* термодинамике, т.е. в теории магнитных атомов, хаотически рассеяных в немагнитном образце. Не берусь обсуждать суть этой теории, но очевидна неадэкватность ее аппарата (ТВ) ее субстрату. Кроме неэкспоненциальной релаксации, здесь имеют место множественные фазовые переходы, носящие характер случайного ветвящегося (фрактального) процесса, а такие процессы обычно обладают бесконечными дисперсиями и, следовательно, неустойчивыми частотами. Понятно, почему "для многих физиков, занимавшихся проблемой спиновых стекол, состояние дел в этой области продолжает оставаться безнадежной путаницей из тысяч разноречивых экспериментов... и десятков сомнительных теорий, ни одна из которых не имеет отношения к эксперименту" [Дорофеев, Доценко, 1994, с. 22].

Подробнее, но сложнее проблему излагает обзор [Доценко, 1993], где в п. 2.4 прямо отмечается, что "самоусреднение" (т.е. усреднение по макроскопическому образцу) в "остеклованных" (структурированных, но не кристаллических) телах редко что дает. "Стеклование" оказалось одной из основных процедур не только в биофизике, но и в физике всяких полимеров – см. обзор [Гросберг, 1997], где, в частности, отмечено отличие случайностных характеристик "остеклованных" тел ото всех прочих. В итоге видим, что "возможность применения методов традиционной статистической механики (распределение Гиббса и т.п.) представляется весьма загадочной... и не вполне понятно, когда можно, а когда не вполне" [Доценко, 1993, с. 7]. Дело явно за алеатикой.

Две физические теории, статистическая и квантовая, прямо построены на идее случайности, но первая основана на идее эргодичности, скорее мировоззренческой, чем физической, и мы отложим ее рассмотрение до главы 10. Пока же обратимся к квантам.

Как писал в 1956 году Поппер, "Главный аргумент в пользу интерпретации вероятности как предрасположенности следует искать в ее способности устранить из квантовой теории некоторые крайне неудовлетворительные элементы иррационального и субъективистского характера" [Поппер, 1983, с. 422]. Достаточно заглянуть в недавнюю литературу, чтобы убедиться, что цель эта не достигнута: споры идут прежние, те же, что сорок лет назад, до Поппера. Не мне судить об их сути, но замечу, что без алеатики они будут и впредь топтаться на месте.

В теории квантов применяется стандартная ТВ, следовательно частоты предполагаются устойчивыми. Так ли это на деле? Ведь источник вероятностного, очевидный в механике (перемешивание, неустойчивость, суммирование малых помех), тут не виден совсем; нет уверенности и в наличии "событийного вакуума" – тоже возможного источника симметрии случайностей (см. п. 7-1). Оправданна ли уверенность ученых в том, что волновая функция описывает именно амплитуду вероятности?

Вспомним, что сперва теорию квантов называли "квантовая механика", т.е. явно или неявно стремились трактовать ее (как и "статистическую механику") в рамках второй ПМ. Отсюда и планетарная модель Бора, и волновое уравнение Шрёдингера, и (что ныне звучит совсем странно) термин "матричная механика" в отношении матричной (т.е. семиотической по сути) модели квантовой системы. На мой же взгляд, теория квантов впервые в Новом времени ориентировала физику на системную ПМ (одновременно то же сделала теория относительности), но перейти от второй ПМ к четвертой не удалось без обращения к третьей, что и породило массу искусственных проблем.

Далее, какое отношение к вероятностям имеет соотношение неопределенностей? Напомню, что его обобщение – принцип дополнительности Бора – с успехом применяется и к неформализованным случайностям, когда о вероятностях речи нет и лучше говорить о случайности как свободном выборе – с предрасположенностью или без нее. Можно надеяться, что по решении этих и подобных им вопросов "неудовлетворительные элементы" квантовой теории изрядно поредеют.

Как пишет С.Я. Беркович [1993, с. 64], существуют "трудности на пути представления квантовой механики как статистической теории", заставляющие вводить даже такие уловки, как "представление о квантовой частице, движущейся вспять во времени". По Берковичу, "свойства квантовых объектов определяются не их непосредственным окружением, но глобальной структурой целостной системы". Если же атом – система, то свойства случайности квантовых явлений надо не постулировать (как требовали первая и третья ПМ), а выводить из сути системы. Системная же случайность, как мы видели, часто оказывается нестохастической (невероятностной).

Смутную потребность в анализе природы квантовой случайности выражал и Ричард Фейнман: <<У нас нет хорошей модели для объяснения частичного отражения от двух поверхностей; мы только вычисляем вероятность... Я не собираюсь объяснять, как фотоны в действительности "решают" вопрос, отскочить ли назад или пройти насквозь. Это неизвестно. (Возможно, вопрос не имеет смысла.)>>; единственную альтернативу такому псевдознанию Фейнман видел в каком-то *механизме* ("колесики" и "шестеренки") внутри фотона, упомянув впрочем загадочную фразу из "Оптики" Ньютона, где частичное отражение объяснялось неким *предрасположением* частиц света; обе идеи Фейнман [1988, с. 20-24] отверг. Как видим, выбор вёлся между второй, третьей и шестой ПМ (по-моему же, тут более перспективна четвертая).

Наконец, не стоит обожествлять системность. Пусть Вселенная и система, но ее происхождение от этой констатации не проясняется. Не лучше ли сказать, что выход ее из сингулярного состояния, описываемый как Большой взрыв, можно описать на языке пропенсивности? Тогда и "антропный принцип космологии" получит рациональный статус. На это обстоятельство мое внимание любезно обратила философ Е.А. Мамчур.

Суть ее замечания, как я его понимаю, в том, что данный принцип выведен не из существа дела, а из той познавательной трудности, которая вызвана господством статистической ПМ: если пространства (как физическое, так и все абстрактные пространства, например, событийное) мыслить однородными и изотропными, то совпадение параметров, необходимое для возникновения материи и жизни, выглядит невероятным. Да, оно невероятно, если полагать его совокупностью независимых случайностей, но зачем полагать это? На каком основании принято прилагать идею независимости к тому, о чем ничего не известно?

До недавних пор было принято считать независимыми все события, связи между которыми нет никаких оснований ожидать. Т.е. было принято считать независимость первичной, а всякую связь – следствием каких-то событий. Пропенсивный подход явился альтернативой этой убежденности: если мы ничего не знаем о зависимости, то можем предполагать ее наличие с тем же правом, что и независимости; более того, мы просто обязаны рассматривать обе альтернативы. Если же допустить, что мировые константы первично связаны в рамках неизвестной пока теории, то антропный принцип из мировоззренческой аксиомы превратится в одно из следствий этой теории. Возможно, в этом пункте обойдется вообще без алеатики, но следует всегда иметь в виду, что неизвестные нам связи могут оказаться нежесткими, т.е. каком-то смысле случайными.

### 9-3. Связь с экономикой

Итальянской экономической статистике принадлежит заслуга выявления гиперболического распределения людей по их богатству – первый шаг здесь сделал в 1830 г. Адриано Бальби, а в науку они вошли через 70 лет благодаря Вильфредо Парето. (Ежегодные заработки, наоборот, чаще всего распределены в обществе логнормально, и это обычная ситуация: гипербола возникает там, где есть система с памятью). Это хорошо известно [Кудрин, 1991; Шрёдер, 2001], как и то, что большой интерес в экономике проявляется сейчас к фрактальной случайности [Шрёдер, 2001, с. 178, 208]. Зато остается почти незамеченным факт двухсотлетней путаницы в понимании (точнее, в непонимании) роли случайности для схем обратной связи.

Тут наиболее (и всех скандальнее) известен английский экономист Томас Мальтус, выступивший в 1798 году с брошюрой "Очерк о населении", в которой он бросил в общество понятие "борьба за существование". И хотя сам он вскоре испугался своих заявлений о "лишнем на пиру природы" и коренным образом переработал свой "Очерк" (обратившийся в спокойный статистический двухтомник, мало кем читаемый), однако идея была подхвачена читающей публикой в первичном и самом примитивном виде. Впоследствии она породила, в частности, дарвинизм.

Менее известно, что в 1890 году в Лондоне появились две работы – кембриджского экономиста Альфреда Маршалла [Marshall, 1890] и теоретика русского анархизма П.А. Кропоткина [Kropotkin, 1890], каждая из которых пыталась в своей науке поколебать мнение о благотворности конкуренции. Маршалл (в молодости – последователь дарвинизма [Селигмен, 1968, с. 297]) убеждал, что победа в рыночной конкуренции происходит не столько в силу лучшего качества или меньшей себестоимости изделий, сколько в силу "удачного начала деятельности" фирмы. <<Здесь присутствует элемент "случайной стоимости" ("opportunity value"), которая в конкурентной ситуации легко может исчезнуть>> [Селигмен, 1968, с. 309]. Другими словами, итог конкуренции часто бывает случайным, т.е. не связанным с профессиональным преимуществом одного конкурента над другими. (Динамика, как видим, сходна со случайным выживанием клона, о чем мы не раз толковали в предыдущих главах. Хотя замечу, что никакой конкуренции в схеме клонального выживания нет.)

Однако никто тогда, включая самого Маршалла, особого значения этому суждению не придал. Лишь через сто лет экономисты и социологи стали обращать внимание на то, что конкурент часто (а может быть и как правило?) побеждает по причинам, никакого отношениия к качеству его продукции не имеющим, т.е. случайным в смысле Б (см. п. 8-1). Затем выяснилось, что в экономике есть обширная область, где конкуренция даже больше мешает развитию, чем способствует, и что к ней относятся как раз наиболее продвинутые отрасли – например, электроника.

Американский экономист Брайан Артур, взявшийся разрабатывать эту область, отмечает, что экономическая наука долго игнорировала новую проблематику по чисто модельным обстоятельствам: "До недавних пор авторы учебников по традиционной экономике обычно преподносили свою науку как некую обширную ньютоновскую систему с единственным равновесным состоянием", причем в ней "неполадки или временные возмущения ... быстро компенсируются противоложно направленными силами" [Артур, 1990, с. 66]. Эту модель (явно механическую по его мнению) автор считает "фатально простой структурой, навязанной ей [экономике] в XVIII в.", т.е. во времена Адама Смита.

Мне остается добавить: ссылка на Смита (как и часто проводимая тут параллель с принципом Ле Шателье) ясно говорит, кроме механического, о статистическом компоненте модели. Это характерно: почти никто из ученых не видит различия между второй и третьей ПМ (исключение составил, как мы видели в п. 5-3.2, Аттали, различивший "ньютоново" и "гиббсово" понимания природы).

На самом же деле, рыночная идеология еще у Смита несла, кроме статистического (баланс, конкуренция), также и системный компонент: «невидимая рука», реализующая общее благо, и идея homo oeconomicus — бизнесмена, стремящегося только к максимизации своей прибыли. Как и все ранние варианты системного подхода, модель эта слишком груба (что понимал и Смит) – ни один человек не ограничивается оценкой какой-либо одной числовой функции и ни один человек не стремится к ее максимизации любой ценой, а многие люди вообще ничего максимизировать не хотят, довольствуясь приемлемой областью значений важных для них величин. Что же касается «невидимой руки», то понимание системы как устанавливающей некий баланс интересов, вообще есть тот самый исходный пункт, с которого системная ПМ начинает обособляться от статистической ПМ [Чайковский, 1992, с. 76]. В наше время всем ясно так же, что в любой экономике есть элемент диатропический – именно поэтому приходится моделировать общество (в том числе и экономику) не рынком, а ярмаркой.

Словом, любая ПМ находит себе аргументы, и в рамках каждой встают свои алеатические задачи, но лучше избегать тех ПМ, которые себя исчерпали — они тянут нас в прошлое, а не помогают решать задачи нынешние.

В частности, «невидимая рука» и принцип Ле Шателье – частные случаи сформулированного в XX веке принципа стабилизации динамических систем с помощью отрицательной обратной связи. Таких систем в самом деле много, и указать на них было необходимо. Никакой алеатики здесь может и не оказаться.

Однако, кроме отрицательной, бывает и положительная обратная связь, которая, как известно, дестабилизирует систему. В химии она именуется автокатализом и ведет к взрыву. Именно такова роль конкуренции в высокоразвитой экономике: малая начальная удача (случайность типа В) приводит (в силу случайности типа Г) к монополии. Точнее, если затраты на разработку велики по сравнению с затратами на серийное производство, то изделие, вышедшее на рынок раньше, побеждает на нем даже в том случае, когда оно ничем не лучше (или даже несколько хуже) опоздавших. Аналогичная ситуация в биологии хорошо известна как "принцип основателя".

Для нас важно, что 200-летняя уверенность экономистов-либералов в мудрости "рыночной стихии" основана на неверном понимании случайности: отрицательную обратную связь, при которой случайности (типа А) быстро гасятся системой, видели там, где на самом деле царит положительная обратная связь, при которой случайность (типа В) может неимоверно усиливаться, даже если она вредит обществу.

Возможная роль алеатики видится тут прежде всего в различении случайностей деструктивных и конструктивных. К последним относится прежде всего та, где малые возмущения компенсируют друг друга (она выступает в форме нормального распределения), а затем – все виды организующей роли случайности. Сама по себе конкуренция, как феномен деструктивный, таких случайностей не порождает, но из порождаемых ею неустойчивостей другие (конструктивные) механизмы могут извлекать полезные для развития варианты. Это значит, что рыночный механизм может существовать лишь в рамках некоторой системы, регулирующей экономику – точно так же, как последовательность многих взрывов может обеспечивать движение в едином направлении только в цилиндрах двигателя.

## 9-4. Связь с биологией

Наиболее впечатляющее вторжение алеатики в биологию связано с идеями фрактального хаоса. Приведу один пример из физиологии: всегда считалось, что хаотическая динамика параметров организма означает болезнь, а теперь выяснилось, что всё как раз наоборот. Например, исследование ритма сокращений сердца "удар за ударом" показало, что у здорового сердца ритм хаотичен (в фазово-пространственном представлении график напоминает странный аттрактор), у тяжело больного менее хаотичен (напоминает хаотический предельный цикл), а у умирающего почти регулярен (стягивается к точке) [Голдбергер и др., 1990]. Такие работы привлекают много внимания, но другие, столь же важные, направления остаются почти неизвестными.

Что позволяет клеткам (одного организма или одной колонии) делиться синхронно? Попытки моделировать этот процесс привели кибернетиков к задачам о синхронизации большого коллектива N автоматов. Основной интерес представляла задача с одинаковыми автоматами, имеющими небольшое число состояний, при котором автомат не способен считать ни время, ни число членов коллектива. Решения были остроумны, но все они, пока рассматривались детерминированные задачи, обладали общим дефектом: сбой одного автомата хотя бы в одном такте или даже малое перемещение автомата среди соседей разрушали весь процесс синхронизации. Биологического значения такие ненадежные схемы не имели. Однако в 1969 г. ленинградский кибернетик В.И. Варшавский изменил постановку задачи: он предложил искать такое поведение автоматов, при котором в синхронное состояние приходят одновременно не все, а почти все автоматы. (Его автоматы соединялись в случайные пары равновероятно.)

Оказалось, что такой случайностный подход позволяет построить очень надежную систему и сильно упростить внутреннюю структуру самих автоматов. Эта система подробно рассмотрена мною ранее [Чайковский, 1990, с. 98–100] как основная при обсуждении организующей роли случайности.

Самоорганизация, демонстрируемая при таком типе синхронизации, очень красива, но за нее надо дорого платить – случайное взаимодействие означает непрерывное перемешивание коллектива (как перемешиваются молекулы в сосуде с газом), а это означает невозможность образования не только структуры из индивидов, но и существенного разнообразия самих индивидов. В реальных коллективах пары (например, при половом процессе у высших организмов) и группы образуются если даже и с элементом случайности, то далеко не случайно и, тем более, не равновероятно.

Поэтому в качестве основной случайности, организующей элементы в целое, чаще выступает не синхронизация, а другие феномены – например, мероно-таксономическое несоответствие (см. п. 8-5.2) – феномен, в принципе отсутствующий в однородных коллективах. Очень ярко он выступает при анализе видового разнообразия организмов.

### *9-4.1. Систематика*

В необъятной литературе по теории систематики можно выделить две противоположные тенденции — к целостной характеристике каждого таксона («Не признаки задают род, но род задает признаки» – декларировал Карл Линней) и к манипуляции с признаками. Если первая требует сложной алеатики, то вторая тяготеет к обычной ТВ и стандартной МС. Крайним выражением второй тенденции последние полвека, начиная с книги В. Геннига (1950 г.), является *кладистика*. Недавно ее суть ясно изложил петербургский энтомолог Н.Ю. Клюге. В основе ее лежит тезис:

«Кладистический анализ базируется на предположении о неповторимости и необратимости эволюционных преобразований (известном, как закон Долло). Это предположение, в свою очередь, основывается на соображениях вероятности: вероятность того, что одно и то же изменение в генотипе может произойти независимо несколько раз, настолько мала, что ее можно считать равной нулю. Таким образом, предполагается, что каждая апоморфия (признак, годный для систематики – Ю.Ч.) возникла один раз и и унаследована всеми потомками того вида, у которого она возникла» [Клюге, 2000, с. 15].

Сам же автор до этого (на с. 9) признал: «Однако в действительности каких-либо общих законов эволюции не существует (или, по крайней мере, еще не открыто)». Тем самым, либо закон Долло еще не открыт (что странно, поскольку Луи Долло давно умер), либо это — не общий закон, а лишь одна из тенденций, на которой строить систематику не имеет смысла. Дилемма решена автором именно путем обращения к вероятности: повторным возникновением признака можно пренебречь.

На самом деле «Закон Долло» гласит лишь о невозможности повторения целого таксона, а отнюдь не его признаков. Даже и в такой форме «закон» не всегда верен, что заставило В.А. Красилова [1999] ввести понятие *«лазарева группа»* (в честь библейского героя, воскресшего Лазаря). А признаки и даже их комплексы возникают многократно, и образуют в разных таксонах параллельные ряды (упомянутые ранее как ряды Копа – Вавилова). Так что тезис кладистики можно понимать только в том смысле, что для систематики пригодны лишь те признаки, о которых достоверно известно, что каждый возник всего однажды. Их именуют апоморфиями, и система в сущности своей задается в тот момент, когда задан перечень апоморфий; всё дальнейшее – лишь техника.

Автор вполне понимает это и на с. 17 пишет, что реально признаки можно выявить, когда «очерчена естественная группа», что «наше восприятие признаков зависит от нашего представления о филогении» и что поэтому кладистический процесс ни начала, ни конца не имеет. Словом, он в душе стоит на позициях целостной систематики, и лишь аппеляция к вероятности заставляет его на практике ею пренебречь и манипулировать признаками. Если так, то судьба кладистики зависит от решения вопроса: существует ли вероятность (в данном контексте – устойчивая частота) появления апоморфии?

Положительный ответ возможен только при многократной повторности, каковая у Клюге отрицается. Трудность легко преодолима, если прямо признать, что речь идет не о тех типах случайности, которые ведут к стохастичности, а об уникальности (тип (В) из п. 8-1), но это означало бы, что основной тезис кладистики не обоснован, а постулирован. Для обоснования приходится говорить о реальных частотах изменений генов, и оказывается, что «в действительности мутации являются не равновероятными», поскольку мутабильность зависит от работы всей генетической системы организма, так что апоморфиями могут служить исключительно те признаки, которые кодируются низкомутабильными генами [Клюге, 2000, с. 24].

Добавлю: как дарвинист Клюге должен бы признать, что «зависит» означает зависимость от среды, т.е. что признак, нужный для выживания, должен возникать многократно. Тогда на чем основана уверенность в уникальности апоморфий? Ни на чем: до этого автор сам привел в качестве «наибольшего затруднения» ряды Вавилова и признал, что этим доказывается «существование независимо возникающих гомологических признаков», которые следует «исключить из кладистического анализа» (с. 19). Как – не сказано, хотя другие «затруднения» разобраны подробно, с примерами.

Критику кладистики Геннига дал в свое время Любищев [1982], чьи доводы, насколько могу судить, сохраняют силу поныне, но чьи работы Клюге вряд ли читал внимательно. К нашей теме относится лишь вероятностный тезис кладистики, и мы видим, что он совершенно не продуман кладистами. Поскольку важные для классификации признаки возникают многократно, встает вопрос: существует ли вероятность их появления? Ответ давно дан, он отрицателен, что и надо рассмотреть.

Число видов в роде связано нежестко, но все-таки связано с числом тех признаков, по которым мы классифицируем сами роды и виды. Нежесткость – это форма случайности, но связана ли она с вероятностью?

Вся идеология вероятностей, вытекающая из теоремы Кардано – Бернулли, гласит, что наиболее вероятно то, может быть реализовано наибольшим числом способов или (это в сущности почти то же) что наиболее симметрично. Если случайности складывать и требование максимума их симметрии ничем не ограничивать, то мы придем к нормальному распределению, т.е. к наличию вероятности (см. пп. 4-6, 5-5).

Однако в случае видов и родов симметричность касается равным образом и самих таксонов, и их классификационных признаков – меронов (см. п. 8-5.2). Налицо две сопряженные группы случайностей. Если их тоже складывать, то это приводит к следующей простой экстремальной задаче.

Пусть задана система таксонов, каждый из которых определяется своей совокупностью меронов, причем множество меронов предполагается единым для всей системы. Трактовка энтропии как меры разнообразия позволяет в данном случае использовать ее в качестве меры симметрии. Сходство видов выражается (при данной постановке задачи) в том, что они входят в общий род, а сходство родов – в том, что они содержат равное число видов. Формализуем это так. Пусть Y(X) – число родов, содержащих X видов каждый; тогда X(Y) – число видов, входящих в те роды, число которых равно Y. Заменим целые числа X, Y на соответствующие доли x, y. Поскольку x>0, y>0, то то максимум суммарной энтропии обоих разнообразий запишется как

$$\max S = \min (\int y \ln y \, dx + A \int x \ln x \, dy),$$

где коэфициент A отражает разномасштабность величин x и y. Заменяя dy на y'dx, получаем стандартную задачу вариационного исчисления. Ее постановка и решение изложены в работах М.В. Арапова и Ю.А. Шрейдера (см. [Шрейдер, Шаров, 1982]), только максимум назван там (по неясной мне причине) минимумом. Учтя, что во втором интеграле следует, при замене переменной, поменять порядок интегрирования, т.к. по смыслу задачи функция y(x) должна быть монотонно убывающей, получаем

$$y = Cx^{-\alpha}, \text{ где } \alpha > 1, C > 0,$$

что согласуется с формулой (9) главы 7. Итак, негауссовы распределения можно, насколько позволяют судить приведенные нестрогие соображения, выводить из идеи симметрии случайности и ее нарушений. Это подтверждают данные наблюдений.

В 1918 г. английский ботаник Джон Кристофер Виллис обнаружил распределение видов цветковых растений по родам в виде убывающей кривой: одновидовых родов обычно (в крупных семействах и таксонах более высокого порядка) наблюдается около 40%, двухвидовых родов – около 17% и т.д.: чем больше видов в роде, тем меньше таких родов; зависимость приближенно выражается гиперболой, причем основная часть видов содержится в одном или нескольких обширных родах [Willis, 1922].

Это выглядело (а для многих выглядит до сих пор) странно: ведь понятие рода для того и придумано, чтобы объединять в них похожие виды – зачем же нужна система, для этого плохо пригодная? Сперва могло казаться, что множество одновидовых родов – просто следствие малой изученности таксонов, но впоследствии выяснилось, что доля одновидовых родов растет по мере изучения группы [Williams, 1964, с. 137].

Скептики предположили, что гипербола – результат не биологический, а психологический (свойство классифицирующих умов), но гиперболы оказались на удивленье схожи с теми, где никакой ум не участвовал. Более того, все попытки скептиков построить более равномерные системы организмов оказались безуспешны – их конструкции рвали естественные таксоны и соединяли неестественные (как бы ни понимать естественность) и вскоре отвергались как непрактичные. Но это было позже.

А пока знакомый Виллиса, математик Гаролд Эдни Юл, предложил изображать найденную Виллисом зависимость в виде прямой линии в полулогарифмических координатах (в обычных линейных координатах такая прямая превращается в гиперболу). Вскоре Юл описал кривые Виллиса математической моделью. Он положил в основу своей модели сразу два взаимоуравновешивающих ветвящихся процесса – порождение видов и порождение родов. Первый процесс увеличивает число видов в данном роде, а второй – уменьшает. Если "видовая мутация" происходит с частотой s, "родовая мутация" – с частотой g, а время эволюции бесконечно, то распределение видов по родам определится формулой

$$f(i)/f(i-1) = (i-1)q/(1+iq), \text{ где } q = s/g,$$

причем f(i) – доля родов, состоящих из i видов каждый [Yule, 1924, с. 37]. Эта гипербола получена в предположении двух очень упрощенных взаимоуравновешивающих ветвящихся процессов чистого рождения (без гибели).

Гиперболическое распределение можно получить и в рамках одного ветвящегося процесса, если виды не только возникают, но и исчезают (за счет вымирания и преобразования в другой вид). Так, дискретная плотность вероятности общей численности клона за все бесконечное время его жизни выражается гиперболой с показателем 3/2 [Золотарев, 1983, с. 37-38], и высказано мнение, довольно невнятное, что эта же модель выражает и распределение видов по родам [Золотарев, 1984, с. 54].

Для экологии более важным оказалось другое наблюдение Виллиса – распределение видов по численности (распространенности) тоже оказалось приблизительно гиперболическим. Половину книги [Willis, 1922] занимает попытка увязать этот факт с эволюцией: по Виллису, распространенность таксона говорит о его эволюционном возрасте. Это вряд ли верно.

Поскольку ветвящийся процесс является фракталом, размерность которого определяется вероятностями гибели и размножения частиц, то естественно характеризовать каждую родо-видовую систему размерностью соответствующего фрактала. Она равна (с той точностью, с какой кривая Виллиса может быть выражена гиперболой) тангенсу угла наклона прямой Юла [Burlando, 1990]. Еще Виллис отметил, что данный наклон примерно одинаков для самых разных таксонов.

Вот один из самых общих законов систематики: разнообразие таксонов организовано по единому принципу — распределению Виллиса. (Насколько знаю, не выполняется он только на бактериях.) Если полагать, как принято, систему организмов результатом эволюции, то налицо и общий закон эволюции: она ведет к распределению Виллиса. Существование таких законов Клюге отрицает, но мы должны быть благодарны ему за четкое выражение вероятностного тезиса кладистики, ясно говорящего, что она является попросту одной из интуитивных доктрин. В них случайность прежде всего – пропенсивная, и анализ ее – дело будущего.

### *9-4.2. Взаимодополнительность и уровни развития*

Ранее, в п. 8-1.1, мы видели, что достоверное с одной позиции исследования может быть сомнительным, т. е. в некотором смысле случайным, с другой (дополнительной по Бору) позиции. В биологии случайность часто противопологают целесообразности, в действительности же эта пара понятий взаимодополнительна. Еще Карл Бэр в 1876 г. обращал внимание, что различные целесообразные поведения являются друг для друга случайностями, когда не объединены в общую систему, обладающую своей собственной целесообразностью; это рассуждение повторяло Аристотеля [Берг, 1977, с. 68].

Дополнительными друг другу являются и рассуждения, касающиеся разных масштабов. Как ни мал ген по сравнению с лесом, считать его точкой нельзя; и обратно – как ни велик лес по сравнению с геном, считать его непрерывным нельзя. Глядя на карту леса, мы смело можем утверждать, что в каждой его точке находится, например, гены, ответственные за синтез хлорофилла, но глядя на отдельные организмы, мы видим данные гены отнюдь не всюду, а лишь в фотосинтезирующих частях растений.

Биологические объекты демонстрируют разномасштабность двух типов – с сохранением самоподобия и без такового. В обеих ситуациях приходится говорить о случайности, но она оказывается различной. А именно, в самоподобных конструкциях случайность лучше всего выражается через вероятности фракталообразующих процедур (ветвлений, разрывов и т.п.), и в результате может получаться более сложная, невероятностная случайность. В качестве примера был рассмотрен ветвящийся процесс роста клона (п. 4-7.1).

Более сложны для анализа процессы и конструкции без самоподобия, например, эмбриогенез. Хотя развитие многоклеточного зародыша и можно представить в форме ветвящегося процесса последовательных клеточных делений, но тут клетки одного типа регулярно порождают клетки другого. Нормальный эмбриогенез можно представить либо вообще без всякой случайности (бывают микроскопические многоклеточные, у которых точно известно, на каком по счету делении данная клетка что породит), либо со случайностью, жестко подчиненной детерминированноиу процессу построения зародыша.

Однако у всех организмов известен *тератогенез*, т.е. неправильный эмбриогенез, приводящий к уродливым особям. Язык, на котором я могу представить себе нормальный и уродливый эмбриогенез с единой точки зрения, это – язык пропенсивный: в каждый момент деления каждая клетка имеет предрасположенность породить пару клеток, такую же, как она сама, или – иного типа; в нормальном эмбрионенезе все эти предрасположенности могут принимать лишь два значения – 0 или 1, однако на деле предрасположенности очень близки к данным значениям, но не равны им, откуда и проистекает тератогенез. Это обстоятельство радикально для понимания эволюции.

### *9-4.3. Генетический поиск*

Понятие генетического поиска введено в п. 8-4. Простейшим его примером является **инерционный мутагенез**, при котором замена одного нуклеотида на другой (точковый мутагенез) происходит с некоторыми вероятностями, причем каждая вероятность зависит от состояния как самого организма, так и его среды. Модель такого мутагенеза изображена на рис. 14б: ген чаще мутирует, если организм находится в неблагоприятной среде ("штраф"). Подробнее см. [Чайковский, 1990]. Инерционный мутагенез – самый маломощный вид генетического поиска, он вряд ли играет роль сам по себе, но вполне может быть эффективным в качестве компоненты более сложной системы поиска. Например, вполне возможно, что именно он работает в иммуногенезе (см. ниже).

Другой пример возможностей генетического поиска являет чисто ориентационная модель АСТ, приведенная в п. 8-5. Пусть АСТ моделирует какую-то клональную генетическую систему, т. е. надо, наблюдая фенотипы $f_1$ и $f_2$ (действия автоматов), судить о генотипах входящих в клон организмов (т.е. о состояниях автоматов). Пусть такт времени – поколение, а штраф – ненормальное для особи состояние среды. Угадать закон перехода от устойчивого проявления $f_1$ к устойчивому проявлению $f_2$ практически невозможно, и генетик вернее всего определит здесь 3 генотипа: два – с устойчивыми фенотипами $f_1$ и $f_2$ и один – обеспечивающий чередование поколений. В большой неоднородной колонии он будет то и дело наблюдать переходы (между этими тремя "генотипами"), которые, разумеется, идентифицирует как случайные мутации. На самом деле АСТ может быть как вероятностным, так и детерминированным.

Если часть особей гибнет, то постепенное накопление фенотипов $f_2$ соблазнительно приписать естественному отбору случайных мутаций, а чередование поколений описать как специальную адаптацию к изменчивости среды. В действительности же генотипов здесь 8, а случайных переходов, отбора и адаптации к изменчивости нет вовсе. Детерминированные АСТ реагируют на состояние среды однозначно и могут все, без гибели, перейти от $f_1$ к $f_2$. Гибель фенотипов $f_1$ лишь ускоряет накопление $f_2$ – вот в чем состоит здесь роль отбора. АСТ выступает как квант селекции, а случайность требуется только от внешней среды (сам АСТ может быть или не быть детерминированным).

Сейчас феномен генетического поиска понемногу получает признание как эволюционный [Голубовский, 1999; Зусмановский, 1999], однако роль генетического поиска лучше всего видна в иммуногенезе.

### *9-4.4. Иммуногенез*

Коротко изложу то, что написано на эту тему в работе [Чайковский, 1997]. Развитие генетики родило гипотезу, по которой все гены, кодирующие антитела, – результат случайных мутаций. Но антитела формируются при жизни особи миллионами вариантов; могут ли ничем не управляемые случайные мутации обеспечить столь быстрый массовый процесс? Простой расчет показывает, что для этого нужна такая интенсивность мутаций, какая разрушила бы всю наследственность.

Эту трудность и пыталась обойти так называемая инструктивная школа, полагавшая, что антиген формируется («инструктируется») антигеном. Она приводила в свою пользу сильный довод: антитела вырабатываются даже на *синтетические* антигены, никогда в прежней эволюции данного вида не встречавшиеся, – как же сформировался иммунитет к ним, если не путем "считывания" с антигена?

У зародыша млекопитающих есть совсем немного иммуноглобулиновых генов – около сотни. В ходе развития организма разнообразие иммуноглобулинов каждый раз создается заново, точно так же, как заново создается любой орган. Но и этого разнообразия оказывается мало – конкретное антитело обычно создается в ответ на конкретную заразу (антиген). В стрессовой ситуации, которую создает появление антигена, начинает работать генетический поиск, в данном случае — механизм перестройки иммуноглобулиновых генов: генетическая система по каким-то не вполне еще понятным правилам режет и сшивает фрагменты генов до тех пор, пока не найдет приемлемый вариант – тот, что реагирует с вторгшимся антигеном. Найденный вариант клонируется (размножается из единственного родоначального экземпляра).

Если бы этот механизм перебирал один за другим все возможные комбинации фрагментов, то, как показывает расчет, мог бы наработать в одном организме сотни миллионов различных антител (их примерно столько и наблюдается), но он работает иначе: выбирает одни варианты много чаще других. Не понимая пока что механизма этой работы, иммунологи характеризуют ее как некую сложную неравномерную случайность. К тому же механизм работает довольно плохо: поставляет антитела, слабо связывающие антигены. Поэтому существует еще один механизм – **соматический гипермутагенез**, который включается после механизма перестроек.

Заключается он в том, что при клонировании гены найденного варианта мутируют с огромной частотой (каждый тысячный нуклеотид заменяется), так что порождается масса чуть отличных антител, различающихся одной аминокислотой (крайне редко – двумя), чем и достигается точная подгонка антитела к антигену. Окончательный вариант снова клонируется и запоминается иммуногенетической системой организма.

В этом, грубо говоря, состоит "генетический принцип обеспечения разнообразия антител", за открытие которого получил в 1987 г. нобелевскую премию японо-американский иммунолог Сусуму Тонегава.

Здесь нет ни возможности, ни нужды углубляться в иммунологическую суть открытия – нам достаточно того, что ген действительно можно дописывать в цитоплазме, и притом с элементом случайности. Гены антител образуются не за счет мутаций, как думали прежде, а путем трехступенчатого процесса, в котором лишь одну ступень можно назвать мутагенезом, и то в особом смысле: он *направлен* – в том смысле, что происходит только в нужных генах, зато с неимоверной частотой. Именно здесь может работать механизм инерционного мутагенеза, введенный выше.

Представляя лауреата, член Нобелевского комитета сказал: "Каждую минуту наше тело производит миллионы белых кровяных телец, лейкоцитов. В каждом из них идет гибридизация ДНК, приводящая к созданию ее собственных, уникальных антител. Те, что не будут выявлены, быстро погибнут. Если, однако, они вступят в контакт с подходящими внешними структурами, они будут вознаграждены, допущены к размножению и проживут долго. После большой случайностной (randomized) генной лотереи естественный отбор поддержит победителей...". Сам Тонегава в нобелевской лекции провел параллель с эволюцией еще более ясно: "Подобно организмам в экосистеме, эти лимфоциты – субъекты отбора антигенами, и приспособленнейший будет выживать. И... иммунную систему индивида можно рассматривать как своего рода Дарвинов микрокосм" [Nobel Prix, 1988, с. 25, 223].

Параллель с эволюцией вполне, как мы увидим, плодотворна, но нам надо сперва выяснить, при чем тут Дарвин. Ведь "допущены к размножению" – термин селекционеров, т.е. относится не к естественному, а к искусственному отбору, и это вовсе не оговорка, а самая суть дела: "Дарвинов микрокосм" немыслим без малых случайных вариаций, последовательно вытесняющих друг друга в борьбе за дефицитные ресурсы; в иммунногенезе же сигнал к размножению дает клетке ее антитело, связавшееся с антигеном. Малые вариации являют здесь только одну из трех ступеней изменчивости.

Ни конкуренции за ресурсы, ни даже сравнения клеток по выживаемости тут нет: словно селекционер на ферме, иммунная система колоссально размножает тех, кто несет желаемый признак, и вовсе не допускает к размножению других. Дарвинизм такую эволюцию отрицает, а вот иммунологи признают ее дарвинизмом. Скорее тут надо бы сказать "микрокосм Эмпедокла" (об этом мыслителе шла речь в п. 1-1).

При гипермутагенезе мы видим, что мутабильности, в сто миллионов раз большей, чем естественная (ведь при естественном мутагенезе заменяется в среднем всего один нуклеотид на сто миллиардов за клеточное поколение), едва хватает для тонкой подстройки активной зоны антитела; для существенной перестройки антител даже гипермутагенез оказывается ничтожно слаб, и осуществляет перестройку совсем другой механизм – тот, что открыл Тонегава. Напрашивается вывод: мутации могут и в эволюции играть лишь роль механизма тонкой подстройки.

### 9-5. Связь с лингвистикой

Частотная статистика литературы бывает любопытна и неожиданна. Так, вроде бы очевидно, что язык великого писателя должен быть богаче, чем у писателя слабого, маловыразительного, но вот цифры: "Война и мир" Л.Н. Толстого содержит 19519 различных русских слов на 409407 словоупотреблений [Частотный..., 1978], а написанный почти тогда же роман "Приваловские миллионы" Д.Н. Мамина-Сибиряка (его, по-моему, читать невозможно) – 11283 различных слова на 103941 словоупотребление [Генкель, 1974]; т.е. язык второго более чем вдвое богаче. Странно? Ничуть — самым «богатым» оказывается «язык» обезьяны, молотящей по клавишам, о чем скажу ниже.

Хорошо известно, что слова по частоте их употребления распределяются в любом крупном наборе текстов примерно гиперболически. Например, в "Частотном словаре русского языка" [1977] почти 10% словоупотреблений приходится на первые три слова (в, и, не), еще 10% – на следующие 8 слов (на, я, быть, что, он, с, а, как), а половину всех словоупотреблений составляют всего 213 слов (в этом словаре, охватившем 1 млн 56 тыс. словоупотреблений, учтено 39 тыс. различных слов). Зато более 13 тыс. (33,7%) слов употреблено по одному разу.

Хочется допустить, что "гипербола"(*) объясняется тем, что слова в любом тексте связаны общим смыслом (см. Введение), но это не вполне так. Самый факт гиперболичности получается и для случайного набора букв – лишь бы они (1) делились пробелами на обычные по длине наборы (в английском языке это в среднем 4-5 букв на слово) и (2) для каждого данного "слова" (набора букв) подсчитывалась своя частота. Как показал в 1961 году Мандельброт, в этих допущениях частоты слов (наборов букв) ложатся на гиперболу с приемлемой точностью [Шрёдер, 2001, с. 68].

Однако не следует думать, что смысл не играет при этом роли. Играет, и даже определяющую: если, как уже сказано, в обычном частотном словаре половина словоупотреблений (медиана распределения) приходится на примерно первые две сотни слов, то в "обезьяньем" языке (имеется в виду метафора – обезьяна, бессмысленно стучащая по клавишам) медиана оказывается колоссально далеко: даже при девятибуквенном алфавите она охватывает почти два миллиона слов (там же). То есть практически вместо гиперболы мы увидим горизонтальную прямую.

Вся статистическая лингвистика основана на допущении, что каждой языковой единице может быть сопоставлена вероятность ее употребления в корпусе текстов, причем под вероятностью попросту понимают частоту, т.е. число употреблений данного слова, деленное на число слов в корпусе. Практика противится такой установке: в любом тексте оказывается, что около половины слов употреблено по одному разу.

---

(*)Гипербола имеет здесь место только для числа словоупотреблений (ранговое распределение), а для числа слов с данной частотой налицо квази-гипербола с областью локальных максимумов на частотах, соответствующих словам, встретившимся 27 до 88 раз, а также с несколькими отдельными небольшими всплесками.

Мала выборка? Что ж, сделали огромную выборку – просчитали тексты общей длиной более миллиона слов [Частотный..., 1977] и убедились, что по одному разу употреблена "всего лишь" треть слов, что 3/4 всех слов употреблено 10 раз и менее, т.е. что распределения частот записать все еще нельзя. Дело в том, что по ходу увеличения выборки новые слова появляются массово – ситуация, для которой стандартная статистика непригодна. Но ведь количество слов в языке конечно, а значит, поток новых слов должен когда-то иссякнуть. Может быть, надо просчитать миллиард слов, и получится сносное распределение частот, мало меняющееся с дальнейшим ростом выборки? Нет, не получится.

Даже если просчитать все слова во всех русских книгах, то, во-первых, многие слова останутся неисчислимо редкими, а во-вторых, вернее всего, никакой сходимости частот даже для самых употребительных слов не окажется – на это указывает сравнение частотных словарей. По Частотному словарю [1977] самое частое русское слово – предлог "в" – употреблено 43 тыс. раз в миллионной выборке, причем здесь его дисперсия в 30 раз превышает нормальную [Арапов, 1988, с. 17]. Неудивительно, что в другой миллионной выборке (словарь Г. Йоссельсона) предлог "в" оказался на третьем месте, а в словаре Н.П. Вакара – даже на седьмом [Vakar, 1966, с. 4, 133]. К сожалению, данные несопоставимы по форме, но если бы удалось вычислить общую дисперсию слова по всем словарям, она превысила бы нормальную в сотни раз.

Глагол "быть" – самое частое из самостоятельных (не вспомогательных) слов в русском языке, так показывают все 10 известных мне русских частотных словарей; это, пожалуй, единственный четкий инвариант русских частотных словарей, но и для данного слова частоты меняются от словаря к словарю втрое. Вторым же глаголом в разных словарях оказываются совсем разные слова: мочь, говорить, пойти, стать, знать.

Что касается частот даже самых употребительных существительных, то они меняются от словаря к словарю радикально, и самое частое в одном словаре может оказаться на очень далеком месте в другом, даже если он составлен по хронологически и социально близким текстам. Так, в Частотном словаре [1977] это "год" (49-е место), а в словаре Вакара – "товарищ" (33-е место); при этом в первом словаре "товарищ" занимает 92-е место, а во втором "год" – 222-е место. Даже Толстой, в романе которого самое частое существительное – "князь" (23-е место), и то употреблял слово "год" чаще (199-е место).

Первые исследователи частот слов были уверены, что любой текст в 10 тыс. разных слов даст один и тот же набор "основных слов" [Vakar, 1966, с. VII]. Оказалось совсем не так, и даже само понятие "основного слова" не вполне ясно. Сторонники вероятностного подхода предлагали ограничиваться рассмотрением лишь сходных по тематике текстов, но и это не помогло: словарь Вакара и второй корпус Частотного словаря [1977] составлены на сходных текстах (тогдашние ходовые советские пьесы), но дали совсем разные частоты. Сравнение частотных словарей см. [Арапов и др., 1978]. Даже частоты служебных (т.е. самых частых) слов могут меняться в 3-4 раза, притом в рамках романов (т.е. единый жанр) одного автора [Генкель, 1974, с. 18].

Приходится признать, что частоты слов совсем непохожи на "коллективы" Мизеса: разные выборки из одной совокупности ведут себя очень различно, причем даже на миллионных выборках с ростом выборки доля вновь появляющихся слов не обнаруживает заметного падения.

Конечно, какая-то случайность в употреблении слов явно есть: если взять лаконичный текст и исключить речевые клише, то невозможно предсказать по предыдущим словам следующее. Но, в отличие от примера Ламберта, тут нельзя (за вычетом нескольких тривиальных ситуаций – выбор синонима или антонима) указать вероятность встретить определенное слово, поскольку частоты употреблений слов неустойчивы.

Причина необычного поведения частоты слов достаточно очевидна: всякий текст является системой, поэтому каждое словоупотребление определяется единым смыслом, а вовсе не случайным исходом какого-то статистического опыта. Но ведь иррациональное число – тоже система. Только поняв, в чем различие систем, дающих устойчивые частоты встречаемости своих элементов, от систем, такой устойчивости не дающих, мы приблизимся к пониманию природы случайности.

Господство вероятностного подхода видится мне следствием того смешения случайности и вероятности, о котором мы не раз говорили. Проанализировав ситуацию, лингвист М.В. Арапов [1988, с. 20] пришел к выводу, что сама парадигма вероятностей не имеет смысла при анализе текстов[(*)]. А ведь к ее помощи порою прибегают при решении животрепещущих проблем подлинности текстов и правоспособности предполагаемых авторов. (Вспомним хотя бы скандал с авторством «Тихого Дона», в котором Нобелевский комитет опирался на данные частотного анализа, противники же вели обычный исторический и литературоведческий анализ.) Вновь приходит на ум афоризм – статистике часто принадлежит первое слово, но последнее – никогда.

Вероятностный язык здесь заведомо неприемлем, но если все-таки пользоваться языком частот, то придется признать модели, в которых дисперсии неограниченны, наиболее удобными.

Среди них главную роль играют устойчивые распределения, но существенно, что эти распределения, как и всюду, – всего лишь модели с ограниченной областью применимости. После всеобщего увлечения квази-гиперболами (рас-

---

[(*)](*) Иную точку зрения утверждал В.В. Налимов [1977]. В ее основе лежал постулат, что каждый человек имеет для каждого слова некий набор вероятностей смыслов, и между ними выбирает, строя смысл услышанной фразы. На мой вопрос: в каком смысле тут понимать термин "вероятность" – Налимов ответил: в столь же нечетком, как и все слова в его модели языка (январь 1977 г.). Мне остается заметить, что Налимов всюду отстаивал "вероятностное мышление", ссылаясь в этом на Колмогорова [Налимов, 1989, с. 9], т.е. пытался всё решить в терминах первой и третьей ПМ, тогда как сам размышлял над проблемами целостности.

пределением Ципфа) выяснилось, что далеко не все тексты "ципфовы" [Арапов, 1988]. Дальнейшее продвижение в статистической лингвистике будет, как мне видится, достигнуто после решения более общего вопроса – почему столь общ феномен квази-гипербол.

### 9-6. О техноценозах Кудрина

Среди известных мне исследований наиболее широкий охват феномена системной случайности присутствует в работах о *техноценозах*. И сам термин, и связанный с ним круг идей принадлежат Борису Ивановичу Кудрину, специальность которого можно (в рамках нашей темы) вольно охарактеризовать так – системолог и техноэволюционист. Техноценозом он, по аналогии с биоценозом в экологии, называет большую совокупность машин и соединяющей их инфраструктуры, связанных территориально и функционально; обычно это – крупный завод (комбинат). Можно спорить о том, был ли Кудрин первым, кто заметил, что такая совокупность является *нежесткой целостностью*, живущей по своим собственным законам, но несомненно, что именно его тридцатилетние усилия привели к пониманию ряда ключевых вопросов этой отрасли знания и деятельности. Главный из них (для нашей темы) тот, что техноценозы подчиняются гиперболической статистике и только с ее помощью могут быть оценены и прогнозируемы.

Хотя творчеству Кудрина посвящены книга [Чирков, 1999] и множество статей, хотя он профессор, доктор, руководитель и т.п., идеи его понимаются плохо и принимаются медленно. Оставляя в стороне административные и психологические преграды, одинаковые для всех, кто ищет новое, отмечу ту, которая связана с проблемой случайности: ему отчаянно мешают учебники ТВ и МС.

Уверенность математиков-прикладников и инженеров в применимости ЗБЧ, ЦПТ и основанной на них МС ко всем массовым случайным явлениям почти непробиваема. (В основе ее лежат отмеченные во Введении неясности оснований ТВ – прежде всего, смешение случайности с вероятностью.) На самые очевидные факты неприменимости стандартной статистики Кудрину возражают просто: читайте учебники, там всё не так. Тем самым, не раз отмеченная в предыдущих главах эйфория самодостаточности, царящая в преподавании ТВ, отнюдь не безобидна. Она оборачивается гигантскими убытками и, главное, ложными установками при проектировании новых предприятий. В условиях нынешнего развала нашей экономики это особенно досадно.

Исследование Кудрина началось с того, что попав с тяжелыми травмами почти на год в больницу, он стал читать что попало и обнаружил, что "график лекарственных растений точно совпадал с распределением электродвигателей по видам на Запсибе" [Чирков, 1999, с. 207]. Точнее говоря, Кудрин обнаружил, что распределение видов растений по распространенности (впервые описанное в форме гиперболы Виллисом – см. выше) похоже по форме на распределение марок электродвигателей (для которых понятие вида ввел позже сам Кудрин) по численности.

*Видом* изделия он назывет множество всех экземпляров (*особей*) изделия, имеющих одинаковую марку (например: все автомобили "Москвич-407" – неважно, с какого автозавода), а упомянутое "распределение по видам" это – распределение видов по численности их особей. Виды, имеющие равное число особей, Кудрин объединяет в *касту*, причем касту, виды которой содержат по одной особи, называет *ноевой*, а виды, содержащие максимальное (для данного ценоза) число особей, объединяет в *саранчёвую* касту. На гиперболической кривой ноева каста займет крайнюю левую (она же верхняя) точку, а саранчёвая каста составит ее хвост. Точку на гиперболе, правее которой нет ни одной пары видов, имеющих одинаковое число особей, Кудрин называет *пойнтер-точкой*.

По Кудрину, "теоретически нормально (система устойчива), если 40–60% всех видов ценоза образуют ноеву касту (это 5–10% числа особей) и 40–60% всех особей попадает в саранчевые касты (это 5–10% всех видов). Это и есть пределы допустимого воздействия человека на структуру ценоза" [Кудрин, 1995, с. 18-19]. Замечу, что для родо-видовых гипербол цифры получаются иные: по моим наблюдениям, система, в которой половина и более родов содержит по одному виду, обычно есть плод излишнего дробления родов и потому не переживает своего автора. Однако суть та же.

На кривых Виллиса хорошо видно [Willis, 1922, с. 187], что родо-видовая "гипербола" как бы переламывается на частоте 3–5 видов. Кудрину принадлежит важное замечание: в сущности, гипербола имеет место только слева от пойнтер-точки, тогда как справа вместо кривой мы видим "некоторую дискретную прямую", проходящую на единицу выше оси абсцисс через всё более редкие точки, соответствующие всё большим численностям вплоть до саранчевой касты. Тем самым, пойнтер-точка является "критической", так что помочь ценозу, теряющему устойчивость, можно и нужно путем добавления (частичного изъятия) видов левее (правее) этой точки, но не слева и справа сразу [Кудрин, 1991, с. 247].

Если я правильно его понимаю, Кудрин видит в пойнтер-точке не середину гиперболы (как другие исследователи), а точку сопряжения двух структур: первая, гиперболическая, выражается в падении количества видов с ростом числа их особей, а вторая – в росте числа особей единичных видов; традиционное соединение их в одну структуру ничем, кроме удобства изображения, не обоснованно. Тем не менее, он, как и все, изображает структуру ценозов гиперболами. Напомню, что реальные плотности имеют вид квази-гипербол с локальными максимумами немного слева от пойнтер-точки (см. рис. 13).

Сходство квази-гипербол разной природы отмечали задолго до Кудрина, однако большинство не видело в этом ничего интересного. Сам факт сходства кривых у совершенно различных объектов, столь важный для системолога, служил для тех, кто не дорос до четвертой ПМ, доводом против поиска в нем смысла. Еще в 1920-е годы противники Виллиса презрительно указывали ему на то, что по такой же гиперболе распределены фамилии в телефонной книге, а значит она ни о чем не говорит (обычное неумение видеть факты, не ложащиеся в "свою" ПМ). Но именно сравнение казалось бы несравнимого привело к открытию общей теории систем.

Даже в наше время есть люди, отрицающие феномен Виллиса на том основании, что растения – не люди и не людские изделия, а потому выстраиваться в гиперболы не могут (я сам знал такого; родо-видовую гиперболу он приписывает неосознанной прихоти систематиков, а гиперболу численности не обсуждает вообще). Не имея, как и все другие ученые, никакого объяснения общности феномена гипербол, Кудрин, однако, отрицать их не стал, а стал смотреть, как изменятся задачи электротехнической науки, если все наблюдаемые на практике монотонно падающие плотности случайных величин считать гиперболами, а не подгонять их под стандартную статистику.

(Последняя, вообще-то, знает монотонно падающие плотности, но работает только с теми из них, у которых дисперсии конечны – экспоненциальную и т.п. Они все кое-как подчиняются ЦПТ, что и позволяет математикам, не очень думая о сути дела, рекомендовать инженерам всевозможные "тройные уклонения" и "доверительные интервалы"; а уж инженерное начальство утверждает рекомендации как обязательные инструкции. Поскольку данные всегда можно подогнать под удобную кривую – вспомним Феллера, п. 7-2, – то большинство с начальством не спорит.)

Обнаружив, что феномен гипербол очень широк, Кудрин постулировал: "Мы будем исходить из того, что есть объективность... отражающая устойчивость структуры. Следовательно, можно для моделирования одного ценоза использовать другой, но такой, о котором можно сказать, что он идеальный" [Кудрин, 1991, с. 246–247]. Другими словами, он уверен (и не раз заявлял это устно), что гиперболичность естественно возникает всюду, где есть нежесткая система со слабыми подвижными связями, но являющая собой в каком-то смысле целостность (например, функциональную). Причина этой общности распределений пока неясна никому (см. конец п. 7-2).

Неясно, в частности, следует ли из сходства гипербол сходство описываемых ими явлений. Кудрин уверен, что следует, и даже предлагал управлять парком электроустройств на основе анализа романа М.А. Булгакова "Мастер и Маргарита". ("Например, уменьшить шаг мощности трансформаторов и дать выбирать трансформатор под расчетную мощность" [Кудрин, 1991, с. 250].) Тут придется возразить: именно широкая общность феномена не дает оснований к конкретным рекомендациям такого рода, и советы по трансформаторам Кудрин дает на основании своих технических знаний, а Роман Булгакова поминает всуе.

Более того, ноева каста в техноценозе – это основные машины завода, без любой из которых он резко ухудшит работу или вовсе остановится; а в романе это – единожды упомянутые персонажи, причем встает даже вопрос, кого из них включать в список, а кого счесть элементом обстановки. И наоборот, саранчёвая каста завода – мелкие моторчики, чаще всего они взаимозаменяемы; а в романе это – главные герои. Если в романе в качестве особи учитывается словоупотребление, то и в техноценозе надо было бы поступить так же. Выяснилось бы, что уникальный двигатель упоминается в документах многократно (хотя бы потому, что его отказ порождает кипу бумаг), тогда как мелкие моторчики – лишь при установке и, не всегда, при замене. То есть ноева и саранчёвая касты поменялись бы местами.

Ошибка, на мой взгляд, вызвана неосознанной сменой ПМ в ходе рассуждения: вся идеология техноценозов системна с элементом диатропичности, однако специфика анализа литературного текста провоцирует автора к архаическому видению мира (в данном случае – техноценоза) как текста или шифра (т.е. к первой ПМ, которая, как мы знаем, привела когда-то к воцарению гауссовой статистики). Вот пример.

Описав некоторые черты техноценозов, Кудрин [1991, с. 246] пишет: "Все изложенные и аналогичные им примеры можно описать текстами... Предложим неформальную модель, понимая под текстом связную, компактную, воспроизводимую развернутую во времени последовательность знаков и образов...".

Мне остается заметить, что при первом употреблении слово "текст" имело обычный смысл (линейно упорядоченная последовательность знаков из заданного алфавита), а при втором – взято из семиотики, где оно означает всё что угодно, включая образы (они никаким алфавитом не задаются). Только в первом смысле текст допускает учет словоупотреблений, смешение же двух смыслов – рецидив первой ПМ.

По Кудрину, основной прием управления техноценозами — попытка снизить *асортицу*, т.е. разнообразие малочисленных изделий, причем попытка, ничего хорошего не дающая именно потому, что ассортица – неотъемлемая черта случайного процесса эволюции всякого ценоза [Кудрин, 1991а, с. 6–7]. Снизить ее невозможно, не разрушив ценоз, и потому реальная задача управления ценозом должна состоять в другом.

С учетом сказанного, управление техноценозом видится мне прежде всего как поддержание его самопроизвольно сложившейся структуры, а если это оказывается невозможно, то – в форме целостного изменения структуры, удовлетворяющего законам существования ценозов, каковые предстоит выяснить.

Кудрина часто упрекают в том, что он не дает ни модели, объясняющей общность феномена, ни математического подтверждения того, что его материал укладывается именно в гиперболы или квази-гиперболы. Например: "Собственно модель отсутствует (также какие-либо попытки ее идентификации и интерпретации), равно как и критерии оценки адекватности данной модели объекту исследования" [Якимов, 2000, с. 21]. Хотя тот же упрек можно обратить и к остальным системологам, но возражение серьезное, и его надо рассмотреть.

### *9-6.1. К обоснованию квази-гипербол*

Сам по себе отказ конкретизировать механизм, порождающий гиперболическую плотность, представляется мне на сегодня достоинством кудринского подхода, а не изъяном. Мы видели в п. 7-3, что таких механизмов, весьма частных, указано много и все рассуждения при этом легковесны. Кудрин вместо этого заявляет, что гиперболы – общая альтернатива гауссоиде. По его убеждению, гиперболические распределения появляются там, где случайные величины связаны в нежесткую систему. Сходно поступают и другие системологи [Бак, Чен, 1991]. И если никто не требует, чтобы каждой гауссоиде предлагали свою модель ее появления, то надо ли требовать это в отношении квази-гипербол?

Различить класс явлений, порождающих гауссоиду, и класс порождающих квази-гиперболы, действительно надо. Кудрин делает это чисто словесно, этого мало, но ведь и само это наблюдение должен же был кто-то сделать первым! Для такого наблюдения нужен особый талант, а для его уточнения и формализации (возможно, она повлечет совсем другую формулировку) требуется талант иной. Поэтому важна книга В.В. Фуфаева [2000], ученика Кудрина, снимающая большинство серьезных (т.е. научных) возражений. Книга местами читается с трудом – не всегда мысль автора четко отделена от мыслей, им отвергаемых, а постраничных ссылок нет вовсе (попробуйте понять метод, точно не сформулированный, по ссылке на толстый учебник, не имеющий указателя), но суть дела, как правило, понять удается.

Здесь мы находим именно разграничение гауссоиды и гипербол: "Рассматривая устойчивые распределения в целом как обобщение предельных свойств нормального закона, можно предположить, что H-распределение, совпадающее по форме с асимптотикой устойчивых негауссовых распределений, играет в рассматриваемой области практически ту же универсальную роль, что и закон Гаусса в стохастических процессах с конечной дисперсией" [Фуфаев, 2000, с. 46]. Примечательно, что перед этим (на с. 42) автор ясно (пусть и не вполне корректно(*)) обозначил свое понимание устойчивости: "Под устойчивостью мы понимаем не только способность возвращаться к установившемуся состоянию после различных возмущений, но и способность системы оптимизировать свои параметры (показатели) и сохранять структуру".

(*)Не проведено различия между обсуждаемой тут устойчивостью случайного процесса (сходимостью его, несмотря на возмущения, к стационарному состоянию, т.е. к устойчивой частоте) и устойчивостью распределения неустойчивых частот, изучаемого на других страницах.

Как видим, гиперболы объявлены столь же обычными, что и гауссоида, причем указано этому основание: и те и другая проявляют устойчивость в весьма широком смысле. Тот факт, что такая устойчивость математически не обоснована, не может быть поставлен автору в упрек, поскольку это пока ни кем по сути не сделано даже в отношении гауссоиды, роль которой давно общепризнана (мы обсуждали это в п. 3-8).

Зато безусловно важно утверждение, что гиперболический "параметр, являясь системным, характеризует разнообразие видов изделий выделенного семейства и имеет следующий физический смысл: отражает некоторое, объективно сложившееся оптимальное (компромиссное) соотношение... между разнообразием изделий с различными техническими характеристиками, отвечающими, с одной стороны, разнообразным требованиям технологии, и, с другой стороны, требованиям серийности выпускаемого" [Фуфаев, 2000, с. 48]. Другими словами, гиперболическое распределение – компромисс между тем, что нужно, и тем, что можно выпускать.

После этого автор показывает, что понимание данного факта и его сознательное использование (вместо практикуемой моды его отрицать или считать дефектом организации хозяйства) позволяет резко снизить расходы на эксплуатацию парка электродвигателей. Дело в том, что ремонтные заводы надо проектировать в расчете на гиперболическое распределение частот поступающих в ремонт "особей" каждого "вида".

Что касается уверенности в том, что реальное распределение действительно близко к гиперболическому, то она наступает всякий раз, когда выясняется, что плотность монотонно убывает, относительная же дисперсия неограниченно растет с ростом выборки, а не падает [Фуфаев, 2000, с. 52]. Досадно, что этот тривиальный факт надо вновь и вновь разъяснять: пусть реальная выборка всегда конечна, но если с ее ростом дисперсия растет без тенденции к замедлению, то для описания случайной величины пригодно только распределение с бесконечной дисперсией.

## 9-7. Об эволюции

### *9-7.1. Эволюция объектов разной природы*

Хотя основным моим интересом всегда была биологическая эволюция, однако в первые же годы занятия ею выяснилось, что понять ее вне связи с эволюцией других (неживых) объектов не удастся. Только изучая эволюцию различных объектов параллельно, можно надеяться отличить исследование природы от любования собственными предубеждениями. По этому поводу в историко-астрономической работе у меня было написано:

<<...манипулируя удобными случайностями, можно доказать все, что угодно. Статистический метод родился именно в противовес подобным "доказательствам". В биологическом эволюционизме они раньше господствовали: например, в подтверждение дарвинского учения заявляли, что зеленые насеко-

мые отобраны потому, что легче скрывались от птиц, яркие – потому, что демонстрировали этим свое ядовитое жало, яркие без жала – потому, что подражали предыдущим, белые – тем, что указывали на свою несъедобность, и т.д. Сам Дарвин... писал по этому поводу: "Факт белой моли великолепен; кровь загорается, когда видишь, что истинность теории почти доказана".

До доказательства здесь было далеко: вопрос о том, почему близкие виды имеют столь различные окраски, даже не ставился; но он и не мог быть поставлен, пока эволюционизм не вооружился статистикой. Сперва надо узнать, какая доля видов белá и какова экологическая роль белых, а потом уж связывать цвет с эволюцией. Вряд ли объяснение отдельной аномалии планеты ссылкой на особые прежние обстоятельства методически более ценно, чем объяснение цвета моли ссылкой на ее неприятный кому-то вкус. Но в биологии такие традиции уже преодолеваются.

Преодоление связано, по-видимому, не столько со статистикой, сколько с системным подходом (не с усреднением, а с обобщением), но и статистический этап необходим – как неизбежая стадия на пути от механистического толкования явлений к системному. Статистика явилась исторически первым методом преодоления произвола в толковании фактов, и этот опыт нельзя игнорировать. Статистика выявляет преимущественные направления (тенденции), а это позволяет рационально искать ведущие факторы>> [Чайковский, 1987, с. 84–85].

Сейчас, спустя 15 лет, могу уточнить: тенденцию выявляет, в основном, не статистический, а диатропический подход, он как раз и дает обобщение вместо усреднения. Системный же подход ставит целью не столько обобщение разнообразного, сколько выявление сути, игнорирующее факт разнообразия. Кроме того, после выхода указанной статьи мне стала ясна случайностная роль таких тенденций, как мероно-таксономическое несоответствие (см. п. 8-5.2). Замечу, что его частный случай – принцип смены функций – является одним из главных объяснительных средств как в дарвинизме, так и в ламаркизме.

Мало кому известно, что молодой Дарвин рассматривал селективную процедуру как положительную обратную связь: в его ранних схемах ничтожная начальная разница ведет к радикальному различию судеб – за счет божественного вмешательства; в позднейшей дарвинской схеме Бог исчез, но на место его ничего не поставлено, кроме чисто статистической уверенности, что случайности сами найдут то, что надо найти. Анализ см. [Чайковский, 1983а; 1990]. Основанием Дарвину служила тогдашняя политэкономия, исходившая из идеи благотворной роли конкуренции, что детально показал американский дарвиновед Сильвен Швебер: в двух ключевых пунктах (в мальтузианском понимании отбора и в конкурентном понимании расхождения одного вида на два) Дарвин опирался не на биологические данные, а на аналогию с принятыми тогда в общественных науках догмами [Schweber, 1980]. О многом из этого за 90 лет до Швебера писал Кропоткин [Kropotkin, 1890], полагавший, что схема Дарвина не имеет отношения к реальной биологии.

Более известным является тезис Дарвина, согласно которому эволюция движется за счет естественного отбора. В п. 8-1 уже сказано, что в нем никто не сомневается, если понимать его в общем смысле – как апробацию на жизнеспособность, которой среда подвергает организмы; что в таком виде тезис расплывчат, но уточнить его можно только ценой уменьшения достоверности; что если описать феномен отбора точно, то такое описание нельзя приложить к реальным процессам. Это можно показать с помощью мажорирующей модели отбора, уже рассмотренной в пп. 7-5 и 8-4.

Цель теории эволюции, с моей точки зрения, не в объяснениях, а в рекомендациях – подробнее см. [Чайковский, 1990, ч. 3]. Но их нельзя дать (даже в вероятностном смысле), если изменяющийся в ходе эволюции случайный феномен нестохастичен. Примером такой нестохастичности служит процесс выживания и гибели.

### *9-7.2. Динамика текущих значений*

В эволюционизме редко доступен эксперимент с реальными объектами, но на помощь пришли эксперименты на бумаге (а затем и на компьютере). Что касается *дарвинизма*, то английский статистик Роналд Фишер в 1922 г. показал, что "выгодная" мутация имеет некоторую вероятность прожить неограниченно долго. Статья задала тон всей огромной литературе по математическому дарвинизму. Фишер начал с того допущения, что всякому мутанту можно приписать *селективную ценность* s. Точнее, он предположил, что для всякого генотипа можно определить величину (1+s) – среднее количество потомков, оставляемых его носителями; если s>0, то генотип несет полезную мутацию, если s<0, то вредную, если s=0, то он не несет мутации или несет нейтральную. Для малых s>0 можно доказать, что полезный мутант проживет бесконечно с вероятностью приблизительно p=2s, тогда как нейтральный и вредный мутанты наверняка вымрут за конечное время.

Это – красивый математический результат, и Фишер сделал из него вывод: даже небольшой выгодности мутации достаточно, чтобы ее обладатели победили в борьбе за существование тех, кто ею не обладает, поскольку всякая мутация возникает многократно. Он рассматривал вариант s=1% и полагал, что достаточно соответствующей мутации случайно возникнуть сто раз, чтобы почти наверняка победить и распространиться на весь вид [Fisher, 1930, гл. 1].

Хотя сам Фишер сознавал сугубо модельный характер своих расчетов, биологи-дарвинисты восприняли подобные работы как прямое доказательство справедливости дарвинизма. Как и при "доказательстве" случайности мутаций (п. 7), не были заданы самые, казалось бы, очевидные вопросы:

1. Действительно ли s=1% означает малое преимущество?
2. Действительно ли вероятность p=2s достаточна для регулярного выявления полезного мутанта?

3. Достаточна ли скорость распространения такого мутанта для объяснения эволюции?

4. Могут ли условия, принятые в модели, сохраняться в реальной эволюции достаточно долго, чтобы моделью можно было пользоваться?

5. Можно ли вообще описывать преимущество мутанта через величину $s>0$, т.е. следует ли из факта выживания мутанта, что у него $s>0$?

6. И обратно – действительно ли из условия $s>0$ следует, что выживание мутанта более вероятно, чем при $s<0$?

Положительный ответ на эти вопросы действительно был бы веским доводом в пользу генетического дарвинизма, но анализ показал, что все шесть ответов отрицательны [Чайковский, 1977а, б]. Этот анализ за 25 лет никем не был оспорен, и потому о нем стоит коротко рассказать.

Выгодность не всегда можно мерить определенной величиной s, поскольку свойство, полезное в одних условиях, оказывается вредным в других. Но даже если иногда условие $s>0$ осмысленно, оно никогда не сохраняет своей величины: по мере распространения такого мутанта он всё более вынужден конкурировать с такими же, как он сам, и преимущество теряется. Оно не может продержаться даже сто поколений, а за такое время полезный мутант не может не только вытеснить вредных, но не успевает даже просто выявиться на их фоне. Малая выгодность мутанта ($s<4\%$) совершенно тонет на фоне то и дело возникающих нейтральных и слабовредных мутаций. Наконец, и вполне ощутимой разницы в выгодности оказывается недостаточно для решения судьбы мутантов, если рассматривать не бесконечное, а реальное время.

Мнение – что судьба каждого клона определяется именно его селективной ценностью – господствует по той простой причине, что выводы делаются на основе предельных (бесконечные времена и непрерывные численности) формул для средних величин. Однако при гиперболическом распределении полная средняя численность неинформативна, поскольку, как было отмечено в п. 4-7, складывается из нулевой численности вымерших и огромной численности немногих выживших клонов.

Для оценки судеб клонов надо сравнивать не столько полные численности, сколько численности выживших клонов, что и было проделано. Простейший вариант: стандартный клон ($s=0$) должен иметь всегда среднюю численность $m=1$, однако выживший клон имеет через 8 поколений в среднем $m=6$ особей и через 128 поколений около 68 особей. Сложнее всего дело с вымирающими клонами ($s<0$): хотя для них дисперсия средней численности стремится к нулю быстрее самой численности (т.е. они должны бы вроде быть устойчивыми по Лексису), однако эта обманчивая простота – лишь свидетельство неинформативности полных средних, и нужен более тонкий анализ. Как мы уже отмечали в п. 4-7, пока клон жив, пределы, в которых может изменяться его численность, не зависят от s, т.е. разброс возможных значений для вымирающего клона столь же велик, сколь и для успешно растущего клона. В частности, невымерший клон при s<0 проявляет *квазиустойчивость* (с. 1484): сохраняет довольно долго мало меняющуюся численность; при s= –0,01 она составляет несколько десятков особей и даже при s= –0,04 достигает 15 особей (с. 1481).

В итоге динамика слабовыгодных (0<s<<1) и слабоущербных (–1<<s<0) мутантов различается в первые десятки поколений так мало, что их судьбы почти нацело определяются не их селективными ценностями, а случайностью. Вот выдержка.

<<100 поколений совершенно недостаточно для различения мутантов, но самый существенный факт состоит в том, что судьба любого мутанта, как вредного, так и полезного, фактически решается в ходе первых поколений его существования: почти все они в это время исчезают. Разумеется, для судьбы мутанта, пережившего несколько поколений, важно, полезен он или вреден..., но сам факт неутраты в течение этих поколений слабо зависит от селективной ценности: из каждой тысячи мутантных клонов за восемь поколений при s= –0,04 утрачивается 868 клонов, при s=0 утрачивается 836, а при s=0,04 утрачивается 801 клон>> (с. 1485). Как видим, тот разброс, что в пределе породит нестохастичность, в первых поколениях гораздо более существен, чем вероятностная компонента (селективная ценность).

К сказанному тогда добавлю, что затем ситуация понемногу меняется: за 32 поколения из каждой тысячи клонов погибнет 976 при s= –0,04 и всего лишь 901 при s=0,04. А за бесконечное время наверняка вымрут все клоны с s<0, тогда как при s>0 какое-то количество клонов в среднем всегда выживет (20 из тысячи при s=0,01 и 77 из тысячи при s=0,04). Так что выводы должны быть весьма различны в зависимости от того, сколько времени длится процесс. Однако в ТВ принято обращать внимание почти исключительно на судьбу при бесконечном времени, что, как видим, малоинтересно. Другими словами, на конечных временах для выживания клона гораздо существеннее уменьшение разброса возможных значений численности, чем рост самой численности.

### *9-7.3. Когда эволюцию движет характер случайности*

В статье [Чайковский, 1977б] было приведено (к сожалению, без комментариев) сравнение разброса численностей для клона делящихся клеток и для "пуассоновского клона", рассмотренного Фишером. Пуассоновский клон – абстракция (таких клонов не существует), но он хорошо описывает процесс "вымирания фамилий", когда исследователь следит только за динамикой выживания мужских потомков самца-основателя. Если вообразить возможность перехода от одного типа клонального размножения к другому, то очевидно заметное преимущество "пуассоновского клона" – он с гораздо большей вероятностью переживает первые поколения, нежели клон делящихся клеток.

Можно бы сделать вывод о "селективном преимуществе" почкования над делением или полового размножения над бесполым, но нашлась выживаемость еще лучше, притом прямо в рамках деления клеток: достаточно принять, что клетки могут, если нужно, *пропускать акт деления*. Это вариант самый живучий: хотя s=0, но за первые 7 поколений вероятности неутраты таковы: для всегда делящихся клеток **0,1797**, для пуассонова клона **0,2095**, а для клеток, делящихся вдвое реже, чем облигатно, **0,3271** [там же, с. 1486]. Т.е. *смена характера случайности много важнее* для выживания, чем небольшая "селективная ценность" отдельных признаков. Данный вывод в статье сделан и никем пока не оспорен.

Еще пример ведущей роли формы случайности: если стохастический процесс сменить мысленно на гиперболический, то резко возрастет частота вариантов, прежде редких; зато основная часть никогда не встретится (ср. п. 9-4.4).

### *9-7.4. Эволюция при экологической катастрофе*

Все приведенные выводы были получены с настольным калькулятором (карманные появились позже). Компьютер был привлечен, когда потребовалось исследовать сугубо нелинейный катастрофический процесс. Цель работы и тут состояла в обнаружении явлений, ускользающих при финальном анализе.

Если малая разница в постоянных селективных ценностях не позволяет за реальное время эффективно различать судьбы мутантов, то может быть отбор различает таких мутантов в более жестких условиях? Самое жесткое условие – катастрофа, когда почти все особи гибнут. В таких условиях все они имеют $s<0$.

Был поставлен компьюторный эксперимент, в котором клон поначалу имел миллион особей и за время 100-120 поколений уменьшал свою численность по различным правилам, задаваемым различными видами функций $s(t)<0$, где t – номер поколения [Маленков, Чайковский, 1979].

Мы решили считать близкими по селективной ценности такие клоны, у которых *средние по времени* значения s различаются не более, чем на 2%. Большинство таких клонов имело в опыте близкие судьбы, но удалось найти режим, в котором они хорошо различались. А именно, удалось подобрать такие s(t) и такие моменты времени T, что если прекратить катастрофу при t=T, то один клон оказывается почти вымершим (живо лишь несколько особей), а другой – почти в целости (живо больше половины от начального миллиона). Вот он, решили мы, долгожданный отбор малых вариаций – тот, в который так верил Дарвин.

Радость наша длилась недолго. Желая выяснить, как же все-таки должны различаться селективные ценности, чтобы отбор мог их уверенно различать, мы скоро пришли к выводу – никак. Нашлось много вариантов, когда клон с большей средней s вымирал, а клон с меньшей средней s переживал катастрофу и сохранял значительную численность. То есть разумеется, если средние s различались достаточно сильно (в опыте: более чем на 5%), то большей s всегда соответствовало большее значение численности после катастрофы, но при малых различиях селективных ценностей различия в судьбе клона определялись не ими, а случайностью.

Результат легко представить графиком (рис. 16). По горизонтальной оси отложим значения s, а по вертикальной – значения вероятности выживания p(s). В модели Фишера p=2s, и он был уверен, что в любых случаях p(s) растет с ростом s монотонно. Но это не вполне так: в нашем опыте (а это на сегодня – единственный пример хоть в каком-то смысле успешного отбора малых вариаций за приемлемое время) точки не ложатся ни на какую кривую, а занимают S-образную область шириной около 5% в середине.

В пределах этой области можно указать сколько угодно пар точек, т.е. пар клонов, таких, что меньшему p будет соответствовать большее s и наоборот. Тем самым, для таких пар худшая селективная ценность обеспечивает лучшую вероятность выдживания. Такие пары мы назвали ps-инверсией.

S-образная область кажется линией лишь издалека, а это значит, что *при росте среднего числа потомков можно говорить о росте вероятности выживания лишь как о грубом приближении.* У нас условия нарочно подобраны для различения мутантов (мажорирующая модель), а в жизни следует ожидать гораздо худшего их различения, т.е. ширины, много большей, чем 5%.

По-моему, такие цифры, если учесть их мажорирующий характер, рушат всю идеологию дарвинизма. Ведь в жизни, в самых различных природных ситуациях, мы видим: грубая зависимость судьбы организма от его приспособленности всем очевидна, и Дарвин тут ни при чем, но нет никаких оснований говорить об эволюционной роли мелких различий, на которой строил свое учение Дарвин.

### *9-7.5. Дарвинизм, ламаркизм и номогенез о случайности*

Иногда дарвинисты "сдают позиции", говоря, что их учение не ставит целью объяснить мелкие различия, а призвано лишь утвердить выгодность существенных приобретений. Но, во-первых, это не так (вся литература по математическому дарвинизму состоит в исчислении выгодности малых различий, и прочий дарвинизм видит в ней свое основное подтверждение), а во-вторых и в-главных, если всерьез сравнивать крупные эволюционные приобретения, привлекая понятие отбора только для оценки их (а не мелких различий), то основной интерес представит не динамика их численности, а те законы, по которым эти приобретения возникли. Данные законы изучаются отнюдь не дарвинизмом (он попросту отрицает их наличие), а другими эволюционными учениями.

Из этих учений здесь надо назвать *ламаркизм*, понимаемый как совокупность всех представлений, в которых собственная активность особи рассматривается как фактор эволюции, и *номогенез*, понимаемый как совокупность всех представлений, основанных на признании закономерности появления новых эволюционных приобретений, не сводимой к динамике выживания особей. Данные закономерности интересны здесь лишь в той мере, в какой включают случайность их появления. Обо всем этом шла речь в частях II и III моей книги [Чайковский, 1990], и здесь стоит добавить немногое.

Во-первых, ориентационные автоматные модели в п. 8-5 по сути являются ламаркистскими – в той же мере, как и «стабилизирующий отбор» Шмальгаузена. (Ранее [Чайковский, 1998] я уже старался показать, что данная теория И.И. Шмальгаузена являет собой явственный ламаркизм, по цензурным соображениям высказанный в дарвинистических терминах).

Во-вторых, решающую роль в эволюции играет свободный выбор. В ламаркизме это – свободный выбор поведения особью, а в номогенезе – самопроизвольное появление новой эволюционной альтернативы (новой логической возможности), о чем говорилось прямо в книге [Чайковский, 1990, с. 173] и косвенно у К.Ю. Еськова (фраза {10} из п. 0-3). С этой позиции можно понять тех авторов, которых прежде считали мистиками и понимать даже не пытались, – например, Бергсона, писавшего в 1907 г., что эволюция есть творчество: с позиции алеатики он всего лишь указал другую, нежели дарвинисты, ступень случайности; если они имели в виду вероятность, то Бергсон – произвольный выбор.

Тем самым Бергсон фактически ввел в оборот особый фактор эволюции, который с позиции алеатики (это в-третьих) взаимодополнителен случайности, постулируемой дарвинизмом, – в том же примерно смысле, в каком, по Мейену [1974], взаимодополнительны дарвинизм и номогенез. В связи с этим уместно повторить, вслед за Красиловым, что противники дарвинизма обычно отвергают его как "сведение явлений на игру случайностей", а приверженцы, наоборот, главным в дарвинизме считают "представление о естественном отборе как антистохастическом факторе"; и пусть основатель концепции номогенеза Л.С. Берг отвергал случайность наследственных изменений, но на деле, наоборот, "случайности Берг отводил гораздо бо́льшую роль, чем Дарвин", ибо полагал большинство признаков организмов нейтральными по отношению к нуждам адаптации [Красилов, 1979, с. 7-8]. Это – тоже взаимодополнительность.

Наконец, и это в-четвертых, понимание эволюции требует рассмотрения случайности как предпочтения, т.е. – привлечения шестой (креативно-пропенсивной) ПМ. Начало этому положили, как ни странно, дарвинисты. Так, один из классиков дарвинизма XX века Эрнст Майр [1974, с. 403] утверждал: <<Каждая группа животных "предрасположена" к изменчивости одних своих структур и к удивительной стабильности других... У некоторых групп млекопитающих имеется предрасположенность к развитию рогов на лбу, у других – к развитию рогов на вершине головы, а у третьих – к тому, чтобы вообще не иметь рогов... Лишь часть этих различий можно объяснить различиями в давлениях отбора>>.

Что касается остальных эволюционных школ, то все они, особенно номогенез, включают анализ предпочтений, хотя сами эволюционисты и не думают, что исследуют случайность. Ярким примером может служить свойственное жоффруизму и номогенезу толкование появления новых видов через тератогенез, который выше (п. 4.1) был описан как реализация редких предрасположенностей. В этих терминах вся эволюция предстает как процесс изменения предрасположенностей. Вопрос о том, что управляет "пропенсивными полями", рассмотрен гипотезой Шелдрейка [Sheldrake, 1981, с. 93, 123] и выходит за рамки данной книги. О нем мне уже приходилось писать [Чайковский, 1996; 1999], и здесь замечу лишь, что у него нельзя понимать предрасположенности как нечто вроде вероятностей, поскольку не видно устойчивых частот. (Сам Шелдрейк, к сожалению, не различает случайность и вероятность. Впрочем, как и другие люди.)

Какими законами управляется эта случайность, пока неизвестно, но можно не сомневаться, что они сложнее, чем гиперболические. Достаточно рассмотреть квази-гиперболы рис. 13в в логарифмическом масштабе, чтобы увидеть, что это вовсе не прямые линии (рис. 17). На самой длинной из них (хризомелиды, т.е. жуки-листоеды – данные охватывают примерно четверть мировой фауны) хорошо видно, что даже если принять среднюю часть за прямую, то правая часть должна быть описана как-то иначе. Мы говорили об этом выше, в связи с кривыми Виллиса и Кудрина.

Наконец, синтезу ламаркизма с дарвинизмом способствует и то, что, как мы видели выше, иммунология служит экспериментальным полигоном эволюции, давая материал в пользу обоих учений. Впараллель работает несколько таких алеатических "полигонов". См. Добавление 4.

## Глава 10. К философии случайности

Теория динамического хаоса хорошо резюмируется словами: "Чем движение неустойчивее, тем устойчивее проявляются в нем статистические закономерности" [Синай, 1981, с. 80; Chaos, 1992, с. 87, 404]. Естествен и обратный ход мыслей – чем ближе неустойчивое движение к границе устойчивости, тем менее устойчивы статистические законы, однако ход этот, насколько знаю, математиками пока не сделан. Поэтому сперва рассмотрим (в первых двух параграфах) область знаний об устойчивых частотах, а затем обратимся к неустойчивым.

### 10-1. К философии вероятности

Что реальнее, что больше соответствует реальному явлению, именуемому "вероятность", – мера или частота? Как верно отметил Скороход (в обзоре, рассмотренном ранее, в п. 5-7), вопрос "что реально" ведет, в сущности, начало от Платона: для него идеи были реальнее объектов, поскольку сами объекты он мыслил как реализацию идей. (Хотя, как сказано в главе 1, как раз в отношении случайности Платон высказался иначе – случайно то, что не есть реализация идеи.) Для Скорохода реальнее мера – как идея абстрактной частоты, но эту позицию он никак не аргументирует, а мы в главе 7 видели, что понятие частоты шире.

Платонизм очень распространен среди математиков. Более того, есть мнение, что всякий настоящий математик – платоник, ибо занят идеями, существующими до и вне объектов наблюдаемой природы. В целом это верно, но мы теперь знаем об абстрактных понятиях больше Платона и потому оставаться в понятийных рамках платонизма не имеем права.

По Аристотелю, идея рода есть то общее, что имеется у всех предметов данного рода. Такое понимание идеи представляется мне дополнительным платоновскому – в том же смысле, в каком у Канта были дополнительны причинный и целевой подходы. В аристотелевском смысле вероятность-мера существует лишь потому, что существуют частоты, для которых она служит чем-то общим. С этой позиции реальнее частота.

Однако традиционное противопоставление Платона Аристотелю не представляется мне продуктивным. Даже если оставаться в рамках античной классики, то следует вспомнить ранних стоиков, у которых в центре теории познания было понятие *каталепсис* – цельное интуитивное схватывание сути познаваемого. (приведенный в п. 8-1.1 афоризм Линнея является указанием на каталепсис.)

Каталепсису нет аналога ни у Платона, ни у Аристотеля – первому оно не было нужно, поскольку идея не ухватывается, а попросту считывается умом, к этому годным, из мира идей; а для Аристотеля познание было слишком логическим. Стоики на 2 тысячи лет обогнали свою эпоху – их каталепсис нашел аналог, по-видимому, лишь сто лет назад, в трудах логика и психолога Г. Фреге [Степанова, 1995, с. 59].

Вернемся к упомянутому в конце главы 5 "абстрактному двойнику", к тому, что одни считают первичной частоту, другие – меру. Теперь ясно, что здесь нет нужды принимать чью-то сторону, поскольку вероятность как меру удобно считать взаимодополнительной к вероятности, понимаемой как абстрактный предел частоты (со сделанными в п. 2-7 оговорками). Вероятность как инвариант некоторого событийного пространства, для которого сформулировано понятие равновозможности (вообще говоря, это — скрытая равновозможность) есть не более чем способ говорить об одном классе случайностей — о стохастичности. О ней можно говорить и иначе, как об устойчивой частоте.

С этой позиции, каталепсис явления "вероятность" состоит, по-моему, в интуитивном осознании двойственной сути вероятности. В тех явлениях, где можно придать этим словам аккуратный смысл, цитированные слова Кайберга об "абстрактном двойнике" получают реальный смысл: двойник действительно "ведет себя лучше" в том смысле, что сходится к пределу.

Как пишет конструктивист Н.М. Нагорный [1996, с. XI, XX], канторовские объекты существуют в мире идей, тогда как интуиционистские – в познающем субъекте. Если я это правильно понимаю, то теория множеств Кантора выступает как чистый платонизм, в отличие от скорее аристотелевской позиции интуиционизма. Интуиционисты (и особенно их радикальное крыло, конструктивисты – см. п. 6-5.1) видят одной из своих задач противостояние платонизму [Perspectives..., 1998, с. 129, 139, 245, 251]. Пусть в целом приветствовать это намерение трудно – мне платоновская основа математики несомненна, – но некоторый смысл в нем очевиден.

По-моему, приемлемое для огромного большинства решение лежит вне этой дилеммы и легко видно в плоскости стоицизма: континуум можно понять интуитивно, но не как совокупность точек (это ведет к противоречиям, вряд ли устранимым в принципе [Нагорный, 1996, с. XV-XVI]), а как непрерывную целостность; что касается находящихся в ней точек, то лучше всего понимать их множество по Мартин-Лёфу ("среда свободного становления"). Взаимодополнительность этих пониманий стала ясна мне в ходе общения с А.Н. Паршиным.

### *10-1.1. Эргодичность и перемешивание*

*Эргодичность*, т.е. утверждение о равенстве реальных средних величин и некоторых абстрактных средних по воображаемым фазовым объемам, представляется мне очень красивой, но совершенно ложной идеей классической физики. Тот факт, что на основе идеи эргодичности была построена статистическая физика, не должен вводить в заблуждение – дело в том, что на самом деле объекты, описываемые на языке эргодичности, обладают другим, вполне реальным, свойством, обеспечивающим вероятностную случайность, – свойством перемешивания.

Перемешивание – фактически наблюдаемый процесс, распространенный далеко за пределами физики и обеспечивающий стохастичность самых различных явлений. Там, где перемешивание свободно, стохастичность устанавливается быстро и затем господствует. В социальной жизни таково, например, заражение при эпидемиях. А где перемешивание затруднено, там стохастичность оттеснена на периферию социальной жизни. Так, в силу обособленной жизни и малого числа смешанных браков, евреи сохранились как этнос в течение двух тысяч лет диаспоры.

Связь эргодичности и перемешивания подробно рассмотрена в книге Заславского [1984], откуда приведу одну иллюстрацию: на рис. 18 символически изображены фазовые траектории при эргодическом движении (а) и при движении с перемешиванием (б). Как видим, заполнение фазового объема в первом случае происходит постепенно – так же, как чертежник заполняет поле штриховкой (а заполнив, движется назад, добавляя новые линии между прежними); так что поле почти все время заполнено траекториями выборочно. Наоборот, при перемешивании поле почти сразу оказывается заполненным приблизительно равномерно. Часто пишут, что оба метода эквивалентны, но надо бы еще добавлять, что эквивалентность достигается лишь в пределе, тогда как при реальных временах перемешивание гораздо эффективнее.

Более того, эргодическое описание может оказаться фикцией на любых конечных временах. Так, каждая траектория симметричного случайного блуждания на прямой (п. 7-3.1) при любой конечной длительности игры почти всё время демонстрирует значительное отклонение от начала блуждания, тогда как среднее по различным играм почти всегда будет близко к нулю. Это хорошо разъяснено у Феллера [1964, с. 384].

Эргодичность видится мне полезным понятием только там, где она выводится из реальных свойств объекта, например, из перемешивания. Такова эргодичность марковских цепей, где среднее по времени может приближаться к среднему по фазовому объему быстро.

Мировоззренческое значение идеи эргодичности видится мне в том что она являет собой неосознанную разновидность *сравнительного метода.* Принято считать, что наблюдение одновременно существующих объектов позволяет раскрыть их развитие во времени. Так, в астрономии эволюция звезд исследуется путем анализа разных звезд и допущения, что они суть различные стадии единого эволюционного процесса. Аналогично, говорят, что наблюдение ныне живущих организмов разных таксонов демонстрирует эволюцию объединяющего их таксона во времени. Например – что наблюдение строения рыб, земноводных, пресмыкающихся и млекопитающих раскрывает ход эволюции от первых к последним. Сравнительный метод весьма полезен, но может и приводить к грубым ошибкам [Чайковский, 1994а, с. 206].

### 10-2. Пифагорейский корень случайного

Неожиданным образом пифагорейская идея, что числа правят миром (в в наших терминах она относится к первой ПМ), получает новый аспект: мы живем в мире, который описывается числами, почти сплошь случайными (по Ламберту, по Мизесу, по Колмогорову или еще как-то).

Как я старался показать читателю, природа стохастичности кроется в природе вещественных чисел (точнее, в ситэ Мандельброта – см. гл. 6) и в симметрии, порождающей равновозможность. А понятие симметрии, тоже восходящее к пифагорейской школе, в наше время может рассматриваться как принадлежащее к четвертой ПМ, т.е. как атрибут целостности.

Как уже выше говорилось, главный просчет Мизеса, оттолкнувший от него математиков, состоял в отказе от симметрийного подхода. Его к тому времени реализовали в физике Пьер Кюри и Эмми Нётер. Деля свои симпатии между второй ПМ (как механик) и третьей (статистическое понимание случайности), Мизес совсем не был готов увидать аспекты четвертой.

Однако давно пора прекратить брань в адрес Мизеса, ставшую для наших философов еще со сталинских времен досадной традицией. Мизес был прямым предшественником и первой, и второй аксиоматик Колмогорова, что одно уже ставит его в ряд выдающихся мыслителей. Само существование в алгоритмической ТВ понятия "случайность по Мизесу – Колмогорову" делает привычные философам архаические упреки в адрес книги [Мизес, 1930] непрофессиональными. Они, кстати, разительно контрастируют с коллективной монографией [Philosophy..., 1993], отводящей Мизесу достойное место. К сожалению, более новая проблематика и тут едва упоминается, причем невероятностная случайность рассматривается только как акт мышления, а не как явление природы.

Но вернемся к пифагореизму. Не следует думать, что тридцатый знак после запятой не может играть практической роли – пусть он не играет роли при измерениях(*) , зато прекрасно работает, например, в программе случайных чисел.

Хотя на практике случайные числа получают более коротким путем, нежели вычисление иррациональных чисел, но последние имеют то принципиальное преимущество, что дают *бесконечную непериодическую* последовательность и порождают случайность, в этом смысле подлинную (в отличие от компьютерных таблиц *псевдослучайных* чисел, которые через сколько-то миллионов строк начинают повторяться). Тот факт, что такая последовательность является неслучайной в алгоритмическом смысле (каждый знак однозначно вычисляется) и не вполне случайной в сложностном смысле (в ней есть, как мы видели в п. 6-7, квази-периодичность), не должен заслонять главного — иррациональность устроена так, что порождает случайность как непредсказуемость.

Это и есть, на мой взгляд, основной источник случайности физических явлений. Образно и нестрого говоря, всюду, где имеется неустойчивость типа динамического хаоса, на конечный результат может влиять очень далекий от запятой знак того или иного числа, а знак этот почти всегда случаен. В силу симметрии почти всех действительных чисел эта случайность обладает устойчивой частотой, т.е. вероятностью. В этом видится причина широкой применимости ТВ, и ответ на вопрос заглавия статьи [Алимов, Кравцов, 1992] получается такой: вероятность является нормальной измеримой (в том числе и физической) величиной для симметричных (в указанном в гл. 4 смысле) случайностей.

Отсюда ясно, что ТВ (и стандартную МС) нельзя применять там, где мы имеем дело с тем или иным нарушением симметрии. Тема нестандартной МС выходит за рамки данной книги, о ней есть обширная литература – см. например [Хайтун, 1989; Фуфаев, 2000], но вопрос о существовании вероятности в ней, насколько знаю, не ставится.

Позиция стандартной (гауссовой) статистики, как и стандартной (канторовской) теории множеств, выглядит архаичной, и именно этот архаизм ведет в математике к тому, с чем интуиционисты вот уже 90 лет сражаются. В частности, архаизм не замечал и не замечает четырех маргинальных направлений в математике, лежащих в основе нашей темы, – частотное направление в ТВ, ста-

---

(*)Формально говоря, в стохастической траектории (например, у странного аттрактора) любой знак в значении начальных условий на каком-то витке траектории окажется определяющим поведение, но фактически всякий объект включен в какую-то систему, влияние которой скажется раньше, чем далекий знак в начальных условиях самого объекта.

тистика гиперболических распределений, нестандартный анализ и умеренно конструктивное (по Мартин-Лёфу) понимание континуума. Каждое в отдельности может выглядеть не очень весомо, но вместе они дают цельную картину мира случайностей. Так что в виде девиза второй части моей книги можно бы заявить: "Маргиналии всех форм, соединяйтесь!"

### 10-3. К философии нестохастической случайности

В конце жизни Колмогоров писал: "Вообще говоря, нет причин предполагать, что случайные в этом смысле (нет никакой закономерности – Ю.Ч.) явления подчиняются каким-то вероятностным законам. Следовательно, нужно различать случайность в этом широком смысле и стохастическую случайность (которая является предметом теории вероятностей)" [Колмогоров, 1991, с. 42]. Но даже Колмогоров, видевший дальше других, в течение своей долгой творческой жизни не счел интересным рассмотреть ни одну из многочисленных ситуаций, в которых частота ни к чему не приближается.

Его интерес был и остался прямо противоположен, что лучше всего выражено в программной статье: "Действительно важной задачей является не формальное уточнение этого определения (вероятности как предела частоты – Ю.Ч.), а возможно более широкое выяснение условий, при которых такого типа вероятностная случайность должна проявляться" [Колмогоров, 1956, с. 275].

На этом пути он добился внушительного успеха, став одним из основателей алгоритмической ТВ, но за пределы данного круга тем так и не вышел, т.е. не стал искать условий, при которых "вероятностная случайность" не проявляется. И его ученик до сих пор простодушно пишет, что "за 200 лет, прошедших со времен Лапласа и Гаусса, наука не добилась продвижения в фундаментальном вопросе – когда возникает статистическая устойчивость. Узнать, так обстоит дело или нет, мы можем только из эксперимента" [Тутубалин, 1993, с. 98].

В действительности, как мы видели, дело обстоит иначе: у ТВ есть, как минимум, три частных обоснования, и каждое так или иначе указывает на границы применимости. По-моему, лучше бы попытаться обобщить эти обоснования и выявить общие границы применимости, чем создавать у начинающего впечатление, что тут ничего не сделано. Нежелание читать работы по обоснованию своей науки поразительное.

Впрочем, одну из них [Fine, 1973] В.Н. Тутубалин когда-то пролистал и откликнулся рецензией, в которой счел переводить ее нецелесообразным [Тутубалин, 1974], что досадно – в те годы такая рецензия фактически закрывала путь к изданию перевода. К счастью, о других работах он, насколько знаю, не высказывался, и одна из них была переведена – книга Кайберга. Сам же Тутубалин до сих пор в порядке "обоснования" ТВ лишь предлагает "признать за вероятностной моделью статус мифа о душе результатов наблюдений" [Тутубалин, 1993, с. 100].

Ситуация подозрительно сходна с дарвинизмом, где тоже принято молчать об открытиях последнего полувека (и имеет, по-моему, те же познавательные корни – излишняя приверженность устаревшей ПМ и соответствующей догматике). Поневоле вспоминается анекдот: "Вы слыхали? Говорят, Англия остров! – Ну что вы, мы бы знали".

И все-таки можно чувствовать к таким немногим авторам благодарность, поскольку они хотя бы видят, что выявление границ нужно. Большинство же математиков, если указать им на эту проблему, говорят, что согласование с опытом – не задача их науки, что ТВ дает хорошую модель, а где и как ее можно применять – задача других наук.

Это не так, и Колмогоров в конце жизни высказался об этом вполне ясно: "Само понятие математической вероятности было бы бесплодно, если бы не находило своего осуществления в виде частоты..." [Бернулли, 1986, с. 4]. В самом деле, без этого вся та часть теории функций действительного переменного, каковой является нынешняя теоретикомерная ТВ, осталась бы уделом интереса немногих и была бы очень мало разработана. А значит, ТВ должна ясно формулировать, что такое частота и как она связана с вероятностью-мерой. Кстати, другие отрасли математики прямо формулируют границы своей применимости, не отсылая к опыту. Курс анализа не начинают с фраз вроде: "Опыт показывает, что к кривым можно проводить касательные", а выявляют класс гладких кривых.

Аналогом гладких кривых служат для нашей темы симметричные случайные явления, т.е. явления, допускающие введение (скрытой) равновозможности. Для иных случайностей оснований рассчитывать на стохастичность нет. Повторю: по-видимому, равновозможность так же выделена в пространстве событий, как инерция – в пространстве движений. Как гравитация искривляет физическое пространство, делая геодезические линии кривыми, вплоть до их замкнутости, так взаимодействие событий искривляет тройную симметрию случайности, вплоть до потери частотами устойчивости, т.е. до исчезновения статистической вероятности.

Если испытания проходят по вероятностной схеме Бернулли или Колмогорова, то симметрия нарушаться не может: каждое подмножество реализуется вместе с симметричным ему (по любому мыслимому типу симметрии). Если же реализуется менее симметричная схема, то возможны ситуации, когда вероятность-мера существует, но частоты к ней не сходятся – таковы, например, случайные величины, в теории подчиняющиеся устойчивым негауссовым распределениям, а в эксперименте демонстрирующие гиперболические плотности. При отсутствии же всякой симметрии случайного испытания (таков произвольный выбор) нельзя ввести и вероятность-меру. Многие из таких случайностей допускают введение инвариантов, менее жестких, чем вероятность (см. п. 8-3.1).

Наиболее хаотическая случайность вообще, по-видимому, не допускает анализа методом выявления инвариантов (детерминизации по Пятницыну).

Именно ее я бы и назвал истинной случайностью, которая, тем самым, отлична от имманентной случайности (беспричинности), имеющей, как мы видели в п. 8-2, вероятность. Это и понятно – беспричинность есть высшая форма симметрии в событийном пространстве.

Что можно сказать содержательного про такую "истинную случайность"? Если пользоваться самым коротким определением философии ("Философия есть учение о взаимосвязях бытия" [Meyers..., 1922]), то вопрос явно философский.

Античность вовсе не считала, что наш мир – мир равновозможностей, она жила в мире предпочтений (в сущности, *вероятное* древних – то, чему оказано предпочтение, – природой, судьбой или богом) и не умела работать с частотами. Средние века выдвинули идею равновозможности, которую Новое время наивно сочло основой *всех* типов случайности. (Вслед за Я. Бернулли, в ТВ принято представлять неравновозможные события суммами равновозможных – см. гл. 3). Это была ошибка – теперь мы знаем, что случайности бывают принципиально различные.

"Вездесущая природа случайности является альтернативой к любому другому виду объяснения. Это, по-видимому, глубоко коренится в человеческой природе" [Пойа, 1957, с. 352]. Сказано верно, но следовало бы добавить, что такое широкое понимание случайности очень слабо связано с вероятностью как понятием ТВ.

Между прочим, мы часто производим выбор между выводами "это случайно" и "это неслучайно", а это на практике означает выбор между убеждениями "случайность этого весьма вероятна" и "случайность этого неправдоподобна", что относится не к ТВ, но к области логической вероятности. Эта вероятность, как правило, осмысленна лишь при p, близких к нулю или единице – см. п. 2-10. Как быть с утверждением типа "это неслучайно с вероятностью 2/3", неясно.

Другими словами, решение вопроса о том, считать ли данное событие случайным или имеющим определенную причину, обычно выходит за рамки не только ТВ, но и науки вообще. Тут мы и вступаем в область случайности, вообще не имеющей никакой вероятности – ни меры, ни частоты.

Математик А.Н. Паршин замечательно высказался о теореме Гёделя. Прочтя то мнение, что "жизнь была бы приятнее, если бы теоремы Геделя не было", он возразил: "если бы не было теоремы Геделя, то жизнь не только не была бы приятнее, ее просто не было бы" [Паршин, 2000, с. 30]. Позволю себе перефразировать Паршина: *если бы всякая случайность имела вероятность, жизни бы просто не было*. В самом деле, вероятность возможна лишь при отсутствии свободного выбора, а без него ничто новое не появляется. И когда мы, не зная, как поступить, бросаем монету, мы избавляем себя именно от свободы выбора.

Поэтому ставшие в последние годы модными рассуждения о квантовой природе сознания [Penrose, 1994; Менский, 2000] можно признать осмысленными только после прояснения вопроса о случайностной природе свободного выбора. К сожалению, случайность и вероятность в подобных рассуждениях не различаются, что в данном случае сводит к нулю ценность выводов. Роджер Пенроуз, отождествляющий мышление и вычисление, полагает, что "вычислимое хаотическое поведение" можно заменить на "подлинную случайность" (genuinely random behaviour) без существенной потери функции [Penrose, 1994, с. 178].

Мне дело видится иначе. Точнее, мне представляется осмысленым лишь обратный вопрос: можно ли заменить подлинную случайность на ее вычислимый аналог, т.е. на псевдослучайность, без потери той функции, которую Пенроуз именует мышлением. Тут нельзя обойтись без различения случайности и вероятности, однако такового различения ни у кого из ныне пишущих не видно. В частности, М.Б. Менский (он понимает сознание еще более узко – как выбор одной из заданных альтернатив), восклицает, как бы продолжая мысль Эйнштейна: "Да, Бог не играет в кости, он равно приемлет все возможности. В кости играет сознание каждого наблюдателя". Но играть в кости нельзя, если нет костей; здесь же не задан даже вопрос: есть ли смысл говорить о каких-либо равновозможностях? Вместо этого Менский [2000, с. 644] попросту записал, что "этот выбор делается наугад (т.е. с равной вероятностью...)".

Нет. Свободный выбор никогда не может быть равновероятным – хотя бы потому, что не предполагает априорного знания перечня альтернатив. Еще важнее, что наличие вероятностей означает отсутствие свободы выбора, а это значит, что Менский по сути отказывает сознанию в его главной функции – в свободе воли. Вряд ли это устроит самого автора. Вопрос гораздо глубже и не сводится к трактовке случайности. Но если здесь и возможно какое-либо полезное случайностное рассуждение, то не в терминах ТВ (до сих пор остающейся в рамках первой и, в малой мере, третьей ПМ), а в терминах предрасположенностей и творчества (шестая ПМ). Об этом см. раздел "Случайность, сложность и творчество" работы [Чайковский, 2001а], здесь же ограничусь двумя замечаниями.

### *10-3.1. Импробабилизм и пропенсивность*

Любищев [1936] писал своему другу эмбриологу П.Г. Светлову: "Начну... с критики моих суждений о пробабилизме. Тебе кажется, что никто не может быть увлечен философией, главным свойством которой декларируется то, что в ней нет ничего достоверного... Но читатель твоего письма будет жестоко разочарован, когда увидит в дальнейшем, что ты обвиняешь пробабилизм не в недостатке достоверности, а в избытке её и предлагаешь мне заняться философией импробабилизма на том основании, что мир чудесен в буквальном смысле этого слова. Тут уж настает моя очередь удивляться: кто может быть увлечен философией, строящей свои положения на невероятных утверждениях; я таких лиц не знаю, и такое предложение: заняться философией импробабилизма –

есть одно из высших достижений интеллектуального озорства" (пунктуация здесь и далее приведена мною к общепринятой).

Тут могу добавить, что лет через двадцать такое "озорство" было всерьез предложено в форме «антропного принципа космологии». Литература о нем огромна, касался его и я [Чайковский, 1990, с. 7, 210], а в п. 9-2 он был мельком увязан с пропенсивностью. По-моему, Любищев в своем письме искал подход именно к тому, что позже было названо пропенсивным пониманием случайности. Но вернемся к письму; оно опубликовано [Любищев, 2000, с. 296]:

"(Мне неизвестно, кто претендовал защищать философию импробабилизма: здесь ты пожалуй окажешься первым). Я постараюсь показать, что импробабилизм существует, но не сознательно, а невольно".

Далее Любищев приводит заявление Светлова (из письма его к Любищеву, видимо, утраченного): "развитие лягушачьего яйца есть путь от более вероятного к менее вероятному", а затем сам называет трех неосознанных импробабилистов – Ч. Дарвина, Р. Фишера и Л.Н. Толстого:

1) "Блестящим примером импробабилиста является Дарвин: вся теория естественного отбора предполагает накопление невероятных событий, т.е. подобных совершенно сказочным выигрышам, но так как размер невероятности не осознается, то автор думает, что он остается на почве пробабилизма...";

2) "для курьеза могу отметить, что даже блестящее знание теории вероятностей не гарантирует от впадения в бессознательный импробабилизм, что случилось например с английским ученым Фишером" (в дальнейшем тексте названа книга [Fisher, 1930]);

3) "Предлагаемый им (Львом Толстым – Ю.Ч.) рецепт спасения человечества: чтобы все люди почувствовали друг друга братьями и поступали бы согласно с этим – ничего абсурдного не заключает, и мы знаем, что есть ряд богатых людей, которые действительно служили человечеству. Ошибка Толстого в том, что такое этическое поведение людей есть событие хотя и не невозможное, но исключительно маловероятное... и потому строить практическую систему на возможности массового осуществления маловероятных событий, значит быть бессознательным импробабилистом".

Поясню: что касается Фишера, то его импробабилизм вполне виден из того, что сказано о нем в п. 9-7 (редкие выгодные мутации он рассматривал наравных с частыми вредными), остальные же трое так или иначе говорили о предпочтительных (для них!) путях развития как о вполне реальных; но если Светлов изумлялся (почему невероятное оказывается предпочтительным), то Дарвин и Толстой – отнюдь.

Взгляды Дарвина, Толстого и Фишера (к ним можно отнести еще многих; таковы, например, Ф.М. Достоевский с его тезисом "Красота спасет мир" и А.И. Опарин с его происхождением жизни в "первичном бульоне") объединяет их принцип рассуждения, который можно сформулировать примерно так: проложим мысленный путь от исходного состояния к желаемому и назовем его реально возможным или даже реально бывшим. Вопрос о вероятности реального осуществления такого пути не ставится, и именно поэтому этот принцип Любищев назвал *импробабилизмом*. До прочтения письма Любищева Светлову я называл его для себя **принципом слонопотама** – в честь медвежонка Винни-Пуха, который вырыл около своего дома яму и стал ждать, пока в нее попадется неведомый зверь слонопотам.

Но бросается в глаза разница: красота не спасает мир (точнее, она лишь скрашивает его для способных ее видеть), а лягушка из яйца развивается. То есть, импробабилизм Светлова – какой-то иной (без слонопотамства), он описывает какую-то реальность. Тут-то и помогает идея пропенсивности: ясно, что онтогенез невероятен по одним законам, но возможен по другим, так что запуск онтогенеза можно представить себе как включение некоторой системы предпочтений, делающей невероятное вероятным, а по мере реализации – даже почти неизбежным.

Если натурфилософ Шелдрейк (упомянутый в конце глав 8 и 9) выразил данную мысль через абстрактные "пропенсивные поля", то биокибернетик Кауфман (о нем шла речь в п. 8-4) более конкретен. Хотя его автоматная модель чисто ориентационна (т.е. тоже абстрактна), однако демонстрирует вполне определенные качества: "Принимаемые в качестве моделей генных систем системы, расположенные на границе между порядком и хаосом, довольно близко соответствуют многим свойствам клеточной дифференцировки в процессе онтогенеза". А именно: "Клеточная дифференцировка, согласно этой модели, может явиться ответом на возмущение, которое передвинуло клетку в бассейн притяжения, характерный для другого клеточного типа" [Кауфман, 1991, с. 65]. Проще говоря, если "возмущение" (например, химическое) изменило систему предпочтений развития, то клетка почти наверняка перейдет в клетку иного типа, что до "возмущения" было практически невероятно. А различных типов у клеток, как показало моделирование, совсем немного: в модели Кауфмана – меньше трехсот.

#### *10-3.2. Спонтанность и свобода воли*

Результатом свободного выбора является самопроизвольность (спонтанность) наблюдаемого явления. Она настолько своеобразна, что Налимов вообще считал ее не видом случайности, а особой философской категорией. (В самом деле, самопроизвольный по гречески – *автоматос*, и в гл. 1 говорилось, что у греков, кроме Тюхэ, богини случая, была еще Автоматия – так сказать, богиня спонтанности.)

Как мы знаем, есть два типа беспричинности – имманентная случайность и свободный выбор. По Овчинникову [1996, с. 135], кроме имманентной, "можно говорить еще только об одном типе случайности – субъективной, обусловленной нашим неполным знанием детерминированных процессов". Это можно принять, но лишь с радикальной оговоркой: субъективность и незнание – разные источники случайности. Конечно, они могут пересекаться (упомянутое незнание алгоритма), но в самых интересных ситуациях незнание вполне объективно, субъективность же связана отнюдь не только с недостатком знания, но и со свободой выбора. Называть свободный выбор псевдослучайным вряд ли удачно – возможна путаница. По-моему, тут лучше предложенное Налимовым слово "спонтанный".

**Спонтанным** (от лат. *spontaneus* – добровольный, произвольный) будем называть событие, происшедшее самопроизвольно, т.е. в силу чьего-то свободного выбора, произвола. Наоборот, для имманентной случайности (радиоактивный распад, последовательность знаков неконструктивного числа) термин "спонтанный" использовать нет смысла, поскольку здесь не виден ничей произвол: так, в знаках иррационального числа серия 01001 не может быть ни реже, ни чаще, чем симметричная ей серия 10110.

Имманентная случайность стохастична именно в силу равновозможности взаимно симметричных серий, тогда как для спонтанности ожидать какой-либо равновозможности не приходится. Естественно относить к спонтанному всё, что связано с сознанием. Налимов посвятил этой теме целую книгу [1989], но анализа самого понятия "спонтанность", как и понятий "случайность" и "вероятность", тут нет. (Нет их и в книге [Налимов, 1977].) Зато есть несколько ярких характеристик, вот они все:

1) "В этом термине (спонтанность – Ю.Ч.) заложено нечто большее, чем просто в представлении о случайности". (Добавлю: ту же мысль находим подробно развитой у Аристотеля – Физика 197 а33 – 197 b38.)

2) "Случайность объясняет случайное поведение элементарного события, т.е. чего-то очень простого, элементарного, механического по своей природе. Спонтанность относится к изменению текстов, к изменению смыслов в их взаимосвязанности, т.е. к имеющему смысл изменению смыслов".

3) "Спонтанность – это реальность другого мира, смежного нашему". Она "не подчиняется причинно-следственным связям, не локализована в физическом пространстве – в нем она только проявляет себя... Не ограничена временными рамками, она отождествляется с забеганием вперед, что порождает завихрение времени".

4) "Мы до сих пор не понимаем природу спонтанности, а следовательно, и не понимаем смысловую природу человека". "Личность – это спонтанность. Спонтанность – это открытость вселенской потенциальности. Способность попадать в резонанс с ней".

Загадочность этих характеристик несколько проясняется при их сравнении с характеристиками Налимовым других понятий – личности и смысла: "личность – это прежде всего интерпретирующий самого себя текст", "Изначально все возможные смыслы мира как-то соотнесены с линейным континуумом Кантора – числовой осью, на которой в порядке возрастания их величин расположены все вещественные числа".

Разумеется, личность – не текст (если понимать текст как последовательность знаков), а смыслы – не точки в каком бы то ни было пространстве, допускающем формулировку. Но смутная идея тут чувствуется, она как-то связана со спонтанностью, и ее надо попробовать выявить.

Мы видели, что числовая ось устроена занятно: два сколь угодно близкие числа записываются, вообще говоря, совсем различно, причем последовательность цифр почти всякого иррационального числа имманентно случайна. В каждом иррациональном числе содержится бесконечное количество информации, и если ограничиться какой-то определенной длиной N последовательностей знаков, то можно сказать, что каждая имеет свой особый смысл. Существенно, что все действительные числа, ограниченные таким образом, содержат все возможные высказывания длины N, т.е., в некотором смысле, все возможные смыслы. Возможно, что Налимов говорил именно об этом.

Однако в качестве модели носителя смыслов числовая ось никуда не годится. В самом деле, на любом отрезке расположен континуум чисел, в некотором смысле одинаковый: малая часть отрезка состоит из такого же числа точек, что и весь отрезок (самоподобие), а каждый отрезок содержит, за счет неконструктивных чисел, все возможные тексты (самоподобие в широком смысле слова), т.е. всю мыслимую и немыслимую информацию и бессмыслицу. Именно потому, что информация тут вся, ею и нельзя воспользоваться.

Тем не менее, сам феномен самоподобия весьма важен, и можно указать класс самоподобных (опять в широком смысле слова) объектов, действительно годных для реализации идеи Налимова – это фракталы. Точно сказать ничего не берусь, но напомню, что сменяющие друг друга при движении вдоль фрактальной границы множества Мандельброта картины (множества Жюлиа) вполне осмысленны и в то же время спонтанны в том смысле, что, чуть-чуть меняя по своей воле путь движения, мы можем получать совсем разные картины – см. главу 7.

В этом контексте уместно процитировать "Философский диалог" шведского математика Ларса Гординга, пытающийся свести воедино некоторые ключевые философские вопросы науки, этики и религии. Они все оказываются завязаны на проблему случайности. Гординг – специалист по дифференциальным уравнениям, а значит далек от ТВ, и это хорошо – разговоры о случайности лишены вероятностной узости; случайность выступает прежде всего как свободная воля, легко заменяемая на спонтанность – как гносеологически, так и онтологически.

Гординг [2000; 2001] воображает беседу математика Джона фон Неймана (о нем у нас шла речь в связи с играми) сразу после смерти – сперва с Богом, а затем с Дьяволом и другими обитателями ада (где Нейман оказался после недостаточно почтительной беседы с Богом). Сначала Нейман из вежливости спрашивает Бога о самочувствии, и тот отвечает: "Спасибо, хорошо. Я решил чувствовать себя хорошо. Ведь я, как известно, всемогущ". На этом, в сущности, его всемогущество и кончается: все упреки он отклоняет, говоря: "Часто мое всемогущество отдается случаю. Иначе пришлось бы делать слишком многое"; "Я иногда передаю всемогущество случаю, силам природы, некоторым людям и даже иногда дьяволу. Я наслаждаюсь своей свободой, не пользуясь иногда всемогуществом". На вопрос Неймана – как это сочетать со всеблагостью, Бог заявляет: "Я не всегда добр".

Нейман резюмирует (уже в аду): "Бог пребывает в иллюзии всемогущества", а Дьявол сокрушается о муках обитателей ада. Нейман (в споре с Августином) заявляет: "твой Бог неотличим от случая" и добавляет, что поклоняться случаю было бы честнее.

Российкий читатель легко заметит параллели с Бердяевым (Бог, имеющий власти не более, чем у полицейского пристава) и Михаилом Булгаковым (Дьявол, в сущности, добрее Бога). Для нашей же темы существенно, что, по Гордингу, свобода воли (творчества) совместима со спонтанностью, но не со всемогуществом и всеблагостью. Тем самым, проблема случайности смыкается с одной из главных тем истории культуры – проблемой *теодицеи* (оправдания Бога за зло в мире [Leibnitz, 1734]). Не имея возможности развивать ее здесь, сошлюсь только на книгу русского богослова Н.О. Лосского, уверявшего полвека назад, что любые формы зла, не связанные со злой волей человека (например, врожденные уродства), «все суть следствие недостатка единодушия между человеческим «я» и остальными деятелями природы». Согласно этой точке зрения, «наша жизнь постоянно подвергается множеству стеснений и затруднений вследствие несогласованности между строем природы и нашими потребностями» [Лосский, 1994, с. 355, 359]. Такая теодицея равносильна взгляду Гординга – точнее, списывает зло на случайность-несогласованность (тип Б).

Можно спорить, считать ли такого Бога всемогущим, но морального протеста данная позиция не вызывает. Наоборот, утверждение: «Зло, царящее в нашей жизни, может наносить ущерб лишь тем личностям, которые сами запятнаны виною себялюбия» [Лосский, 1994, с. 363], мне представляется безнравственным. Философствующий богослов, произносящий подобные слова в мире, где изобилует такое, например, зло, как дети-калеки, заставляет вспомнить жестокий, но верный афоризм: «Философия помогает нам сносить тяготы ближних» (Оскар Уайльд).

### 10-4. Общие замечания

В конце недавней французской книги о случайности приведена "не без юмора" пара противоположных тезисов ("Последний закон мира – случай, и весь возможный детерминизм обязан закону больших чисел" и "Последний закон мира – полный детерминизм, и вся наблюдаемая случайность обязана детерминистическому хаосу"), из чего сделан вывод: на уровне бытия у нас нет средств выбрать между этими моделями мира, а на уровне знания мы можем (и с пользой) принять любую [Chaos, 1992, с. 405].

Сделать так можно, однако надо понимать, что кроме двух этих взглядов (т.е. второй и третьей ПМ) есть и другие. Они нужны, в частности, для того, чтобы осознать феномен случайности без вероятности, но для этого необходима смена статистического мировоззрения, господствующего пока в обществе (его яркие черты – вероятностное толкование текстов, подсчет всевозможных шансов в обыденной жизни, вера в самодостаточность рынка и дарвинизма), на более новое, основанное на новых ПМ.

Будущее алеатики видится мне в выявлении исторических линий мысли. Линия от Кардано к Колмогорову представляется мне пройденной, а будущее – в движении по забытой линии, т.е. по пути пропенсивности, от Августина и Пачоли к Попперу, Шелдрейку и далее. Клеточные автоматы Кауфмана вселяют надежду, что пропенсивность может быть вскоре понята вполне конкретно и даже инструментально.

Однако загадочное карданово "течение времени" наводит на мысль, что и от Кардано был возможен путь не только к Бернулли и Колмогорову; что еще предстоит найти некоторый принцип – образно говоря, принцип однородности событийного пространства-времени, в рамках которого применима ТВ, и четко выявить эти рамки. В понятиях каких ПМ это удобно будет сделать?

Однородное пространство – атрибут третьей ПМ, что же касается нарушений однородности, то тут, на мой взгляд, более всего подходит шестая (будущая) ПМ, охарактеризованная, насколько это сейчас возможно, как креативно-пропенсивная (см. гл. 5). Случайность оказывается здесь почти нацело нестохастической (невероятностной), как, впрочем, и при пользовании остальными новыми ПМ, т.е. четвертой и пятой.

Однако, если о пропенсивности мы не можем на сегодня сказать ничего, кроме нескольких абстрактных фраз, то системная и диатропическая случайности изучены лучше и допускают уже сейчас описание в довольно аккуратных терминах (пусть и не столь точных, какими пользуется ТВ). А именно, в нежестких системах обычна сложная случайность с неустойчивыми частотами, которую нельзя характеризовать посредством вероятности-частоты, но, как правило, удается описать через иные, менее жесткие, инварианты. Такими инвариантами служат, например, плотности распределения неустойчивых частот и ряды изменчивости плотностей (см. выше, п. 8-6).

Наиболее сложна случайность тогда, когда система находится на грани между порядком и хаосом. В таких системах обычен феномен спонтанной самоорганизации, и случайность ему способствует (организующая роль случайности). Поскольку "увеличивая долю канализирующих функций в сети, мы можем подталкивать систему к фазовому переходу между хаосом и порядком" и "устойчивое ядро элементов идентично почти для всех аттракторов" [Кауфман, 1991, с. 64, 65], постольку самоорганизация может быть не только понята, но, в принципе, и управляема. Здесь, по Кауфману, открывается также и путь к пониманию эволюции.

Роль случайности во всякой эволюции оказывается при этом ключевой, однако совсем не той, какую рисовал (для биологии) дарвинизм, видевший лишь две ее функции – ненаправленность вариаций и непредсказуемость путей. Роль ненаправленных вариаций оказалась несущественной, а пути развития – вполне предсказуемыми, если понимать предсказание в диатропическом смысле – как указание спектра возможностей. Зато открытие систем с управляемым "переходом между хаосом и порядком" позволяет понять феномен естественного отбора всерьез: это отнюдь не медленное (тысячи и миллионы поколений) вытеснение обладателями "полезных вариаций" тех, кто ими не обладает, а смена квантов селекции (см. п. 8-4), т.е. быстрая (единицы и десятки поколений) смена типов развития, идущая впараллель у всех или почти всех членов эволюционирующего коллектива.

Отбор, как выяснилось, состоит в апробации способов управления развитием – прежний способ уступает новому. Если поколения – клеточные, то речь идет об индивидуальной эволюции (онтогенезе), если же в поколениях меняются одни особи на другие, то происходит эволюция видов и иных таксонов. Роль случайности при этом в общем укладывается в аристотелеву «случайную необходимость» (см. п. 1-3 — с той оговоркой, что случайное трактуется теперь не только как несущественное, побочное *(симбебэкос* по Аристотелю*)*, но и в иных смыслах). Данное понимание случайности выводит эволюционную науку из того познавательного тупика, в который, как мне представляется, ее завел дарвинизм.

Так понимаемая эволюция может касаться самых различных "особей", и "таксонов", отчего становится понятным давно отмеченный факт сходства закономерностей эволюции биологических, языковых, технических и иных объектов. При этом эволюция сущностна, т.е. касается существа изменяемых объектов, тогда как дарвинизм объясняет, как отмечалось многими философами и сказано в п. 1-5, исключительно акциденции (побочные свойства), такие, как количественные признаки или окраска.

Дарвинизм, на мой взгляд, сошел с научной сцены (в его понятийных рамках уже сто лет как не получено никакого нового знания) и сохраняет позиции лишь постольку, поскольку остается предметом преподавания. Это в истории науки феномен обычный, но нельзя допустить, чтобы с уходом дарвинизма из нашего обихода ушел и случайностный аспект истории жизни. ТВ здесь ничем помочь не сможет, и потому размышления Налимова, Гординга и других о спонтанности видятся мне очень важными.

### *10-4.1. Несколько замечаний о преподавании*

Вопросы обоснования до сих пор, насколько знаю, традиционно отсутствуют в учебных курсах тех наук, о которых у нас шла речь. В отношении математических дисциплин это особенно странно. Файн [Fine, 1973] предлагал ввести их в преподавание ТВ еще давно, а после успешных работ Юнг [Young, 1998] и подобных ей авторов это отсутствие – уже вопиющий анахронизм. Если бы после создания алгоритмического понимания случайности Колмогоров написал учебник ТВ, где сослался бы на это понимание как на первый шаг к обоснованию понятия вероятности, мы бы сейчас обсуждали совсем другой круг вопросов.

Однако учебника Колмогоров так и не написал. Почему? Поначалу мне хватало мысли, что Колмогоров прояснил вопрос для себя, чем и удовлетворился, но ознакомление с брошюрой Тутубалина [1977] заставило меня изменить точку зрения. Автор, почтительный ученик Колмогорова, писал, тем не менее, что "вторая аксиоматика Колмогорова" ничем не лучше для прикладных целей, нежели "классическая теоретико-множественная аксиоматика", поскольку ни тут, ни там предпосылки нельзя проверить [Тутубалин, 1977, с. 20]. Мысль явно некорректная, но весьма показательная.

Правильнее было бы сказать: "ни тут ни там предпосылки проверять не принято, ибо это может повлечь смену приоритетов, а с тем и авторитетов", но главное даже не в этом. Главное в том, что от новой теории, едва получившей результаты для простейшей схемы (серия независимых бросаний идеальной монеты) автор сразу же потребовал не только приложимость к практической статистике, но и эффективность, лучшую, чем у господствующего метода. Требование убийственное, о чем свидетельствует вся история науки. (Вспомним хотя бы испанцев, отказавшихся в XVIII веке от первого парохода ввиду его неэффективности, а также от других достижений эпохи, и поэтому оказавшихся на обочине европейской истории.) Назначение алгоритмической теории случайности видится мне на сегодня отнюдь не в приложениях, а в обосновании ТВ, отсутствие которого как раз и декларирует до сих пор Тутубалин.

Еще более прояснило ситуацию появление нового издания "Основных понятий" Колмогорова [1998]. А.Н. Ширяев, ученик Колмогорова, возглавляющий колмогоровскую кафедру, дал в послесловии пунктирный очерк развития ТВ, в котором уделено соответствующее место и алгоритмическому обоснованию вероятности. Почему же в обширном учебнике самого Ширяева [1989] ничего об этом не сказано? Ширяев ответил дважды: начиная и кончая речь об алгоритмических методах отметил, что они не имеют отношения к "понятиям случая и вероятности" [Ширяев, 1998, с. 120, 124]. Вряд ли стоит повторять, что замысел Колмогорова был противоположен: ввести в ТВ именно случай – понятие, которого там не было.

Столь радикальное расхождение пониманий вызывает изумление, однако оно легко и естественно встраивается в ряд аналогичных фактов истории науки. Яркий ученый может сам по себе додуматься до чего угодно, но отнюдь не всё может объяснить даже ученикам, не говоря уж о научном сообществе. Думаю, Колмогоров не стал вводить обоснование ТВ в курс ТВ именно потому, что коллеги не восприняли его алгоритмические штудии в качестве обоснования ТВ, сочтя их чем-то посторонним.

Нынешняя ТВ выстроила вокруг себя то, что Лакатош называл *защитным поясом теории* [Лакатос, 1995]. Вопреки уверениям, что является внутренне самодостаточной и на практике прекрасно работающей, ТВ во многом разошлась как раз с практикой, о чем выше не раз шла речь (напомню хотя бы, что при анализе рушится даже описание ею таких парадных примеров, как симметричная монета и радиоактивный распад) и, на мой взгляд, ныне самодостаточна только как предмет преподавания. Это неожиданно роднит ее с такой расплывчатой доктриной, как дарвинизм, но не менее интересны параллели в самой математике.

По замечанию Нагорного [1996, с. XXVII], в преподавании математики даже для самих математиков (если не считать специалистов по основаниям математики) царят натяжки, приблизительные "определения" и "образные речевые приемы, не имеющие прямого смысла". Он привел примеры из анализа, мне же вспомнились – из дарвинизма (например: "естественный отбор – единственный творческий фактор эволюции") и из ТВ (например: "бросим точку на отрезок"). Трудно спорить с Нагорным, считающим, что такое преподавание отнюдь не дисциплинирует мышления.

Снова напомню мысль Ю.А. Шрейдера – ТВ учит вычислять вероятности, но отучает размышлять о случайности. Однако нельзя отрицать, что такое преподавание проще, чем было бы, если бы базировалось на алгоритмах, странных аттракторах и прочих атрибутах обоснования ТВ. Усложнять его как целое, конечно, не следует, но в этом и нужды нет. Достаточно показать, как возникает вероятностная случайность, разъяснить, что частота стремится к предельной области, но не к точке, а далее пользоваться традиционным аппаратом и лишь в конце курса очертить его точность и границы его применимости. Только для тех, кому надо будет работать вне этих границ, надо рассказывать нечто большее.

Увы, вместо этого всякое предложение заменить "туман предисловий" (Файн) на какое-то обоснование отвергается ссылкой на нежелательность усложнения. Это – один из инструментов "защитного пояса". Так же говорили об излишней сложности эллипсов Кеплера в сравнении с кругами Коперника и обо многом другом. Беда (и будущее спасение) в том, что эта "простота" постепенно оборачивается в еще большую сложность, как произошло с системой дополнительных кругов (эпициклов, эквантов и пр.) в системе Коперника. В ТВ это вполне заметно уже сейчас.

Характерны признания Джозефа Дуба: короткая и малосодержательная глава "Закон больших чисел" посвящена у него размышлениям о туманности (fuzziness – буквально: кудрявости) всех рассуждений о реальных частотах. Примером туманности он счел и тот факт, что ЗБЧ называют законом [Doob, 1994, с. 159], но не сказал, что же надо делать. А ведь статья его посвящена как раз строгости. По-моему, и строже, и проще было бы рассказать хотя бы про странный аттрактор – что он обеспечивает возникновение вероятностной случайности и что его поведение может быть описано настоящей предельной теоремой, как мы видели в главе 6.

Рано или поздно такой рассказ проникнет в курсы ТВ, и это будет прорыв "защитного пояса". Но для прорыва будущим авторам следует перейти мировоззренчески от первой ПМ ко второй, что естествознание в целом проделало уже 200 лет назад (механика – много раньше, при Галилее), а ТВ еще только собирается.

Конечно, предлагавшиеся до сих пор обоснования ТВ были узки, но поначалу это неизбежно, и отвергаются они не поэтому, а, полагаю, потому, что их принятие повлечет смену приоритетов. Нынешние монографии, в которых на сотнях страниц нет ничего, кроме теоретикомерных теорем о сходимости (ни примеров, ни пояснений вероятностного смысла, ни даже словесных формулировок результатов, не говоря уж о хотя бы гипотетической приложимости) окажутся никому не нужными, как оказались когда-то ненужными исследования эпициклов – а они продолжали печататься более ста лет после смерти Кеплера. Естественно, авторы таких монографий сопротивляются всяким новациям, ибо смена приоритетов будет для них катастрофой, но ведь смена всё равно состоится. Спорить с ними не надо, а вот преподавать обоснование ТВ явно надо – хотя бы для того, чтобы ее не применяли там, где она дает нелепые рекомендации.

Хочется надеяться, что более общее, чем до сих пор, понимание природы случайности, как и природы элементарного математического объекта ("ситэ Мандельброта"), повлечет более широкое обоснование ТВ. Последует осознание границ ТВ, а это неизбежно повлечет и признание алеатики как базы многих других наук.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Начав с полета монеты, в заключение вернемся к нему же. Во многом нам удалось добиться значительно большей, чем прежде, ясности.

Монета падает гербом вверх с устойчивой частотой, близкой к 1/2, независимо от того, является ли она идеально симметричной или же несколько искривлена, причем отличить идеальную симметрию от малой диссимметрии путем серии бросаний невозможно ни при какой длине серии. Нерегулярность (случайность) выпадения герба вызвана отнюдь не сложностью полета монеты, а неустойчивостью отображения множества начальных состояний во множество конечных. Устойчивость же частоты обусловлена не фактом симметрии, а самим наличием двух сторон, на каждую из которых возможно падение.

Хотя в учебниках ТВ частотное понимание вероятности никогда не излагается, а если и упоминается, то невнятно, но неявно оно присутствует. Так, Тутубалин [1992, с. 10] пишет, что "частота осуществления того или иного исхода оказывается близкой к некоторому числу, которое и называют вероятностью данного исхода". На самом деле вероятностью называют меру, и как она связана с этим числом, следовало бы разъяснить. Учебник Тутубалина в точности повторил невнятное место из ранних работ Колмогорова, но ведь сам Колмогоров позже, в 1960-х годах, добился некоторого прояснения вопроса, а в настоящее время достигнут, как мы видели, прогресс весьма значительный – ТВ получила три частных обоснования (пп. 2-9.1, 4-4.1, 4-5.1).

До общего обоснования еще далеко, но связь вероятности-частоты с вероятностью-мерой стала тем самым в значительной степени понятна. О двух других смыслах вероятности (моральном и логическом) нужен разговор отдельный. Он выходит за рамки данной книги, и могу лишь повторить, что логическая вероятность относится к тому кругу явлений, где о частоте речи нет (п. 2-10), а моральная вероятность вообще относится не к явлениям, а к мнениям (см. например п. 7-8).

Поскольку основным назначением данной книги было выйти за привычные рамки ТВ, то главное, что требовалось относительно вероятности – указать ее место в ряду случайностных понятий. Вероятностная случайность (стохастичность) обладает жестким инвариантом – вероятностью – и потому является ступенью между детерминированными и подлинно случайными явлениями. Все формы последних характерны отсутствием устойчивых частот, однако почти все обладают какими-то инвариантами и тем самым допускают теоретическое описание.

Таковые инварианты в основном именуются посредством терминов, взятых из ТВ, но это не должно вводить нас в заблуждение – они обычно относятся к другим разделам алеатики. Так, случайность в играх традиционно описывается с помощью смешанных стратегий, трактуемых как вероятностные векторы (наборы вероятностей); но их можно понимать и как физические векторы (наборы физических долей). Или: квази-гиперболы (описывающие распределение видов по родам, станков по мощности и т.п.) принято трактовать как плотности вероятностей, хотя на самом деле они суть физические доли.

Если исходной моделью случайного явления полагать бросание монеты, то разрушение стохастичности выступает как итог появления зависимости между бросками или их сериями. В простейших ситуациях зависимость удается описать в форме условных вероятностей, в чуть более сложных – в форме случайного процесса (мы рассматривали только простейший – марковскую цепь) и тем самым остаться в рамках ТВ, хотя стохастичность и разрушена. Простейшим примером является блуждание на прямой, имеющее много важных аналогий в практике.

Однако бросание монеты – не более чем модель. Со времен Бореля стало возможным рассматривать элементарную случайность иначе: как чтение очередного знака в двоичном (или любом ином) разложении иррационального числа. Она устроена интереснее: на ней видно, что стохастичность выполняется не всегда, а лишь «с вероятностью единица». Здесь яснее всего видно, что разрушение стохастичности есть нарушение симметрии, но сама дисимметризация – более общий феномен.

Если же случайность устроена сложнее, то процедура выявления условных или же переходных вероятностей может оказаться слишком долгой и дробной, и тут удобнее ввести понятие фрактала. Само фракталообразующее правило может быть простым или составным, детерминированным или нет. Словом, всегда важно понимать, с какой случайностью мы имеем дело, и ответ обычно далеко не прост.

Видимо, всякое взаимодействие между случайными актами можно представить как нарушение симметрии случайности, но не наоборот. В частности, случайность, описываемая распределением Коши, выглядит как чисто асимметричная, но не проявляет признаков зависимости между элементарными актами.

Можно, описывая случайность, отправляться с другой стороны – от детерминированных движений (процессов). Тогда элементарный случайный акт выступит как разрушение или запутывание траектории, как динамический хаос. Здесь достигнут наибольший прогресс в понимании случайности, причем получены предельные теоремы, показывающие, как рождается и устанавливается стохастичность.

Однако нам наиболее интересно то, что самая сложная случайность наблюдается на границе детерминированной и хаотической динамик. Если простая нестохастичность может быть хотя бы частично описана с помощью теории устойчивости по Леви, то в более сложных ситуациях остается лишь прямо подсчитывать частоты и делать качественные выводы относительно ограниченного числа шагов (испытаний). Выявляемая при этом динамика случайного процесса может оказаться достаточно простой и общей для различных ветвей процесса (п. 9-7), но совсем не видной из тех предельных теорем, которым подчиняются его отдельные ветви.

Встает естественный вопрос: как управлять случайными процессами? Если в простых ситуациях лучше всего пытаться влиять на вероятности элементарных актов и их взаимосвязь (что общеизвестно), то в более сложных открываются довольно неожиданные пути – например, в процессе размножения и гибели наиболее действенным средством для выживания оказывается не повышение вероятности выживания при элементарном акте размножения, а пропуск самого этого акта (п. 9-7.1). Такой способ управления прекрасно освоен живой природой: в катастрофических условиях прежде всего сокращается размножаемость – обстоятельство, прекрасно известное Мальтусу, но игнорируемое «мальтузианскими» теориями, в том числе дарвинизмом.

Что касается сознательного управления природными и искусственными объектами, то прежде всего надо понять, что случайный процесс их эволюции имеет собственные законы, совсем не похожие на «эволюцию» объектов статистической физики. Вне статистической физики обычен дефицит перемешивания, поэтому всевозможные эргодические идеи обычно заводят в тупик. В частности, ничего не дают теории «среднего человека» (среднего класса, среднего потребителя, среднего ученика и т.п.). Вместо средних величин приходится исследовать ценологические параметры (например, параметры квази-гипербол, пределы возможного изменения величин и т.п.).

Если говорить о техноценозах, то их следует проектировать как целое, но не как нечто детерминированное. Иными словами, объект типа завода надо проектировать в форме ясной, но не жесткой модели, которая должна конкретизироваться по ходу реализации (строительства, ввода в действия и эксплуатации) путем естественного вписывания объекта в свой ценоз. При этом надо осознавать, что случайность никогда совсем не исчезнет. В частности, от ценоза не надо ждать однозначно предсказуемого поведения. Всё это много лет подчеркивает Кудрин.

В отношении эволюции природы мы находимся еще дальше от возможностей реального управления ею, однако сама она настойчиво требует от нас срочно начать ею управлять. Случайные параметры, демонстрируемые природой, меняются столь быстро и нежелательно, что управлять ими так или иначе придется, и сперва опять-таки надо выяснить, со случайностями каких типов мы имеем дело.

Например, всем видно, что природных катастроф становится всё больше, а сами они – всё разрушительнее, но попытки оценить их средние значения (в том числе и вероятности) остаются неуспешными. Смешно и грустно смотреть, как маститый ученый с экрана телевизора лишь разводит руками и предлагает читать Пушкина – мол и прежде бывали страшные наводнения. Полагаю, что трудность прежде всего в нестохастичности самих процессов, а это начит, что нечего ждать статистически достоверных данных о новом характере катастроф. Понимая, что их, возможно, не появится никогда (как никогда не удастся по случайному блужданию, описанному в п. 0-1, установить, симметрична ли монета), надо отправляться от механизмов катастроф, выяснять, что изменилось в них и на что можно влиять.

В этом плане любопытна статья «Почему так часто происходят наводнения?». Исследуя колебания уровня Невы за 300 лет, авторы нашли, что налицо случайная величина, которую удобно моделировать степенным (точнее, гиперболическим) распределением. Как мы уже знаем, один и тот же материал можно описать разными распределениями (п. 7-2). Авторы пишут: «и гамма-распределение, и степенное распределение удовлетворительно соответствуют натурным данным. Однако вероятности катастрофических наводнений, вычисленные на основе этих распределений, существенно различаются» [Найденов, Кожевникова, 2003, с. 17]. Так, самое крупное (оно и описано Пушкиным) наводнение 1824 года почти невозможно согласно первому (его можно ожидать 1 раз в 20 тыс. лет), но вполне реально согласно второму (1 раз в 667 лет). Смысл ясен из приводимых ими графиков: если последовательность реализаций нормально распределенной случайной величины являет собою всем известный «белый шум», то для величины, распределенной гиперболически, график иной: это «почти белый шум» плюс довольно частые сильные всплески (рис. 19). Их силу (независимо от частоты, если она не мала исчезающе) и надо прогнозировать.

К сожалению, никакого анализа типов случайности в статье нет. Авторы просто констатируют, что формулы гидродинамической модели почему-то похожи на формулы невесть откуда взявшихся распределений случайных величин.

Давая рекомендации относительно круга решаемых вопросов и набора пригодных инструментов, алеатика не должна (как не должна и статистика) брать на себя решение самих проблем, если они относятся к другим наукам. Именно в данных рамках мне видится ее большое и притом близкое будущее.

## Список сокращений

АСТ – автомат со сравнивающей тактикой; ВИЕТ – Вопросы истории естествознания и техники (журнал); ВИНИТИ – Всесоюзный институт научной и технической информации; ВМН – В мире науки (русское издание журнала «Scientific American»); ВФ – Вопросы философии (журнал); ЗБЧ – закон больших чисел; ИМИ – Историко-математические исследования (продолжающееся издание); МК – Математика, кибернетика (ежемесячная серия брошюр издательства «Знание»); МС – математическая статистика; ПМ – познавательная модель; ТВ – теория вероятностей; ТВП – Теория вероятностей и ее применения (журнал); УФН – Успехи физических наук (журнал), ЦПТ – центральная предельная теорема; NAMS – Notices of the American Mathematical Society (журнал).

## Цитированные в книге работы Ю.В. Чайковского (в т.ч. с соавторами)


1971. Однородные коллективы сравнивающих автоматов и смежные задачи оптимизации. Автореферат дисс. канд. технич. наук. М., Ин-т электронных управляющих машин. 34 с.

1971а. О непрерывном процессе решения матричной игры // Доклады АН СССР, т. 199, N 5, с. 1026-1028.

1971б. On a continuous process of matrix game solution // Soviet Math. Dokl., vol. 12, N 4, c. 1245-1247

1972. Некоторые проблемы дарвинизма в свете возможностей машинного моделирования // Ж. общ. биол., т. 33, вып. 3, с. 347-358.

1976. Проблема наследования и генетический поиск (описание проблемы и простейший пример поиска) // Теоретич. и эксперимент. биофизика. Межвузовский сб., вып. 6. Калининград, с. 148-164.

1977. О случайности вообще и о случайных мутациях // Химия и жизнь, N 9, с. 66-75.

1977а. Выживание мутантного клона. Сообщ. 1. Качественный анализ конкуренции двух клонов // Генетика, т. 13, N 8, с. 1467-1477.

1977б. Выживание мутантного клона. Сообщ. 2. Мажорирующий анализ судьбы мутанта в полиморфной колонии // там же, с. 1478-1488.

1979. Выживание мутантного клона. Сообщ. 3. Катастрофический отбор. Недостаточность коэффициента отбора для оценки судьбы клона // Генетика, т. 15, N 10, с. 1809-1815. (Совместно с Г.Г. Маленковым.)

1981. Изумительная асимметрия // Знание – сила, N 2, с. 16-18, 48.

1982. О работах А.А. Любищева по общим проблемам биологии // *Любищев А.А.* Проблемы формы, систематики и эволюции организмов. М., Наука. с. 5-23. (Совместно с С.В. Мейеном.)

1983. Антонимический анализ случайности. Типы случайных явлений // МОИП. Доклады 1981 года, Общая биология. М., МГУ, с. 93-98.

1983а. Рождение дарвинизма // Теоретические проблемы современной биологии. Пущино, с. 94-103.

1985. Разнообразие и случайность // Методы научного познания и физика. М., Наука, с. 149-168.

1987. Нечеткие закономерности в планетной астрономии // Историко-астрон. исслед. М., Наука, вып. 19, с. 69-86.

1988. Экстремальность как междисциплинарная эвристика // Взаимодействие наук как фактор их развития. Новосибирск, Наука, с. 86-106

1989. История науки и обучение науке (на примере понятий «случайность» и «вероятность») // ВИЕТ, N 4, с. 92-101.

1990. Элементы эволюционной диатропики. М., Наука, 272 с.

1992. Познавательные модели, плюрализм и выживание // Путь. Международный философский журнал. № 1, с. 62-108.

1993. Идея равновозможности в физике и биологии // Физическое знание: его генезис и развитие. М., Наука, с. 104-129.

1994. Становление статистического мировоззрения // Метафизика и идеология в истории естествознания. М., Наука, с. 62-107.

1994а. Междисциплинарность современного эволюционизма // Концепция самоорганизации в исторической ретроспективе. М., Наука, с. 198-237.

1996. О познавательных моделях // Исследования по математической биологии. Сб. памяти А.Д. Базыкина. Пущино, с. 170-184.

1996а. Ступени случайности и эволюция // ВФ, N 9, с. 69-81.

1997. Эволюция. Часть 5. Новые представления об эволюции организмов // Биология (Прилож. к газете «Первое сентября»), N 43, с. 5-12.

1998. Стабилизирующий отбор, или святость веры // Теория эволюции: наука или идеология? Труды XXV Любищевских чтений. Ценологич. исследования, вып. 7. Абакан – Москва, с. 52-58.

1999. Эволюция. Ч. 7. Загадка начала жизни // Биология…, № 11, с. 5-12.

2000. Избегание предтеч // ВФ, N 10, с. 91-103.

2001. Что такое вероятность. Анализ понятия (от древности до Пуассона) // ИМИ, вып. 6 (41).

2001а. Причинность, сложность и разные формы случайности // Причинность и телеономизм в современной ест.-науч. парадигме. М., Наука.

(В подготовке). Рождение и смысл предельных теорем теории вероятностей // ИМИ.

**Литература**

*Августин*. О граде Божием. Киев, 1906. Том 1 (репринт: М., 1994).

*Акчурин И.А.* Единство естественнонаучного знания. М., 1974.

*Акчурин И.А*. Новые теоретико-категорные и топологические методы в основаниях физики // Методы научного познания и физика. М., 1985.

*Акчурин И.А.* Методологический принцип единства научного знания и современное понимание Бытия (по Хайдеггеру) // Проблема ценностного статуса науки на рубеже XXI века. СПб., 1999.

*Алексеев И.С.* Концепция дополнительности. М., 1978.

*Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. М., 1980. (МК)

*Алимов Ю.И., Кравцов Ю.А.* Является ли вероятность «нормальной» физической величиной? // УФН, 1992, N 7.

*Алкиной*. Учебник платоновской философии // Платон. Собр. соч. в 4-х томах, т. 4. М., 1994.

*Андреев А.В.* Роль физики в изменении смысла понятия «вероятность» // Исследования по истории физики и механики. 1998-1999. М., 2000.

*Арапов М.В.* Квантитативная лингвистика. М., 1988.

*Арапов М.В., Тер-Гаспарян Л.И., Херц М.М.* Сравнение частотных словарей // Научно-техн. информация. ВИНИТИ, сер. 2, 1978, N 4.

*Арно А., Николь П.* Логика, или искусство мыслить. М., 1991.

*Артур У.Б.* Механизмы положительной обратной связи в экономике // ВМН, 1990, N 4.

*Бак П., Чен К.* Самоорганизованная критичность // ВМН, 1991, N 3.

*Берг Л.С.* Труды по теории эволюции. Л., 1977.

*Бергсон А.* Творческая эволюция (1907). М., 1998.

*Беркович С.Я.* Клеточные автоматы как модель реальности: поиски новых представлений физических и информационных процессов. М., 1993.

*Бернулли Я.* О законе больших чисел. (С комментариями О.Б. Шейнина А.В. Прохорова и Ю.В.Прохорова.) М., 1986.

*Бирюков Б.В., Растригин Л.А., Казаневская В.В., Верстин И.С.* Случайность, случайный поиск и логика // Информационные материалы. Кибернетика. Вып. 5 (120). М., 1982.

*Богомолов А.С.* Античная философия. М., 1985.

*Борель Э.* Случай. М.-П., 1923.

*Борель Э., Дельтейль, Юрон Р.* Вероятности, ошибки. М., 1972.

*Боэций*. «Утешение философией» и другие трактаты. М., 1990.

*Бродель Ф.* Динамика капитализма. Смоленск, 1993.

*Бычков С.Н., Зайцев Е.А., Шашкин Л.О.* Диагональная процедура Кантора и теория множеств // ИМИ, Вторая серия, вып. 4 (39), 1999.

*Вавилов Н.И.* Закон гомологических рядов в наследственной изменчивости. Л., 1987.

*Варден Б. ван дер.* Математическая статистика. М., 1960.

*Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М., 1971.

*Виндельбанд В.* История древней философии. СПб., 1902.

*Вовк В.Г.* Закон повторного логарифма для случайных по Колмогорову, или хаотических последовательностей // ТВП, 1987, N 3.

*Гачок В.П.* Странные аттракторы в биосистемах. Киев, 1989.
*Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965.
*Генкель М.А.* Частотный словарь романа Д.Н. Мамина-Сибиряка «Приваловские миллионы». Пермь, 1974.
*Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М., 1961.
*Голдбергер Э.Л., Ригни Д.Л., Уэст Б.Дж.* Хаос и фракталы в физиологии человека // ВМН, 1990, N 4.
*Голубовский М.Д.* Эволюция представлений о наследственности // Эволюционная биология: история и теория. СПб., 1999.
*Гординг Л.* Философский диалог. Математика, жизнь и смерть // Алгебра и анализ, 2000, т. 12, вып. 5; 2001, вып. 3.
*Горькавый Н.Н., Фридман А.М.* Физика планетных колец. Небесная механика сплошной среды. М., 1994.
*Григорян А.А.* Теория вероятностей Р. фон Мизеса: История и философско-методологическое обоснование // ИМИ, вып. 3 (38). М., 1999.
*Гросберг А.Ю.* Неупорядоченные полимеры // УФН, 1997, N 2.
*Девис П.* Суперсила. М., 1989.
*Демидов С.С.* Презентизм и антикваризм в историко-математическом исследовании. // ВИЕТ, 1994, N 3.
*Дербин А.В., Бахланов С.В., Егоров А.И., Муратова В.Н.* Замечания к статье «О реализации дискретных состояний...» // УФН, 2000, N 2.
*Деркуенн К.* Обнаружение резко выделяющихся наблюдений до применения статистических методов // ТВП, 1992, N 2.
*Дорофеев Е.А*., *Доценко В.С.* Спиновые стёкла: новая термодинамика // Природа, 1994, N 12.
*Доценко В.С.* Физика спин-стекольного состояния // УФН, 1993, N 6.
*Дэвис Ф., Херш Р.* Идеальный математик // Знание – сила, 1993, N 3.
*Еськов К.Ю.* История Земли и жизни на ней. М., 2000.
Закон, необходимость, вероятность. Пер. с польск. М., 1967.
*Заславский Г.М*. Стохастичность динамических систем. М., 1984.
*Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. М., 1983.
*Золотарев В.М.* Устойчивые законы и их применения. М., 1984. (МК)
*Зусмановский А.Г.* Механизмы эволюционной изменчивости. Ульяновск, 1999.
*Иваницкий Г.Р., Медвединский А.Б., Деев А.А., Цыганов М.А.* От «демона Максвелла» к самоорганизации массопереноса в живых системах // УФН, 1998, т. 168, N 11.
*Иванова Вит.М*. Случайные числа и их применение. М., 1984.
*Иванова В.С., Баланкин А.С., Бунин И.Ж., Оксогоев А.А.* Синергетика и фракталы в материаловедении. М., 1994.
*Кайберг Г.* Вероятность и индуктивная логика. М., 1978.

*Кановей В.Г.* Нестандартная теория множеств в ?-языке // Математические заметки, 2001, том 70, вып. 1, июль.

*Кантор Г.* Труды по теории множеств. М., 1985.

*Карнап Р.* Философские основания физики. М., 1971.

*Катасонов В.Н.* Метафизическая математика XVII века. М., 1993.

*Кауфман С.А.* Антихаос и приспособление // ВМН, 1991, N 10.

*Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. М., 1963.

*Кац М.* Несколько вероятностных задач физики и математики. М., 1967.

*Кац М., Улам С.* Математика и логика. Ретроспектива и перспективы. М., 1971.

*Клайн М.* Математика. Утрата определенности. М., 1984.

*Климонтович Ю.Л.* Критерии относительной степени упорядоченности открытых систем // УФН, 1996, т. 166, N 11.

*Колмогоров А.Н.* Предисловие // *Феллер В*. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (дискретные распределения). М., 1952.

*Колмогоров А.Н.* Теория вероятностей // Математика, ее методы и значение. М., 1956. Т. 2.

*Колмогоров А.Н.* О таблицах случайных чисел (1963) // Семиотика и информатика, ВИНИТИ, вып. 18. М., 1982.

*Колмогоров А.Н.* Алгоритм, информация, сложность. М., 1991. (МК)

*Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. Третье издание / Послесловие: А.Н. Ширяев. М., 1998.

*Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В.* Введение в теорию вероятностей. М., 1982.

*Красилов В.А.* Роль случайности в эволюции // Эволюцион. исследования. Владивосток, 1972.

*Красилов В.А.* Повторное появление архаичной структуры у позднепермских семян // Палеонтол. ж., 1999, N 3.

*Криндач В.П.* Симметрия и вероятность // Принцип симметрии. Историко-методологические проблемы. М., 1978.

*Круглов В.М., Королев В.Ю.* Предельные теоремы для случайных сумм. М., 1990.

*Кудрин Б.И.* Введение в технетику. Томск, 1991.

*Кудрин Б.И.* Проблемы создания и управления ценозами искусственного происхождения // Кибернетические системы ценозов: синтез и управление. М., МОИП, 1991а.

*Кудрин Б.И.* Античность, символизм и технетика. М., 1995.

*Курно О.* Основы теории шансов и вероятностей (1843). М., 1970.

*Лакатос И.* Доказательства и опровержения. М., 1967.

*Лакатос И.* Фальсификация и методология научно-исследовательских программ. М., 1995.

*Ламперти Дж*. Вероятность. М., 1973.
*Леви П*. Стохастические процессы и броуновское движение. М., 1972.
*Леви-Брюль Л.* Сверхъестественное в первобытном мышлении. М., 1999.
*Лейбниц Г.В.* Сочинения в четырех томах. М., 1982.Т. 1; 1983. Т. 2.
*Литлвуд Дж.* Математическая смесь. М., 1962.
*Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика / Ред. перевода Б.В. Чириков. М., 1984.
*Лосский Н.О.* Бог и мировое зло. М., 1994.
*Лукреций*. О природе вещей. Т. 2. Статьи и комментарии. М., 1947.
*Лысенко В.И.* Метод наименьших квадратов в России XIX века // ИМИ, вып. 5 (40). М., 2000.
*Льюс В.Д., Райфа Х.* Игры и решения. М., 1961.
*Любищев А.А.* Письмо П.Г. Светлову от 26.11.1936 (копии как в СПб филиале Архива РАН, так и в Ульяновском краеведческом музее).
*Любищев А.А.* Проблемы формы, систематики и эволюции организмов. М., 1982.
*Майр Э.* Популяции, виды и эволюция. М., 1974.
*Майстров Л.Е.* Развитие понятия вероятности. М., 1980.
*Мамчур Е.А.* Остается ли автономия идеалом научного знания? // Проблема ценностного статуса науки на рубеже XXI века. СПб., 1999.
*Марков А.А.* (старший). Избр. труды. М., 1951.
*Марков А.А.* (младший), *Нагорный Н.М.* Теория алгорифмов. 2-е изд., исправ. и дополн. М., 1996.
*Марков В.А.* Феномен случайности. Методологический анализ. Рига, 1988.
*Мартин-Лёф П.* Очерки по конструктивной математике. М., 1975.
*Медведев Ф.А.* Ранняя история аксиомы выбора. М., 1982.
*Мейен С.В.* О соотношении номогенетического и тихогенетического аспектов эволюции // Ж. общ. биол., 1974, N 3.
*Мейен С.В.* Проблема редукционизма в биологии // Диалектика развития в природе и научном познании. Сб. Ин-та науч. информ. по обществ. наукам. М., 1978.
*Мейен С.В.* Принципы исторических реконструкций в биологии // Системность и эволюция. М., 1984.
*Менский М.Б.* Квантовая механика: новые эксперименты, новые приложения и новые формулировки старых вопросов // УФН, 2000, N 6.
*Мизес Р.* Вероятность и статистика. М. – Л., 1930.
*Милютин А.А.* Об автоматах с оптимальным целесообразным поведением в стационарной среде // Автоматика и телемеханика, 1965, N 26.
*Нагорный Н.М.* Вместо предисловия // *Марков А.А., Нагорный Н.М.*
*Налимов В.В.* Вероятностная модель языка. М., 1977.

*Налимов В.В.* Спонтанность сознания. Вероятностная теория смыслов и смысловая архитектоника личности. М., 1989.

О теории дисперсии. М., 1968.

*Овчинников Н.Ф.* Принципы теоретизации научного знания. М., 1996.

*Озима М.* Глобальная эволюция Земли. М., Мир, 1990.

*Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов. М., 1993.

*Паршин А.Н.* Размышления над теоремой Геделя // ИМИ, вып. 5 (40). М., 2000. (Сокращенный в части примечаний вариант: ВФ, 2000, N 6).

*Паршин А.Н.* Дополнительность и симметрия // ВФ, 2001, N 4.

*Пачоли Л.* Трактат о счетах и записях / Издал Ярослав В. Соколов. М., 1994.

*Петров В.М., Яблонский А.И.* Математика и социальные процессы (гиперболические распределения и их применение). М., 1980. (МК)

*Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М., 1957.

*Поппер К.* Логика и рост научного знания. М., 1983.

*Пригожин И.*, *Стенгерс И.* Время, хаос, квант. М., 1994.

*Пуанкаре А.* Теория вероятностей (1912). Ижевск, 1999.

*Пятницын Б.Н.* Философские проблемы вероятностных и статистических методов. М., 1976.

*Растригин Л.А.* Этот случайный, случайный, случайный мир. М., 1969.

*Реньи А.* Письма о вероятности. М., 1970.

*Розин В. М.* Типы и дискурсы научного мышления. М., 2000.

*Романовский Е.* Статистическое мировоззрение // Вестник статистики, 1922, N 1-4.

*Рыбников К.А.* История математики. М., 1994.

*Сачков Ю.В.* Научный метод: основы его структуры // Методы научн. познания и физика. М., 1985.

*Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статитстике. М., 1990.

*Секст Эмпирик.* Сочинения в двух томах. М., 1975, т.1; 1976, т.2.

*Селигмен Б.* Основные течения современной экономической мысли. М.,1968.

*Синай Я.Г.* Случайность неслучайного // Природа, 1981, N 3.

*Скороход А.В.* Вероятность. Основные понятия. Структура. Методы // ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления за период 1985-1989 гг.», т. 43. Теория вероятностей, 1. М., 1989.

*Соколов И.М.* Как измерить сложность? // УФН, 1990, N 1.

*Степанова А.С.* Философия древней Стои. СПб., 1995.

*Стоянов Й.* Контрпримеры в теории вероятностей. М., 1999.

Странные аттракторы. М., 1981.

*Тайлор Э.Б.* Первобытная культура. М., 1989.

*Тутубалин В.Н.* Рецензия на книгу T.Fine. // Новые книги за рубежом. Сер. А. 1974. No 5.

*Тутубалин В.Н.* Границы применимости (вероятностно-статистические методы и их возможности). М., 1977. (МК)

*Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. Учебное пособие. М., 1992.

*Тутубалин В.Н.* Вероятность, компьютеры и обработка результатов экспериментов // УФН, 1993, N 7.

*Уиттл П.* Вероятность. М., 1982.

*Урманцев Ю.А.* Номогенез о сходстве в живой природе // Природа, 1979, N 9.

*Успенский В.А.* Что такое нестандартный анализ? М., 1987.

*Успенский В.А.*, *Семенов А.Л.* Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М., 1987.

*Фейнман Р*. КЭД – странная теория вещества и света. М., 1988.

*Феллер В*. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1964.

*Феллер В*. То же, М., 1984. Т. 2.

Фрагменты ранних греческих философов. Ч. 1. М., 1989.

*Фуфаев В.В.* Ценологическое определение параметров... М., 2000.

*Хайтун С.Д.* Проблемы количественного анализа науки. М., 1989.

*Хайтун С.Д.* Место синергетики в структуре физического знания // Исследования по истории физики и механики. 1995-1997. М., 1999.

*Хакинг Я.* Представление и вмешательство. М., 1998.

*Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М., 1966.

*Хинчин А.Я.* Избранные труды по теории вероятностей. Издание ТВП. Т. 1. М., 1995.

*Холтон Дж.* Тематический анализ науки. М., 1981.

*Цейтен Г.Г.* История математики в XVI и XVII столетиях. М.-Л., 1938.

*Целлер Э.* Очерк истории греческой философии. СПб., 1996.

*Цетлин М.Л.* Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М., 1969.

Частотный словарь романа Л.Н. Толстого «Война и мир». Тула, 1978.

Частотный словарь русского языка. М., 1977.

*Чендов Б.* Определенность, неопределенность, модальности, вероятность – категории современного научного познания. София, 1974.

*Чендов Б.С.* Логические системы и моделирование неопределенности. Докторская дисс. М., 1994.

*Чирков Ю.* Дарвин в мире машин. М., 1999.

*Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. М., 1996.

*Шейнин О.Б.* Понятие случайности от Аристотеля до Пуанкаре. Препринт Института истории естествознания и техники. М., 1988.

*Шень А.* Частотный подход к определению понятия случайной последовательности // Семиотика и информатика. ВИНИТИ, 1982, вып. 18.

*Шень А.* Алгоритмическая сложность и случайность: недавние результаты // ТВП, 1992, N 1.

*Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс. М., 1960.

*Ширяев А.Н.* Вероятность. М., Наука, 1989.

*Ширяев А.Н.* Математическая теория вероятностей. Очерк истории становления // Колмогоров, 1998.

*Шметтерер Л.* Введение в математическую статистику. М., 1976.

*Шноль С.Э., Коломбет В.А., Пожарский Э.В., Зенченко Т.А., Зверева И.М., Конрадов А.А.* О реализации дискретных состояний в ходе флуктуаций в макроскопических процессах // УФН, 1998, N 10.

*Шпенглер О.* Закат Европы (1918). Новосибирск, 1993.

*Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. М. – Ижевск, 2001.

*Шрейдер Ю.А.*, *Шаров А.А*. Системы и модели. М., 1982.

*Эгертон Ф.* Развитие концепции баланса природы // Историко-биологич. исслед. Вып. 6. М., 1978.

*Юлина Н.С.* Философия Карла Поппера: мир предрасположенностей и активность самости // ВФ, 1995, N 10.

*Юнг К.-Г.* О психологии восточных религий и философий. М., 1994.

*Якимов А.Е.* Техноценозы-невидимки в свете синергетики. М., 2000.

*Якобс К*. Машины Тьюринга и случайные 0,1-последовательности. Машинно-порожденные 0,1-последовательности // Машины Тьюринга и рекурсивные функции. М., 1972.

*Adams W.J.* The life and times of the central limit theorem. N.Y., 1974.

*Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Fenstad J.E., Lindstrom T.* Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics. N.Y., 1986.

*Attali J.* Les trois mondes (1981). Pour une theorie de l'apres-crise. Paris, 1986.

*Bak P., Tang Ch., Wiesenfeld K*. Self-organized criticality // Physical Review A, 1988, vol. 38, N 1 (July).

*Bernstein P.L*. Against the gods: the remarkable story of risk. N.Y., 1996.

*Borel E*. Les probabilités denombrables et leurs applications arithmetiques // Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1909, t. 27. (Перепечатка: Borel E. Oeuvres, vol. 2. Paris, 1972.)

*Brakel J. van.* Some remarks on the prehistory of the concept of statistical probability // Archive for History of Exact Sciences. 1976. Vol. 16, N 2.

*Bunimovich L.A., Sinai Ya.G., Chernov N.I.* Statistical properties of 2-dimensional hiperbolic billiards // Russian Math. Surveys, 1991, N 1.

*Burlando B.* The fractal dimension of taxonomic systems // J. Theor. Biology, 1990, vol. 146, N 1.

*Byrne E.F.* Probability and opinion. A study in the medieval presuppositions of post-medieval theories of probability. Hague, 1968.

*Cantelli P., Feller W., Frechet M., Mises R., Steffensen J.F., Wald A.* Les fondaments du calcul des probabilites. Paris, 1939.

[*Cardano G.*] *Cardanus H.* Opera omnia. Vol. 1. Lugdunum [Lyon], 1663.

Chaos et déterminisme. / Sous la direction de A. Dahan Dalmedico. Éditions de Seuil, 1992.

*Cope E.D.* The primary factors of organic evolution. Chicago, 1896.

*Daston L.* Classical probability in the Enlightenment. Princeton, 1988.

*David F.N.* Games, gods and gambling. London, 1962.

*Devillers Ch., Gui Y.* Hasard des mutations // Dictionnaire du darwinisme et de l'évolution. Paris, 1996.

*Diels H.* Doxographi graeci. Berlin, 1879.

*Doob J.L.* The development of rigor in mathematical probability // Development of Mathematics 1900 – 1950. Basel – Boston – Berlin, 1994.

*Dubinsky F*. (Review.) Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images // NAMS, 1999, N 5.

*Durrett R.* (Review.) The Jungles of randomness: a mathematical Safari // NAMS, 1999, vol. 46, N 6.

Entwicklung der Warscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933. Einführungen und Texte. / Herausg. von I. Schneider. Darmstadt, 1988.

*Fine T.L.* Theories of probability. An examination of foundation. N.Y. – L., 1973.

*Fisher R.A.* Genetical theory of natural selection. Oxford, 1930.

*Gauss Ch.*. Méthode des moindres carrés. Trad. en fr. Paris, 1855.

*Gigerenzer G., Swijtink Z., Porter Th., Daston L., Beatty J., Kruger L.* The empire of chance. How probability changed science and everyday life. Cambridge, 1989.

*Goldreich O*. Pseudorandomness // NAMS, 1999, vol. 46, N 10.

*Gouraud Ch.* Histoire du calcul des probabilites depuis ses origines jusqu'a nos jours. Paris, 1848.

*Graunt J.* Natural and political observations made upon the bills of mortality (1662). Baltimore, 1939.

*Guthrie W.K.C.* A history of Greek philosophy. Vol. 2. The presocratics. Cambridge, 1965.

*Guthrie W.K.C.* A history of Greek philosophy. Vol. 5. The later Plato. Cambridge, 1975.

*Hacking I.* The emergence of probability. Cambridge, 1975.

*Hald A*. A history of probability and statistics and their applications before 1750. N.Y. etc., 1990.

*Jantsch E.* The self-organizing universe. Scientific and human implications of emerging paradigm of evolution. Oxford – N.Y., 1980.

*Kendall M.G.* The beginning of a probability calculus // Biometrica, 1956, vol. 43, N 1-2.

Kendall's advanced theory of statistics. Fifth edition. London, 1987. Vol. 1; 1991. Vol. 2.

*Kepler J.* Gesammte Werke. München, Bd 1, 1938.

*Kolmogorov A.N.* On tables of random numbers // Sankhia. The Indian Journal of Statistics, ser. A, 1963, N 4.

*Kropotkin P.* Mutual aid among animals. // Nineteenth Century, 1890, Sept., Nov. (есть рус. перевод, отд. книга).

*Kuki Sh*. Le problème de la contingence (1935). Tokyo, 1966.

*Lambert J.* Essai de taxéometrie ou sur la mesure de l'ordre // Nouveaux Memoires Ac. Roy. Sci. Bel.-Let.; Année 1770. Berlin, 1772.

*Lamblagen van M.* Von Mises' definition of random sequences reconsidered // J. Symbol. logic, 1987, vol. 52, N 3.

*Lamblagen van M.* Independence, randomness and the axiom of choice // J. Symbol. logic, 1992, vol. 57, p. 1274-1304.

*Laplace P.-S.* Théorie analytique des probabilités. Paris, 1812.

*Leibnitz G.W.* Essais de theodicée (1710). T. 2. Amsterdam, 1734.

*Liddell H.G., Scott R.* A greek-english lexicon. Oxford, 1940. Vol. 1, 2.

*Lyubich M.* The quadratic family as a qualitatively solvable model of chaos // NAMS, 2000, vol. 47, N 9.

*Mackie T.L.* Truth, probability and paradox. Oxford, 1973.

*Marbe K.* Grundfragen der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung und theoretischen Statistik. München – Berlin, 1934.

*Marshall A.* Principles of economics. London, 1890.

*Martin-Löf P.* The definition of random sequences // Information and Control, 1966, vol. 9, 602-619.

*Mellor D.H.* The matter of chance. Cambridge, 1971.

*Merriman M.* A list of wrighting relating to the method of least squares, with historical and critical notes // Transact. of Conneticut Acad. Arts Sci. New Haven, 1877, vol. 4, part 1.

Meyers Handlexikon. Leipzig, 1922.

*Ore O.* Cardano the gambling scolar. Princeton, 1953.

*Penrose R*. Shadows of the mind. Oxford – N.Y., 1994.

Perspectives on intuitionism. Special issue. Guest editor R. Tieszen // Philosophia Mathematica (Canada), 1998, vol. 6, N 2.

Philosophy of probability. Dodrecht, 1993.

*Poisson S.D.* Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile. Paris, 1837.

Les Prix Nobel 1987. Stockholm, 1988.

Recent advances in biophoton research and its applications. / Ed. by F.A. Popp, K.H. Li, Q. Gu. Singapore – London – HongKong, 1992.

*Ruelle D*. Hasard et chaos. Paris, 1991. (Есть русский перевод).

*Schweber S.* Darwin and the political economists: divergence of character. // J. of the History of Biology. 1980, N 2.

*Servien P.* Base physique et base mathématique de la theorie des probabilités vers une nouvelle forme de la théorie. Paris, 1942.

*Sheldrake R.* A new science of life. London, 1981.

*Sheynin O.B.* H. Poincare’s work on probability // Archive for History of Exact Sciences, 1991, vol. 42, N 2.

*Souter A.* A Glossary of later latin to 600 A.D. Oxford, 1949.

*Vakar N.P.* A word count of spoken Russian. The soviet usage. [Columbus], 1966.

*Venn J*. Logic of chance. An essay on the fondations and province of the theory of probability, with especial reference to its logical bearnings and its applications to moral and social science. 2th ed., rewritten. London, 1876.

*Williams C.B.* Patterns in the balance of nature, and the related problems in quantitative ecology. L. – N.Y., 1964.

*Willis J.C.* Age and area. Cambridge, 1922.

*Yakira E*. Cointrainté, necessité, choix. La métaphysique de la liberté chez Spinoza et chez Leibniz. Zurich, 1989.

*Young L.-S.* Developments in chaotic dynamics // NAMS, 1998, N 10.

*Yule G.U.* A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of Dr J.C. Willis // Philos. Transact. R.S. London, 1924. Ser.B, vol. 213.

*Zipf G.K.* Human behaviour and the principle of least effort. Cambridge (Mass.), 1949.

**Добавления** в список литературы.

1. В список работ автора:

2003. Иммунитет и эволюция: не впасть бы в другую крайность // Вестник РАН, N 3, с. 265-273.

2003а. Эволюция. Книга для изучающих и преподающих биологию. М., Центр системных исследований. 35 печ. листов (в печати).

2. В основной список литературы:

*Блюменфельд Л.А.* Решаемые и нерешаемые проблемы биологической физики. М., 2002.

*Клюге Н.Ю.* Современная систематика насекомых. СПб., 2000.

*Любищев А.А*. Наука и религия. СПб., 2000.

*Найденов В.И., Кожевникова И.А.* Почему так часто происходят наводнения? // Природа, 2003, N 9.

*Хренников А.Ю.* Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика. М., Физматлит, 2003.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1. ДОБАВЛЕНИЯ

*1. (К с. 52, после слов “генераторов случайности”:)*

В п. 2-2 мы говорили, что для Кардано равновозможные варианты мыслились как “все формы”, исчерпываемые за достаточно большое время. Очевидно, что речь шла не о самих бросаниях кости, а о всевозможных сериях данной длины. Если они при этом реализуются ровно один раз каждая, то тезис Кардано можно назвать *аксиомой исчерпания равновозможностей*. Именно эти две идеи — равновозможность исходов и их серий, взятых по одному разу — и составили исторически первый вариант “аксиомы случайности”, которая, никем не сформулированная, легла в основание ТВ. Легко видеть, что случайность не описывается данной аксиомой, а подменяется (вот в чем смысл реплик Бёрна, приведенных в п. 0-8). На ней через 150 лет после Кардано было построено первое доказательство ЗБЧ, данное Якобом Бернулли.

*2. (К стр. 62, после слов “принималась как исходный факт”:)*

Если же вникнуть в доказательство Колмогорова, то видно, что ТВ использована в нем по-существу и поэтому нет обещанного выявления “области применимости теории вероятностей”. (Для этого надо выйти за ее рамки, что будет сделано в гл. 4.) Нет его и в других известных мне работах по алгоритмической ТВ. Однако желание выявить данную область налицо, и уже из одного этого можно кое-что извлечь: ее выявление заявлено — скорее как философская проблема.

*3. (К с. 99, после слов “сделано именно так”:)*

С изложенной позиции сам ЗБЧ означает, что “дефект случайности” — редкое исключение. Формулируется это так: “Рассмотрим канторовское пространство $\boldsymbol{O}$ бесконечных последовательностей нулей и единиц. Для каждого конечного слова $x$ в алфавите $\{0,\ 1\}$ рассмотрим множество $\Gamma_x$ всех последовательностей, начинающихся на $x$. Определим меру $M$ на пространстве $\boldsymbol{O}$, положив $M(\Gamma_x) = 2^{-\,l(x)}$; где $l(x)$ — длина $x$. Так вот, мера $M$ множества всех тех последовательностей, для которых предел... относительной частоты не существует или отличен от 1/2, равна нулю” [Шень, 1982, с. 14]. Относительной частотой названа доля нулей в слове $x$.

Итак, ЗБЧ понят по Борелю (см. с. 92), причем монета рассматривается только симметричная (иначе вероятность предела, неравного 1/2, положительна), а изгиб монеты надо моделировать не уменьшением доли нулей в тексте, записанном в алфавите $\{0,\ 1\}$, но расширением алфавита, т.е. заменой двугранной кости на многогранную (см. с. 66). Тут же неявно сделано одно важное указание: отклонение от стандартной случайности (стохастичности) возможно как в сторону уменьшения хаотичности, так и в сторону ее увеличения. Ведь если предел частоты существует, но отличен от 1/2, значит монета (симметричная!) падает одной стороной чаще и, в предельном случае, падает всегда одной стороной — хаотичности нет. Если же предела не существует, ситуация иная: нет устойчивой частоты. Отметим, что в обоих случаях монета (или кость) как модель неудачна: в первом случае потому, что симметричная монета не может вести себя несимметрично в пределе, а во втором случае потому, что отсутствие предела означает неограниченно растущее число граней кости (см. с. 96). То есть нужны иные модели.

*4. (К с. 220, в конец главы:)*

Об этих “полигонах” можно прочесть в работах [Чайковский, 1997; 2003а, гл. 5]. Что можно, а чего нельзя сделать отбором случайных вариаций за данное время при данном числе особей? Противники дарвинизма уже почти 150 лет заявляют, что нет никаких фактов для веры в то, что сложные приобретения произведены отбором случайных вариаций. Дарвинизм традиционно отводит все возражения оппонентов ссылкой на необозримо громадное количество организмов, живших за время эволюции. Ссылка наивна: крупных организмов (слоны, киты, гигантские деревья) никогда не было много, размножаются они медленно, а эволюционируют быстро, подчас быстрее мелких. Приводимые данные об огромном количестве спермиев и семян просто не относятся к делу: проявляют свои качества не они, а организмы.

И вот для генов иммуноглобулинов некоторые реалии можно сосчитать: за данное время из данного многообразия генов выбирается ген, нужный для синтеза данного антитела. Случайны ли вариации в ходе иммуногенеза? Если бы механизм Тонегавы (п. 9-4.4) перебирал одну за другой все возможные комбинации фрагментов, то, как показывает расчет, он наработал бы в одном организме мыши за ее жизнь 3 млн различных антител. Но возможных антигенов — миллиарды, и нет никакой гарантии, что среди созданных были бы те самые антитела, какие в данное время нужны. Поэтому процесс идет иначе: выбирает одни варианты много чаще других, делает “болванку” нужного антитела и доводит ее до кондиции путем гипермутагенеза. Принцип этого процесса еще не вполне понятен, но уже ясно, что для понимания придется изменить взгляды на феномен случайности.

Так, у каждой мыши одновременно существуют всего около 10 тыс. типов антител. Именно с этого количества начинается поиск нужного варианта. Все стадии поиска биологи называют случайными, но случайность эта весьма неравномерна и ничуть не похожа на стандартные (изучаемые в ТВ) явления типа бросаний игральной кости. А именно, одни варианты возникают часто, другие редко, а третьи никогда. Налицо сложная *системная случайность*, и нетрудно понять, почему она тут необходима: стандартная случайность дает равные вероятности вариантов, т.е. в среднем те же результаты, что и последовательный перебор вариантов, а он был бы тут бесполезен: потребовалось бы в тысячи раз больше молекул, чем имеется.

В самом деле, у мыши одновременно имеется всего 50 млн экз. лимфоцитов, способных производить антитела, причем каждый синтезирует лишь один тип антител, а деление лимфоцита занимает более 5 часов. При *равномерном распределении* типов антител (максимум 3 млн, и то в конце жизни) по клеткам каждый тип будет представлен всего несколькими (менее 20) экземплярами. Даже если среди них уже есть нужный для иммунного ответа, то его клонирование не сможет поспеть за размножением инфицирующих бактерий (деление у которых занимает меньше часа). Природа избрала иную стратегию: исходно разнообразие антител, минимальное достаточное для начала поиска нужного варианта (10 тыс. вариантов); сам же *поиск включает случайную компоненту, но не является случайным перебором*. Как поиск устроен, пока неизвестно, однако мы знаем, что нужный вариант находится быстро, а значит не перебором. Подробнее см. [Чайковский 2003; 2003а].

## Приложение 3. ПОЯСНЕНИЕ

Книга была в печати, когда на моем докладе в Семинаре по истории математики Мехмата МГУ (рук. С.С. Демидов) выяснилось, что пп. 6-5 и 6-6 требуют пояснения. В таблице на с. 131 можно получить счетное множество {D} строк, если перейти к пределу по *n* сразу по строкам и столбцам: таково множество конструктивных чисел. Если длину каждой строки считать актуально бесконечной, то предел по *n* (по числу строк) даст множество вещественных чисел {R}. Если же устремить к пределу число *n* строк (при актуально бесконечных длинах строк), выбрасывая на каждом шагу треть всех строк, как это показано на рис. 7, то получится "канторово совершенное множество" {E}. Оно несчетно, но имеет нулевую меру по Лебегу, тогда как множество {R} — единичную [Шилов, 1960]. В теории Кантора мощности множеств {R} и {E} признаны равными, но это неприемлемо для ТВ, поскольку означает, что почти достоверное и почти невозможное события признаны эквивалентными.

Этот дефект теории Кантора — одно из следствий царящего в ней "принципа неразборчивости", противного принципу системности [Шрейдер, Шаров, 1982, гл. 1]. Алеатике нужна более "разборчивая" теория множеств. Как доказал в 1966 г. логик Пол Коэн (США), теорию множеств допустимо строить, полагая наличие множества промежуточной (между {D} и {R}) мощности (литературу см. там же, с. 136).

Таким как раз видится {E}: оно несчетно, но имеет нулевую меру. Естественно ввести цепочку мощностей $C_D<C_E<C_R<C_{NS}$, где {NS} — множество нестандартных чисел отрезка [0, 1] (звеньев может быть больше четырех), и получить тем самым язык для описания различных форм случайности. Множества {D} и {R} традиционно используются для описания не самой случайности, а ее заменителей — это раскладки Бернулли (пп. 3-2 и 3-3) и их непрерывный аналог (теоретикомерная ТВ, п. 3-3.1). Между ними лежит область нуль-мерных множеств, предназначенных для описания разных случайностей, в том числе фрактальной, которая еще потребует анализа, но о которой уже сейчас можно утверждать, что она не всегда описывается вероятностью. Наконец, нестандартные числа дают поле для развертывания частотной теории вероятностей. Эта теория призвана объяснить, в каком смысле можно говорить о взаимной дополнительности вероятности-частоты и вероятности-меры и почему частота не сходится точно к вероятности, а образует в пределе малый аттрактор.

Вне данной цепочки остаются случайности, для которых не удается ввести меры по Лебегу — см.. пп. 7-6 и 7-7. В последнем из них тоже фигурирует нестандартный анализ, и неясно, насколько велика его роль в понимании случайности без вероятности в общем плане. Предлагая математикам решить, всегда ли случайность без вероятности связана с нуль-мерностью или неизмеримостью по Лебегу, замечу для них, что системная случайность (в том числе квази-гиперболическая) по самой своей сути образуется теми нежесткими связями случайных величин, какие реализуют более сложно устроенные меры в пространстве элементарных событий, чем те, какие можно задать условными вероятностями. Дробную размерность фракталов естественно задает мера по Хаусдорфу, но ее алеатический смысл мне пока неясен.

## УКАЗАТЕЛЬ ИМЁН

Соавторы, адресаты и персонажи указаны лишь при необходимости


Августин, (*святой*) 36-38, 233-234, 243
Автоматия (*миф.*) 28, 230
Адамс (Adams W.) 72
Адлер Ю.П. 138
Акчурин И.А. 129
Алексеев И.С. 167
Алексеев К.И. 12
Алимов Ю.И. 12, 25, 61, 63, 78, 84, 115, 141, 157, 224
- ортогональность 70
Алкиной 30-31
Амстердамский (Amsterdamski S.) 40, 50
Анаксагор 29-31
Андреев А.В. 41
Арапов М.В. 22, 199, 206-207
Арно (Arnauld A.) 42
Аристотель 28, 32, 34, 41, 47, 165, 201, 221, 232, 235
Аркесилай 33
Артур (Arthur W.B.) 112, 194
Архилох 28-29
Аттали (Attali J.) 101, 104, 112, 114, 194
Бак (Bak P.) 146-147, 211
Бальби (Balbi A.) 193
Бейль (Bayle P.) 48
Берг Л.С. 16, 37, 201, 219
Бергсон (Bergson H.) 106, 163, 184, 219
Бердяев Н.А. 233
Беркович С.Я. 192
Бёрн (Byrne E.F.) 23, 26, 38
Бернулли (Bernoulli D.) 72
Бернулли (Bernoulli J.) 47, 49-51, 54, 60, 66-72, 75, 79, 81-82, 84, 89, , 142, 186, 227, 254, 271
- отсутствие случ-сти 70
- уравнивание неравно-возможных 52, 66
Бирюков Б.В. 81, 97
Богомолов А.С. 33, 37
Бор (Bohr N.) 93, 121, 166, 168, 192, 200
Борель (Borel E.) 26, 59, 71, 84, 86, 90-92, 98, 110, 136, 160, 239, 254
Боэций 37-38
Бракель (Brakel J. van) 19, 38, 44
Бродель (Braudel F.) 112
Булгаков М.А. 153, 210, 233
Буридан (Bouridan J.) 47
Бычков С.Н. 131-132
Бэр (Baer K.E. von) 201
Вакар (Vakar N.P.) 206
Вавилов Н.И. 165, 173, 187, 197-198
Вавилов С.И. 36
Вальд (Wald A.) 60, 134
Варден (Van der Waerden B.L.) 75, 94
Варшавский В.И. 196
Венн (Venn J.) 54-55, 61-63, 120
Вересаев В. 28
Вернадский В.И. 16
Вигнер (Wigner E.P.) 122, 123, 164
Виллис (Willis J.C.) 146, 152, 199-200, 209, 220
Виндельбанд (Windelband W.) 36, 41
Винни-Пух (*лит.*) 230
Витали (Vitali G.) 160-161
Вовк В.Г. 98
Галилей (Galilei G.) 238
Гатри (Guthrie W.K.C.) 32, 34-35

Гаусс (Gauss C.F.) 72, 79,
93, 116, 144-145, 148, 170
Гачок В.П. 87
Гейзенберг (Heisenberg W.) 166
Гейтинг (Heyting A.)
134-135, 140
Генкель М.А. 204, 206
Генниг (Hennig W.)
197-198
Гераклит 29
Гетэкер 45
Гёдель (Goedel K.) 132,
178-179, 227
Гильберт (Gilbert W.) 99
Гильберт (Hilbert D.) 61
Гиппократ 31-32
Гнеденко Б.В. 25, 50, 142,
144-145, 148
Гоббс (Hobbes T.) 84, 86
Голдбергер (Goldberger A.I.) 196
Голубовский М.Д. 202
Гольдрайх (Goldreich O.) 140-141
Гомер 50-51, 139
Гординг 232-233, 235
Горькавый Н.Н. 189
Граунт (Graunt J.) 42, 53-54,
65, 95, 158
Григорян А.А. 56
Гросберг А.Ю. 191
Гулд (Gould S.) 43-44
Гурвич А.Г. 190
Гуро (Gouraud Ch..) 46-47, 53
Гюйгенс (Huygens Ch.) 53-54,
65, 68
Данилов Ю.А. 126
Дарвин (Darwin Ch.) 16, 23, 37,
54, 109, 204, 213-214, 218, 229
Дастон (Daston L.) 68, 107
Дедекинд (Dedekind R.) 130-131
Декарт (Descartes R.) 99, 100, 129
Демидов С.С. 12, 79, 271
Демокрит 30, 34
Дербин А.В. 186-187,
268
Дёблин (Döblin W.)
144-145, 148-149
Дильс (Diels H.) 29, 31
Долло (Dollo L.) 197
Достоевский Ф.М. 229
Доценко В.С. 191
Дуади (Douady A.) 127
Дуб (Doob J.L.) 23, 84, 237
Дюбю (Dubucs J.-P.) 78-79
Дэвис (Davis P.) 23
Евдокс 129
Еськов К.Ю. 17, 219
Жюлиа (Julia G.) 123-124,
126, 232, 262
Зайцев Е.А. 133
Заславский Г.М. 87, 128,
142, 190, 223
Золотарев В.М. 80, 144-
145, 200, 264
Зусмановский А.Г. 202
Иаков и Исав (*миф.*) 37
Иваницкий Г.Р. 180
Иванов Серг. Алр. 12, 157
Иванова Вера С. 125, 129
Иванова Вит. М. 138, 140
Йоссельсон (Josselson H.H.) 206
Кайберг (Kyburg H.E.) 16, 55, 61,
64, 78, 121, 222, 226
Кановей В.Г. 124
Кант (Kant I.) 121, 221
Кантор (Cantor G.) 124,
131-137, 160, 271, 261
Кардано (Cardano J.) 40, 42-46,
64-65, 76-77, 102, 198, 234, 254
- картина мира 99
- подход к ЗБЧ 43, 71
Карнап (Carnap R.) 63, 79
Катасонов В.Н. 21, 61
Кауфман (Kauffman S.A.)
179, 230, 234

Кац (Kac M.) 67-68, 70,
82, 92, 110, 188
Кеплер (Kepler J.) 166, 237-238
Кириллова Н.П. 12
Клайн (Kline M.) 132, 133, 159
Клеобул 28
Климонтович Ю.Л. 180
Клюге Н.Ю. 187, 197-198, 200
Кобляков А.А. 106
Колмогоров А.Н. 26-27,
46, 53, 58, 60, 63-65, 77,
82, 138, 141-142, 207
- блуждание случ. 150
- вероятность как мера 20
- - - тенденция 56-57
- вторая аксиом-ка 62, 79
- и границы ТВ 21-23, 254
- о Мизесе 24, 56, 61
- о независимости 70, 119
- о случайности 18, 225
- о частоте 226, 238
- первая аксиом-ка 59, 79
- стохастичность по К. 21
Коп (Cope E.D.) 165, 187, 197
Коперник (Copernicus N.) 237
Коши (Cauchy A.L.) 94-95, 118,
142-146, 149, 151, 176, 240
Коэн (Cohen P.J.) 271
Красилов В.А. 11, 197, 219
Криндач В.П. 81
Кромби (Crombie A.C.) 102
Кронквист (Cronquist A.) 17
Кропоткин П.А. 114, 194, 214
Круглов В.М. 154
Кудрин Б.И. 12, 83, 100,
104, 151-153, 186, 193,
207-212, 220, 241
Куки (Kuki Sh.) 20, 27, 87
Кун (Kuhn T.) 23, 60, 101, 144
Курно (Cournot A.) 46, 48
Кюри (Curie P.) 224
Лагранж (Lagrange J.L.) 117
Лазарь (*миф.*) 197
Лакатош, Лакатос (Lakatos I.)
101-102, 236
Ламберт (Lambert J.) 22, 59, 62-63,
89-92, 97, 128, 130, 138, 171, 206
Ламблаген (Lamblagen M. van)
57, 122, 134-135
Ламперти (Lamperti A.)
144-145, 149
Лаплас (Laplace P.-S.) 51,
71-73, 76, 78, 111, 123
- пр-п индифферентности 55
Лебег (Lebesgue H.L.) ,  86,
91, 136, 271
Леви (Levy P.P.) 14, 80,
118, 144-145, 150, 153, 240
Леви-Брюль (Levy-Bruhl L.)
28, 165
Левкипп 29
Лейбниц (Leibnitz G.W.)
26, 47-49, 65, 78, 111,
129, 158, 165, 233
- простаферезис 48, 74
Лексис (Lexis W.) 95-96,
141, 143, 216
Линдеберг (Lindeberg J.) 75, 94
Линней (Linne C) 197, 221
Липпманн 93
Лихтенберг (Lichtenberg A.) 89, 128
Литтлвуд (Littlewood J.E.) 21, 119
Лоренц (Lorenz E.N.) 88,
127-128, 188, 260
Лосев А.Ф. 32
Лосский Н.О. 233
Лукреций 36, 170
Лысенко В.И. 116
Льюс (Luce R.D.) 155, 175, 183
Любищев А.А. 17, 102,
165, 184, 198
- дополнит-сть 167-168
- (им)пробабилизм и
пропенсивность 228-230

Ляпунов А.М. 113, 183
Майр (Mayr E.) 220
Майстров Л.Е. 18, 40, 46, 53, 58
Максвелл (Maxwell J. Clerk) 54, 101, 109
Маленков Г.Г. 218, 242
Мальтус (Malthus T.R.) 109, 193, 240
Мамин-Сибиряк Д.Н. 204
Мамчур Е.А. 99, 193
Мандельброт (Mandelbrot B.B.) 99, 124-127, 130, 144, 146, 205, 232, 262
- ситэ 130, 137, 171, 223, 238
Марбе (Marbe K.) 188
Марков А.А. (мл.) 134-135
Марков А.А. (стар.) 80
Марков В.А. 18, 93, 97, 152
Мартин-Лёф (Martin-Löf P.) 62, 97, 132-138, 162, 222, 225
Маршалл (Marshall A.) 194
Медведев Ф.А. 133, 159
Меллор (Mellor D.H.) 57, 162
Мейен С.В. 121, 184, 219, 242
Менский М.Б. 228
Мизес (Mises R.) 24, 55-57, 60-63, 69, 71, 84, 93, 115-116, 120, 122, 134, 138, 141
- как мыслитель 224
Милютин А.А. 181, 267
Муавр (Moivre A.) 71-72, 141
Нагорный Н.М. 222, 237
Найденов В.И. 241, 260
Налимов В.В. 103, 110, 163, 207, 230-232, 235
Нейман (Neumann J. von) 182-183, 232-233
Нётер (Noether A.E.) 224
Нигидий Фигул 36, 89
Николай Кузанский 39, 48
Ньютон (Newton I.) 68, 71, 129, 192
Овчинников Н.Ф. 106-107, 169-171, 230
Огурцов А.П. 100-101, 105
Озима (Ozima M.) 152, 266
Опарин А.И. 230
Оре (Ore O.) 43-45, 64
Пайтген (Peitgen H.-O.) 123, 125-126
Парацельс 99
Парето (Pareto V.) 146, 193
Паршин А.Н. 12, 120-121, 132, 178-179, 227
- дополнительность точки и линии 135, 222
Паскаль (Pascal B.) 24, 40, 45-47, 52
Пачоли (Paciolo L.) 40, 46, 108, 234
Пенроуз (Penrose R.) 228
Перикл (*лит.*) 28
Петрова Г.А. 12
Пирсон (Pearson Ch.) 58-59
Пифагор 64, 223
Платон 30, 32-35, 100, 105, 121, 221, 222
Плутарх 28
Пойа (Polya G.) 82, 144, 227
Полибий 28
Попп (Popp F.-A.) 190-191
Поппер (Popper K.R.) 39, 48, 100, 106, 162, 166, 191, 234
Порфирий 37
Пригожин (Prigogine I.) 17, 174
Псевдо-Плутарх 31
Пуанкаре (Poincare H.) 36, 59, 73, 79, 81, 85-87, 99, 115, 143, 169, 259
- о норм. распредел-и 93, 116, 146, 158, 171
Пуассон (Poisson S.D.) 76-79, 157, 185
Пушкин А.С. 43, 241
Пятницын Б.Н. 29, 63, 78, 115, 172

Растригин Л.А. 87
Рейхенбах (Reichenbach H.) 63
Реньи (Renyi A.) 27, 50, 52
Ришар (Richard J.) 131-132
Ришар де Фурниваль 38
Розин В.М. 102
Романовский Е. 110
Рюэль (Ruelle D.) 99, 115
Сачков Ю.В. 102
Светлов П.Г. 228-230
Секей 40, 83
Секст Эмпирик 32
Селигмен (Seligman B.B.) 194
Сервьен (Servien P.) 21, 26
Симпсон (Simpson T.)72-74
Синай Я.Г. 78, 115, 220
Скитович В.П. 80
Скороход А.В. 24, 121, 122, 221
Славяновский (Slawianowski J.) 50
Смит (Smith A.) 112, 194
Соколов И.М. 19, 123
Сократ 32
Софокл 28, 35
Спенсер (Spencer H.) 109
Степанова А.С. 221
Стоянов Й. 75, 94, 143, 145
Тайлор (Tylor E.) 29, 45
Тарталья (Tartaglia N.) 40
Толстой Л.Н. 204, 206, 229
Тонегава (Tonegawa S.) 203, 255
Трёльстра (Troelstra A.S.) 134
Тутубалин В.Н. 25, 55, 58-59,
73, 75, 99, 141, 225
- о Колмогорове 23, 236
-о Мизесе 122
- о Файне 226
- о частотах 83, 238
Тэйлор (Taylor J.) 45
Тюхэ (*миф.*) 28-29, 230
Уайльд (Wilde O.) 233
Уиттл (Whittle P.) 53, 57,
58, 93, 149
- экстрем. св-во 116
Урманцев Ю.А. 187
Успенский В.А. 57, 60-62,
97, 133, 161
- пр-п множ-сти 105, 135
Файн (Fine T.L.) 63, 226, 235, 237
Фату (Fatou P.J.L.) 123, 126
Фейнман (Feynman R.F.) 192
Феллер (Feller W.) 58-59,
75, 76, 80, 83, 94-96, 144
- блуждание случ. 150, 223
- о Мизесе 56
- о философии ТВ 25, 111, 188
- распределение можно
подогнать 146, 210
Фишер (Fisher R.A.) 155,
157, 214-216, 229
Флоренский П.А. 135
Фома Аквинский 38-39, 48
Фреге (Frege G.) 221
Фреше (Frechet M.R.) 80
Фуфаев В.В. 152, 212-213, 225, 266
Хайдеггер (Heidegger M.) 99
Хайтун С.Д. 100, 117, 125,
143, 145, 148, 225
Хакинг (Hacking I.) 43, 46-48, 52,
78, 101
Хальд (Hald A.) 43, 46, 54, 68
Харрис (Harris T.E.) 96, 129, 263
Хаусдорф (Hausdorf F.) 271
Хинчин А.Я. 69, 75, 85,
143-144
Холтон (Holton G.) 101
Хольцмарк (Holtsmark J.) 146, 176
Хренников А.Ю. 12
Цейтен (Zeuthen H.G.) 115
Целлер (Zeller E.) 33, 41
Цермело (Zermelo E.) 159
Цетлин М.Л. 179-180
Ципф (Zipf G.K.) 146, 148, 207
Цицерон 35-36
Чайковский Т.Ю. 12

Чайковский Ю.В. 11, 26, 42-43, 67, 72, 100, 105, 107, 109, 127, 151, 195, 214, 228
- апории случайности 17
- генетич. поиск и квант селекции 178, 201, 254-255
- диатропика 164
- имман. случ-ть 137, 170
- мажорир. и ориентац. модели 155-156, 177, 215
- об избегании предтеч 46
- о решении игры 177, 183
- о рыноч. идее 112, 195
- о сравнит. методе 223
- о стабилиз. отборе 219
- о тенденциях 57
- случайность в планетной астрономии 20, 189
- типы сл. явл. 165-169
- тройная симметрия 92
- устойчивость частот и экстрем. св-во случ-ти 117
Чебышев П.Л. 18, 60, 72
Чендов Б. 19, 60, 81, 171, 184
Чёрч (Church A.) 60, 62, 134
Чириков Б.В. 89, 128
Чирков Ю.Г. 208
Чистяков В.П. 83-84
Шателье Ле (Le Chatelier H.L.) 194-195
Швебер (Schweber S.) 214
Шейнин О.Б. 20, 141-142, 165, 169
Шелдрейк (Sheldrake R.) 188, 220, 230, 234
Шень А. 19, 27, 60, 62, 98, 138, 254
Шилов Г.Е. 90, 160, 271
Широков Ф.В. 13
Ширяев А.Н. 53, 60, 62, 75, 236
Шмальгаузен И.И. 219
Шметтерер (Schmetterer I.) 60, 73, 75, 143, 258
Шноль С.Э. 156-157, 175, 185-188
Шпенглер (Spengler O.) 18, 120
Шрёдер (Schroeder M.) 87, 124, 138, 140, 147, 193, 205
Шрейдер Ю.А. 12, 21, 199, 271
Эврипид 35
Эгертон (Egerton F.) 108
Эмпедокл 29, 31, 204
Эпикур 35-36, 170
Юл (Yule G.U.) 148, 152, 199-200
Юлина Н.С. 162-164
Юнг (Jung K.G.) 105
Юнг (Young L.S.) 90, 188, 235
Яблонский А.И. 119, 141
Якимов А.Е. 149, 211
Якира (Yakira E.) 158-159, 165
Якобс (Jakobs K.) 136-137
Якубанис Г. 29
Янус (*миф.*) 78
Янч (Jantsch E.) 163-164
Albeverio S. 61
Bernstein P.L. 107
Burlando B. 200
Bunimovich L.A. 90
Cantelli P. 25, 60
David F.N. 67
Devillers Ch. 17
Dubinsky F. 134
Durrett R. 147
Gigerenzer G. 16, 20, 78, 110
Kendall M.G. 38, 82, 115
Liddell H.G. 28-29
Lyubich M. 124
Mackie T.L. 162
Merriman M.A. 116
Souter A. 108
Williams C.B. 152, 199

## УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ

Указаны страницы, где термины введены или обсуждаются


аксиома равновозможности 49, 67, 81
аксиома эквивалентности 118
алеатика 19
вероятность как мера, частота и тенденция 56-60
- логическая 11, 63
квази-гиперболические распределения 151-152, 212-213
мероно-такс. несоотв. 184
(не)устойчивость по
- Граунту 53
- Леви 145
- Лексису 96
- Ляпунову 113
- Фуфаеву 212
- частот 20, 92, 117
симметрия 44, 63, 66, 93
- релизационная 81
- тройная 92, 142
случайность 16, 18-19
- без вероятности 12, 141, 271
- как фактор эволюции 217
- организующая 179
- по Аристотелю 29, 38, 41
- по Вигнеру 123
- по Кеплеру 166
- по Колмогорову 62, 140
- по Ламберту 59
стохастичность 21, 82, 88
ценоз 9, 207
эволюция и случ-ть 214, 217


## УКАЗАТЕЛЬ ССЫЛОК НА РИСУНКИ


1 — 73; 2 — 73, 95, 143; 3 — 74, 94; 4 — 86; 5 — 88-89; 6 — 117; 7 — 124, 271; 8, 9, 10 — 126; 11 — 129, 156; 12 — 145-146, 150; 13 — 152, 209, 220; 14 — 180-181, 201; 15 — 186; 16 — 218; 17 — 220; 18 — 223; 19 — 241; обложка — 14, 150

# ПЕРЕЧЕНЬ

*выпусков серии «Ценологические исследования»*
*Редактор серии проф. Б.И.Кудрин*

*Математическое* описание ценозов и закономерности технетики. Философия и становление технетики. Вып. 1. Доклады Первой Международной конференции (Новомосковск Тульской обл., 24–26 января 1996 г.) и вып. 2. Философия и становление технетики. Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. докт. филос. наук. – Абакан: Центр системных исследований, 1996. – 452 с.

*Становление* философии техники: техническая реальность и технетика. Материалы конференции (Москва, 23–24 января 1997 г.). Вып. 3. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 1997. – 248 с.

*Гнатюк В.И.* Моделирование и оптимизация в электроснабжении войск. Вып. 4. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 1997. – 216 с.

*Онтология* и гносеология технической реальности. Материалы Третьей научной конференции (новгород Великий, 21–23 января 1998 г.). Вып. 5. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 1998. – 252 с.

*Кудрин А.И.* Очерки полевого учёта. Вып. 6. «Ценологические исследования».– М.: Центр системных исследований, 1997. – 216 с.

*Теория эволюции*: наука или идеология? Труды XXV Любищевских чтений. Вып. 7. «Ценологические исследования». – М.: Московское общество испытателей природы – Центр системных исследований, 1998. – 320 с.

*Техническая реальность* в XXI веке. Материалы IV Конференции по философии техники и технетике (Омск, 20–22 января 1999 г.). Вып. 8. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 1999. – 256с.

*Гнатюк В.И.* Оптимальное построение техноценозов. Теория и практика. Вып. 9. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 1999. – 272 с.

*Фуфаев В.В.* Ценологическое влияние на электропотребление предприятия. Вып. 10. «Ценологические исследования». – Абакан: Центр системных исследований, 1999. – 124 с.

*Крылов Ю.К., Кудрин Б.И.* Целочисленное аппроксимирование ранговых распределений и идентификация техноценозов. Вып. 11. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 1999. – 80 с.

*Трансцендентность* и трансцендентальность техноценозов и практика Н-моделирования (будущее инженерии). Материалы V Международной научной конференции по философии техники и технетике (Калининград, 26–28 января 2000 г.). Вып. 12. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 2000. – 320 с.

*Кудрин Б.И., Фуфаев В.В.* Статистические таблицы временных рядов Н-распределения. Справочник. Т. 1. Электрооборудование. Вып. 13. «Ценологические исследования». – Абакан: Центр системных исследований, 1999. – 400 с.

*Чирков Ю.Г.* Дарвин в мире машин. Вып. 14. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 1999. – 272 с.

*Ваганов А.Г.* Миф. Технология. Наука. Вып. 15. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 2000. – 180 с.

*Техноценоз* как наличное бытие и наука о технической реальности. Материалы к «Круглому столу» конференции «Онтология и гносеология технической реальности» (Новгород Великий, 21–23 января 1998 г.). Вып. 16. «Ценологические исследования». – Абакан: Центр системных исследований, 1998. – 180 с.

*Кудрин Б.И., Фуфаев В.В.* Статистические таблицы временных рядов Н-распределения. Справочник. Т. 2. Электропотребление. Вып. 17. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 1999. – 160 с.

*Чайковский Ю.В.* О природе случайности. Монография. Вып. 18. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований – Институт истории естествознания и техники РАН, 2001. – 272 с. 2-е изд., испр. и доп. – 2004. 280 с.

*Философские* основания технетики. I. Православие и современная техническая реальность. II. Онтология технической реальности и понятийное сопровождение ценологического мировоззрения. III. Математический аппарат структурного описания ценозов и гиперболические Н-ограничения. Материалы VI Международной научной конференции по философии техники и технетике (Москва, 24–26 января 2001 г.). Вып. 19. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 2001. – 628 с.

*Кудрин Б.И.* Прав ли проф. В.Строев. На пути ценологических исследований зажжён красный свет. Вып. 20. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 2002. – 212 с.

*Технетика и семиотика*. Материалы VII Международной и VIII научных конференций по философии техники и технетике (Москва, 24–26 января 2002 г.; Санкт-Петербург, 23–24 января 2003 г.). Вып. 21. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 2003. – 268 с.

*Чайковский Ю.В.* Эволюция. Монография. Вып. 22. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований – Институт истории естествознания и техники РАН, 2003. 472 с.

*Любищев* и проблемы формы, эволюции и систематики организмов. Труды XXX Любищевских чтений. Москва, апрель 2002. Вып. 23. «Ценологические исследования». – М.: Московское общество испытателей природы – Центр системных исследований, 2003. 188 с.

*Кудрин Б.И.* Организация, построение и управление электрическим хозяйством промышленных предприятий на основе теории больших систем. Дисс…. докт. техн. наук по спец. 05.14.06 – Электрические системы и управление ими. Вып. 24. «Ценологические исследования». – Томск: Том. политех. ин-т, 1976. – М.: Центр системных исследований. 2002. – 368 с.

*Кудрин Б.И.* Техногенная самоорганизация. Для технариев электрики и философов. Материалы к конференциям 2004 г. Вып.25. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 2004 – 248 с.

*Сводная* библиография по технетике. К 70-летию со дня рождения проф. Б. И. Кудрина. Составители В. В. Фуфаев, В. И. Гнатюк, Г. А. Петрова. Вып. 26. «Ценологические исследования». – М.: Центр системных исследований, 2004. (в печати)

*Чайковский Ю.В.* О природе случайности. Монография. 2-е изд., испр. и доп. Вып. 27. – М.: Центр системных исследований – Институт истории естествознания и техники РАН. 2004. – 280 с.

Чайковский Юрий Викторович
О ПРИРОДЕ СЛУЧАЙНОСТИ

Серия «Ценологические исследования». Вып. 18
Второе издание,исправленное и дополненное
*Редактор серии Б.И.Кудрин*
Ответственный за выпуск *Петрова Г.А.*
------------------------------------

Подписано к печати 17 ноября 2003 г.    Заказ 033
Отпечатано в типографии «КСИ», тел./факс (812) 540-64-39, e-mail: oooksi@ksi.spb.ru
Формат 60x84 1/16. Печ. л 18. Тираж 300 экз. Цена договорная

# Приложение 2. РИСУНКИ

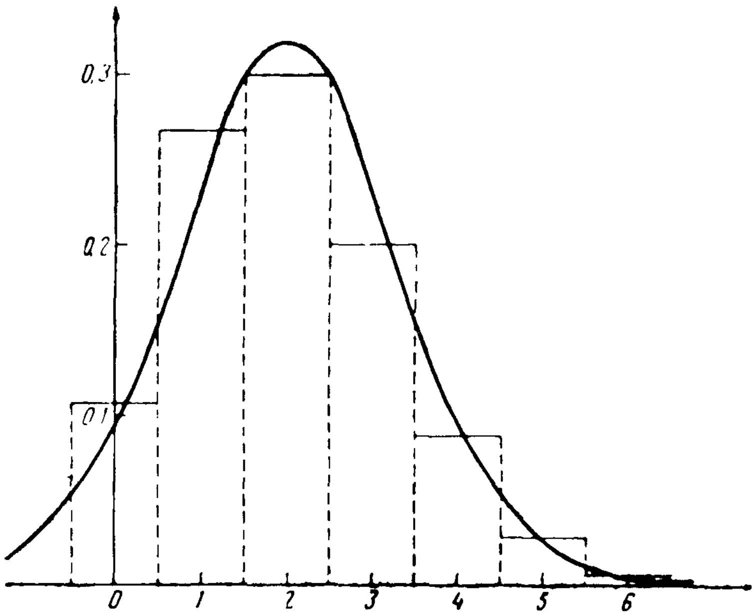



**Рис. 1.** Биномиальное распределение, описывающее частоты возможных исходов падения изогнутой монеты, падающей на одну сторону с вероятность 1/5, при десяти испытаниях. Как видим, даже при столь малом числе испытаний ступенчатая плотность хорошо аппроксимируется гауссоидой [Феллер, 1964, с. 187]

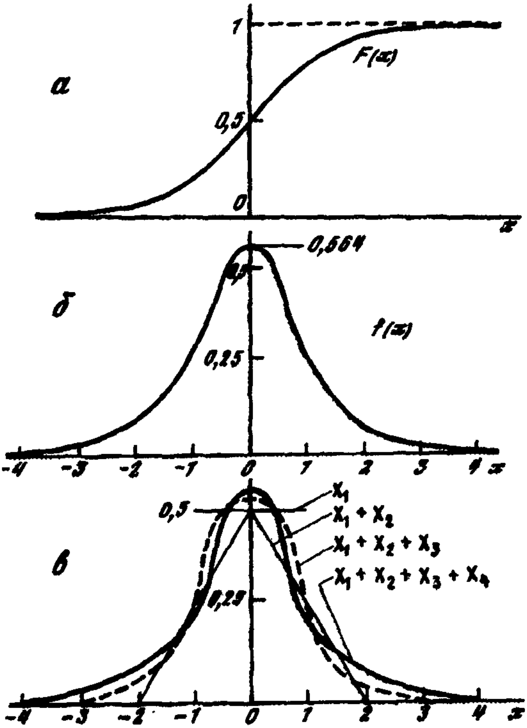



Рис. 2. Пример хорошей сходимости к нормальному распределению. Нормальное (гауссово) распределение (а), его плотность (б) и аппроксимация плотности с помощью суммы независимых равномерно распределенных на отрезке [-1, 1] величин. Уже сумма трех слагаемых похожа на гауссоиду (чем и пользуются на практике, измеряя искомую величину три раза), а сумма четырех слагаемых почти неотличима в своей области определения (она определена на отрезке [-4, 4]) от гауссоиды

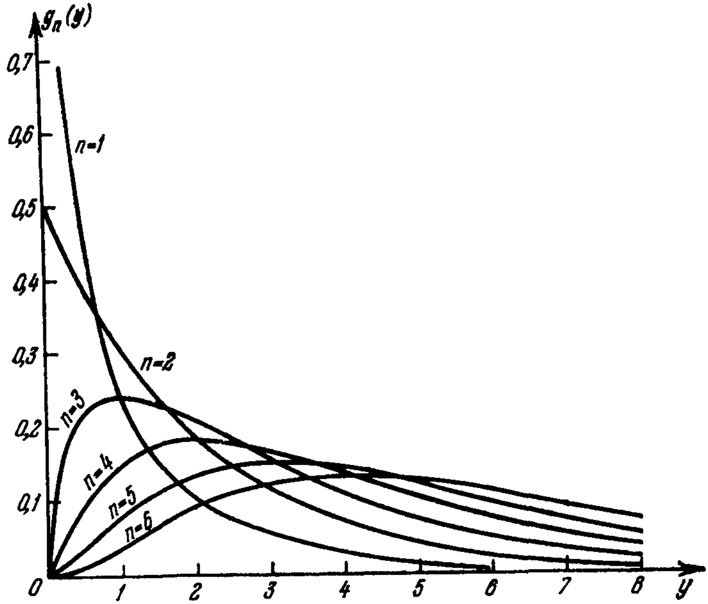



Рис. 3. Пример плохой сходимости к нормальному распределению: сумма шести слагаемых лишь очень приблизительно похожа на деформированную гауссоиду [Шметтерер, 1976, с. 93].

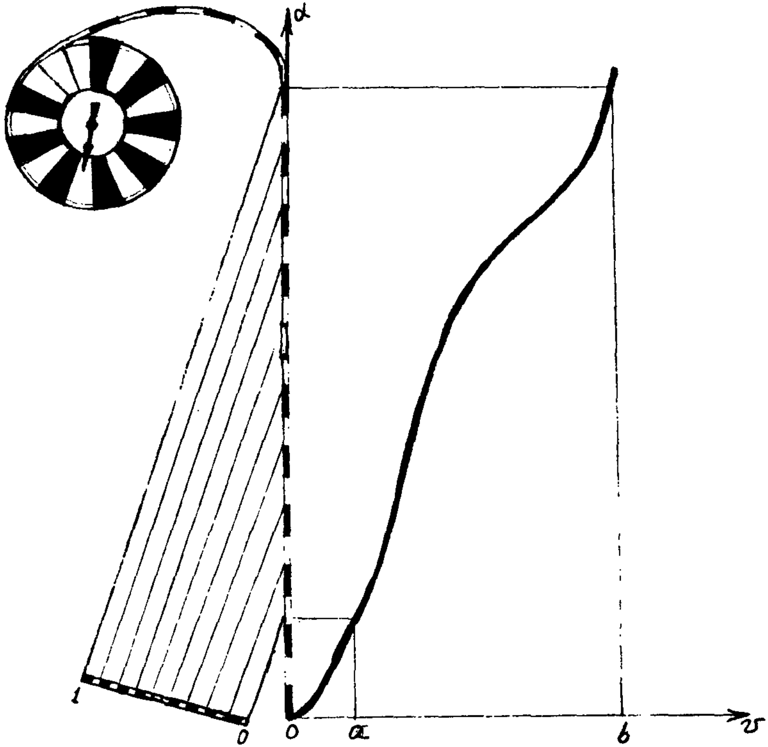
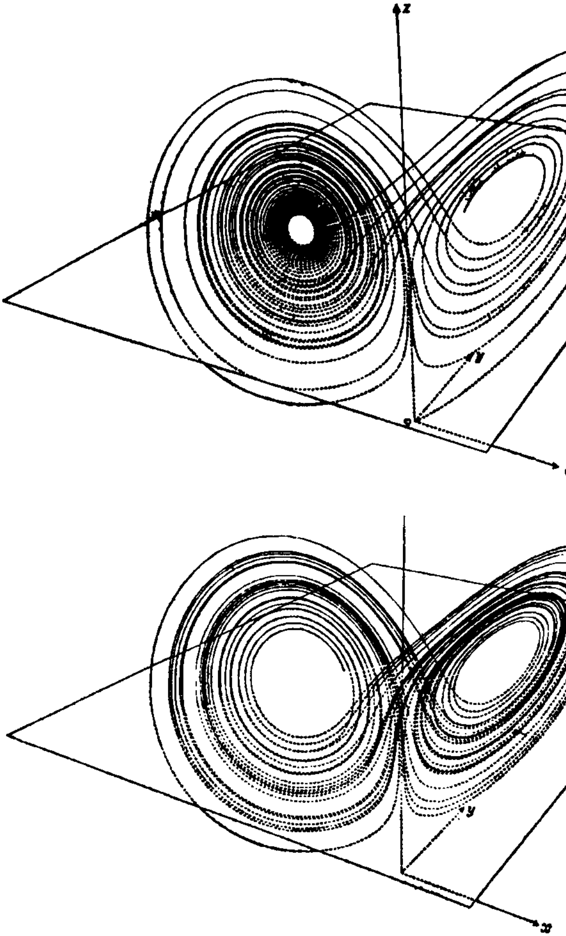



Рис. 4. Рулетка Пуанкаре. Вероятность стрелке остановиться над белым сектором равна доле белых секторов и не зависит (вшироких допущениях) от характера движения стрелки




$$\dot{x} = -10x + 10y$$
$$\dot{y} = 28x - y - xz$$
$$\dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy$$

Рис. 5. «Бабочка Лоренца»: а - поначалу движение хаотично, но еще не стохастично (переходы между правым и левым аттракторами редки); б - движение приближается к стохастическому (переходы между аттракторами моделируют процедуру независимых бросаний монеты)

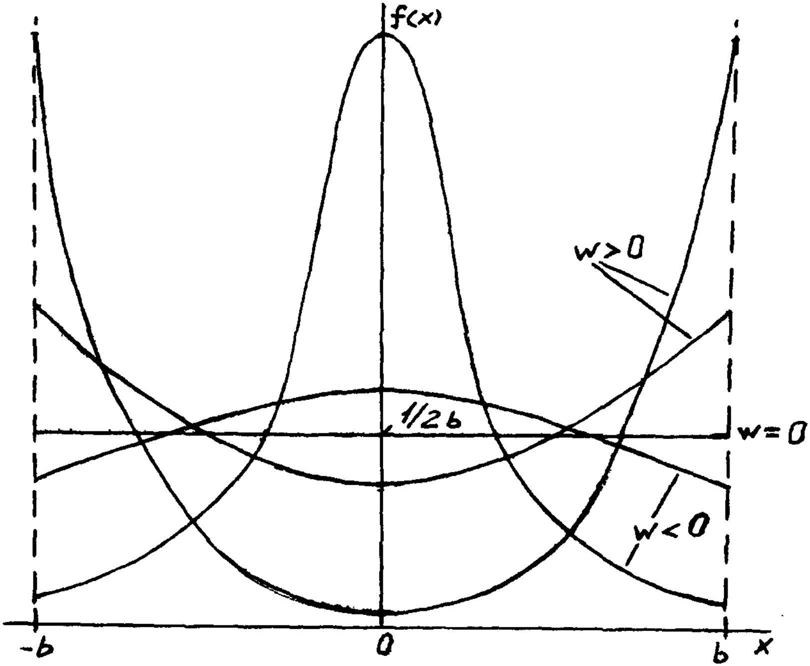



Рис. 6. Формы экстремальных плотностей случайной величины в зависимости от заданного уровня ее дисперсии.

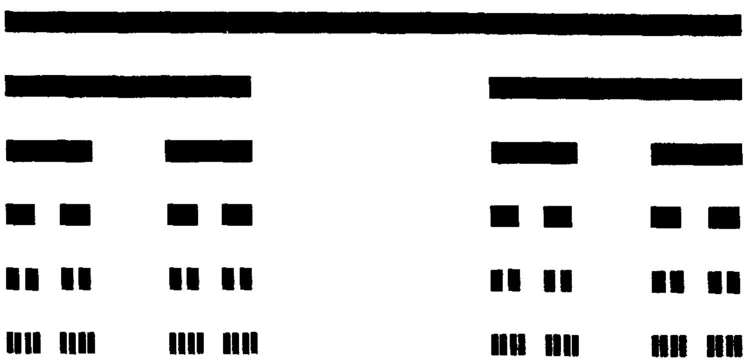


Рис. 7. Множество Кантора.

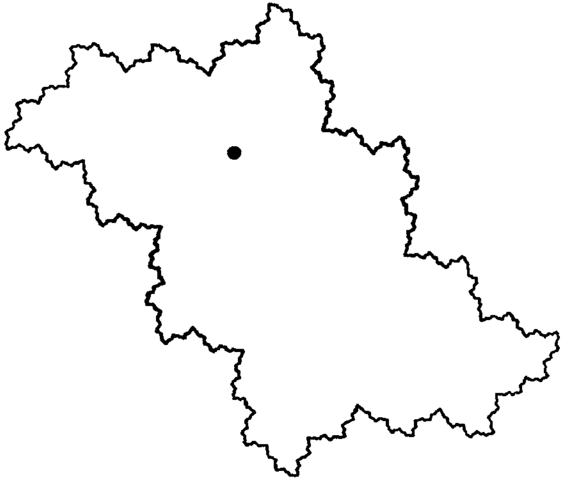


Рис. 8. Фрактально деформированная окружность (простейшее множество Жюлиа).

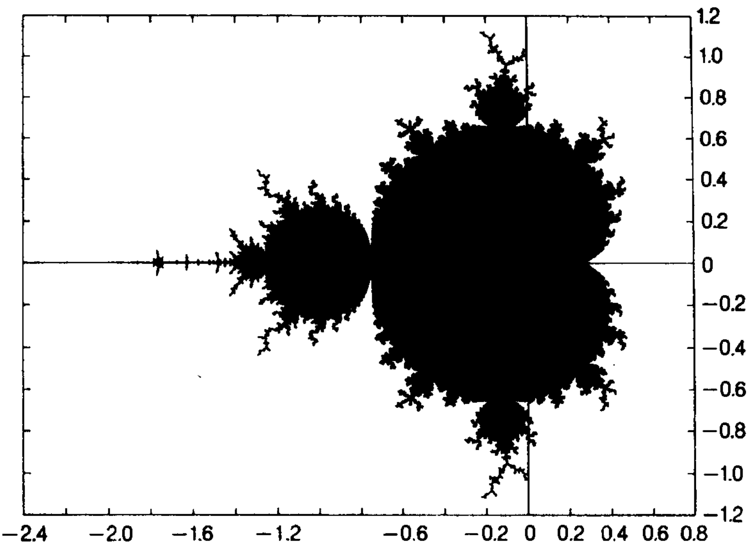



Рис. 9. Множество Мандельброта. Каждой его внутренней точке соответствует множество Жюлиа типа рис. 8.

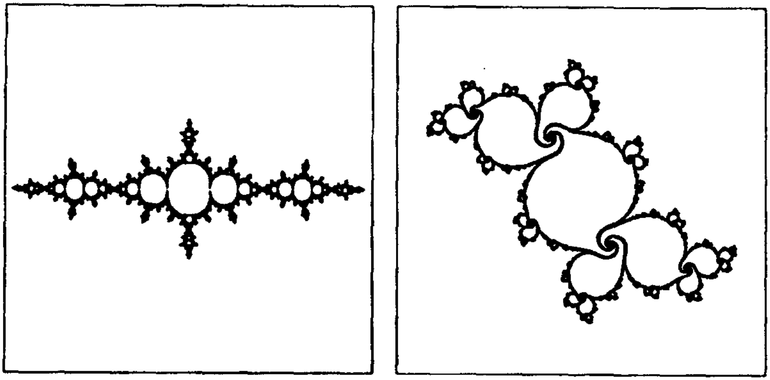


Рис. 10. Примеры множеств Жюлиа, соответствующих разным граничным точкам множества Мандельброта.

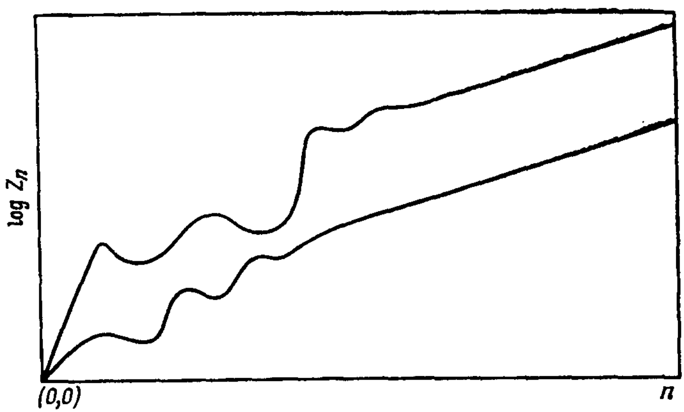



Рис. 11. Две реализации динамики численности Z надкритического клона. Хаотическая динамика сменяется на регулярную, но память о случайных различиях первых поколений остается [Харрис, 1966, с. 27].

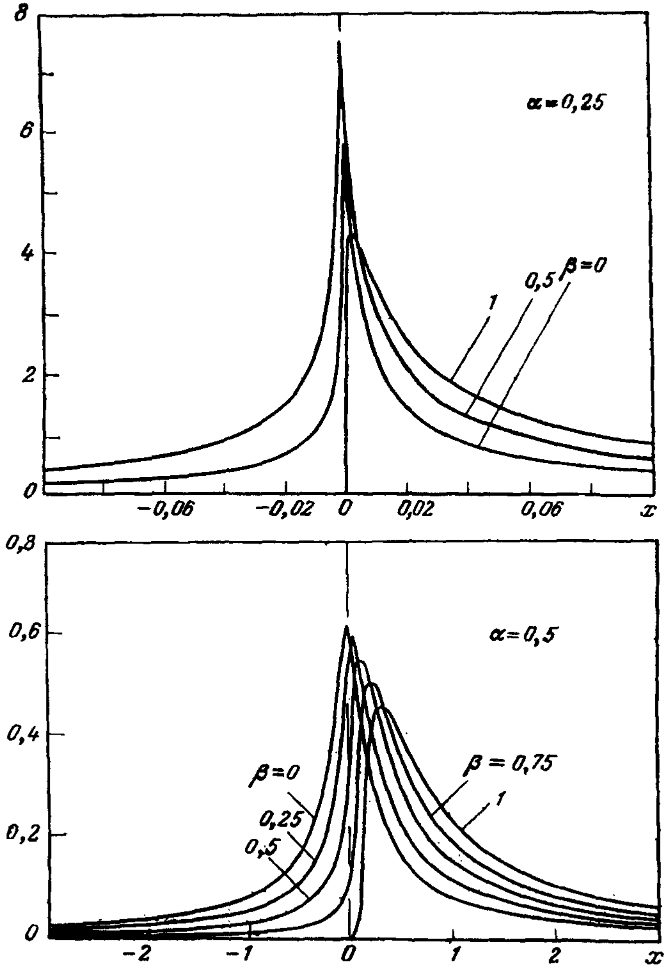
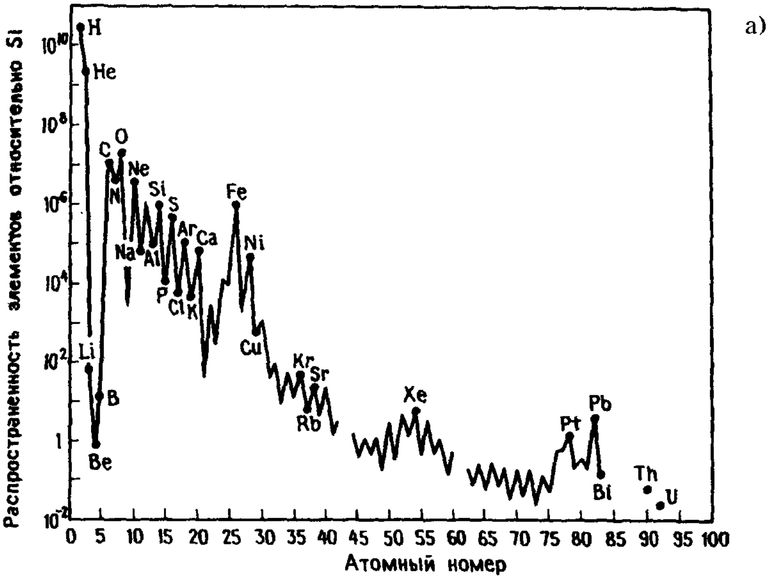
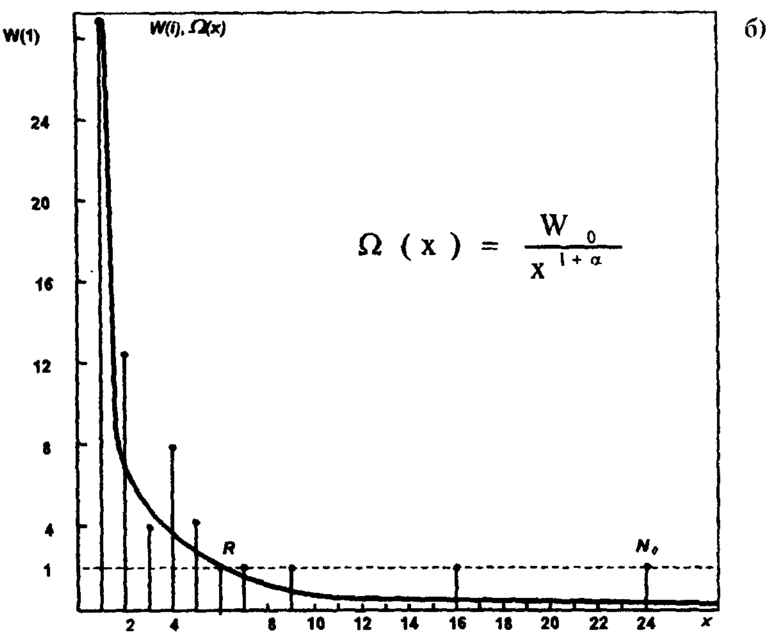



Рис. 12. Несколько плотностей устойчивых распределений [Золотарев, 1983, с. 174]. С ростом α кривые приближаются по форме гауссоиде, с ростом β они становятся менее симметричными.



а)
Распространенность элементов относительно Si
Атомный номер
H
He
Li
Be
B
C
N
O
Ne
Na
Al
Si
P
S
Cl
Ar
K
Ca
Fe
Ni
Cu
Kr
Sr
Rb
Xe
Pt
Pb
Bi
Th
U

б)
W(1)
W(i), Ω(x)
R
$N_0$
x
$$\Omega(x) = \frac{W_0}{x^{1+\alpha}}$$

в)

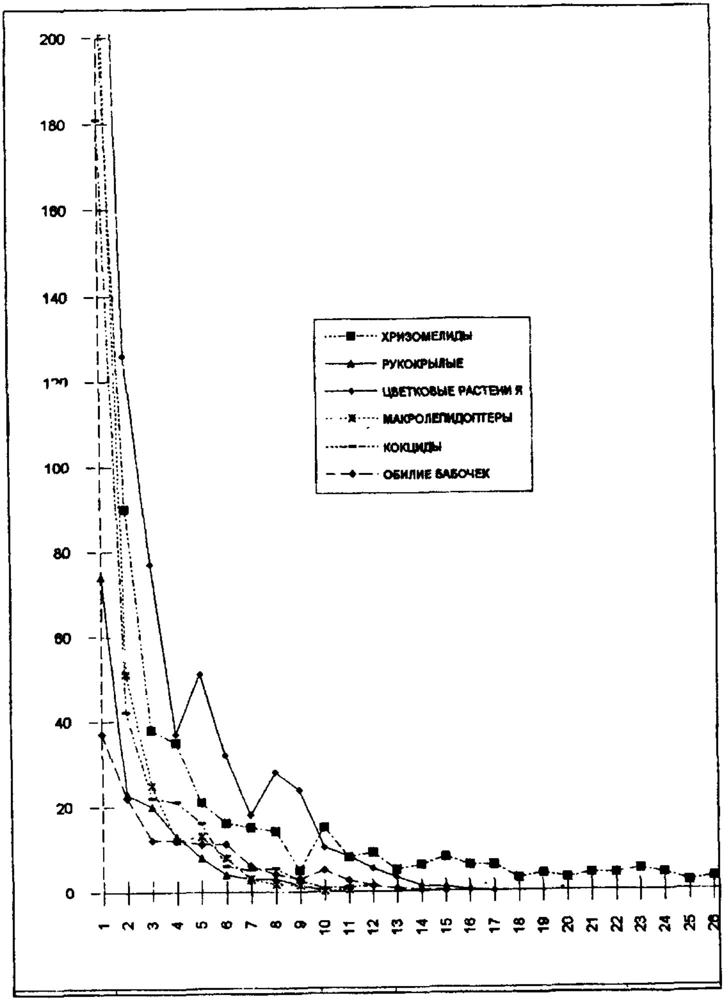



**Рис. 13.** Квази-гиперболы без сглаживания; а - распространенность химических элементов в солнечной системе [Озима, 1990, с. 15]; б - распределение электродвигателей крупного завода по мощности [Фуфаев, 2000, с. 44] (с добавлением сглаженной гиперболы); в - распределение видов по родам и по численности (обилию) по данным [Williams, 1964] и, для рукокрылых, по «Словарю названий животных».

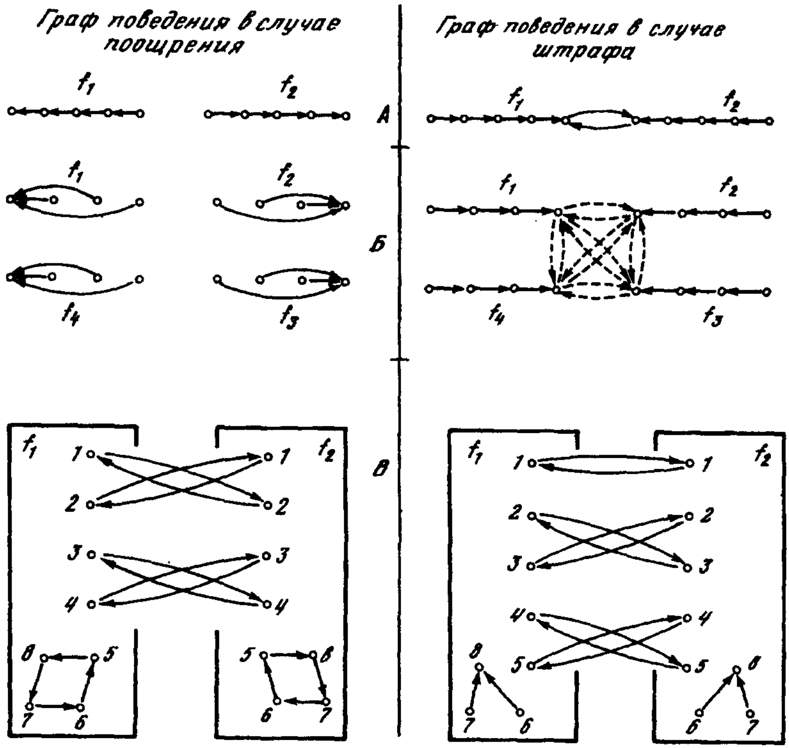



Рис. 14. Разумноинерционные автоматы; а - автомат с линейной тактикой; б - автомат, моделирующий инерционный точковый мутагенез; в - автомат Милютина [Чайковский, 1990, с. 94].

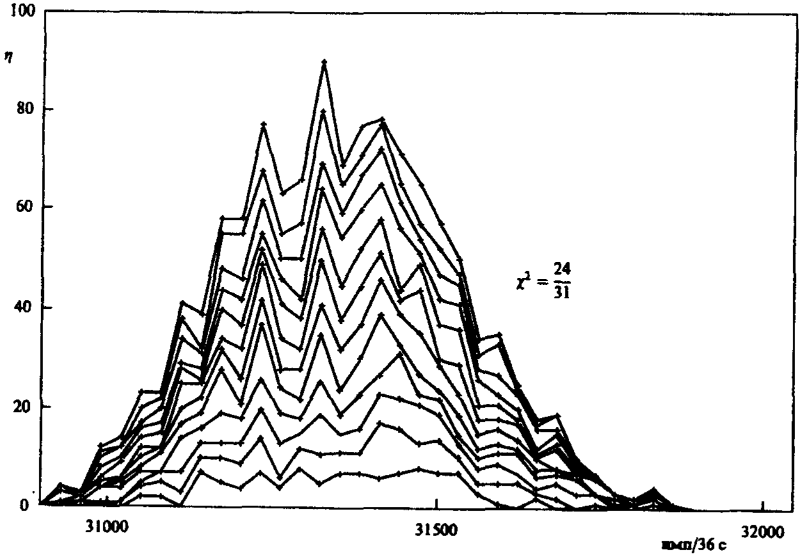



Рис. 15. Феномен «статистической инерции» в тонкой структуре плотности пуассонова распределения (радиоактивный распад), подтвержденный в опыте, поставленном с намерением опровергнуть сообщение о наличии регулярной тонкой структуры [Дербин и др., 2000]. Научная добросовестность авторов может служить образцом.

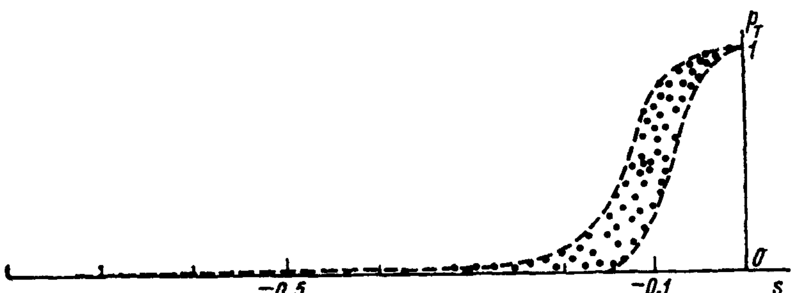



Рис. 16. Динамика мажорирующей модели катастрофического отбора [Маленков, Чайковский, 1979]. Видно, что монотонная зависимость вероятности выживания от селективной ценности имеет место лишь в грубом приближении.

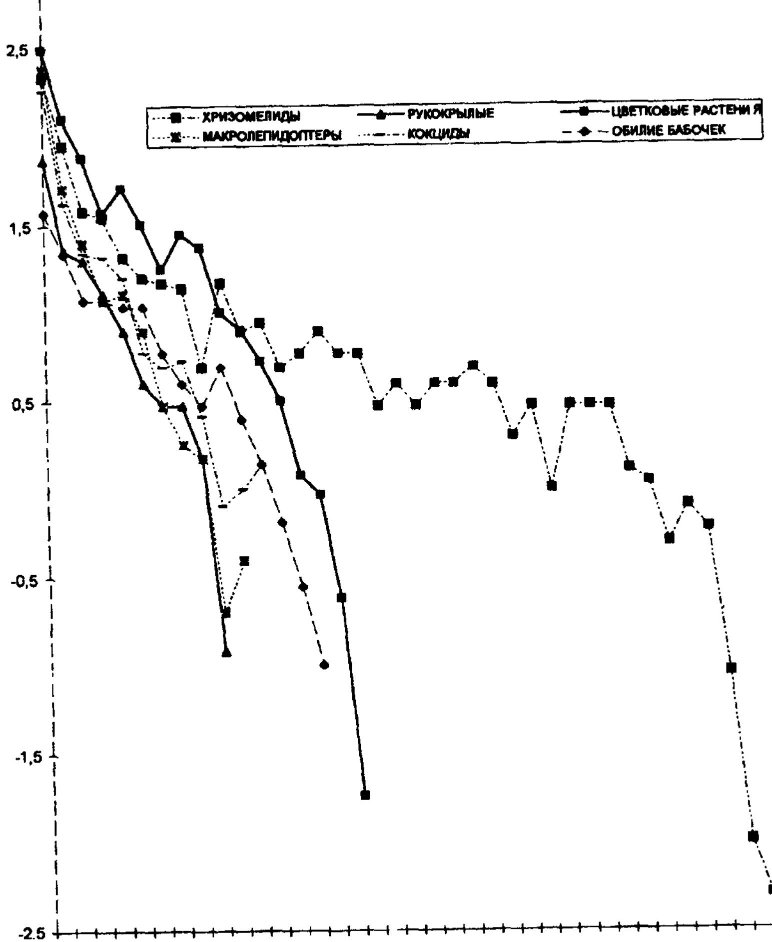



Рис. 17. Квази-гиперболы без сглаживания в полулогарифмическом масштабе (те же, что на рис. 13в). Видно, что аппроксимация их прямыми необоснованна.

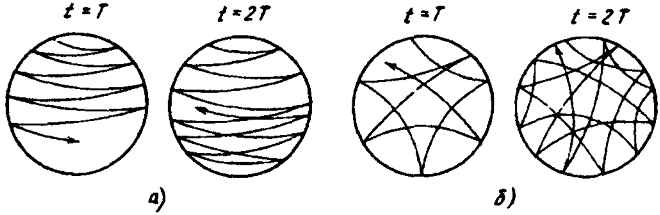



**Рис. 18.** Схематическое изображение эргодического (а) движения и движения с перемешиванием (б). По: [Заславский, 1984].

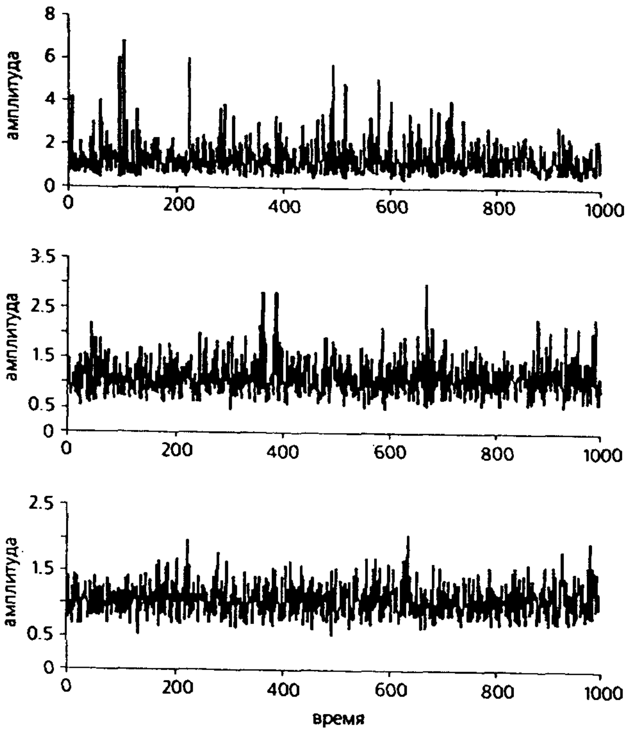



**Рис. 19.** Реализация во времени случайной величины, распределенной квази-гиперболически. С ростом $\alpha$ (сверху вниз по рисунку — ср. $\alpha$ на рис. 12) график приближается к «белому шуму». По [Найденов, Кожевникова, 2003]

## Приложение 3. ПОЯСНЕНИЕ

Книга была в печати, когда на моем докладе в Семинаре по истории математики Мехмата МГУ (рук. С.С. Демидов) выяснилось, что пп. 6-5 и 6-6 требуют пояснения. В таблице иа с. 131 можно получить счетное миожество {D} строк, если перейти к пределу по *n* сразу по строкам и столбцам: таково миожество конструктивных чисел. Если длину каждой строки считать актуально бесконечной, то предел по *n* (по числу строк) даст множество вещественных чисел {R}. Если же устремить к пределу число *n* строк (при актуальио бескоиечных длинах строк), выбрасывая иа каждом шагу треть всех строк, как это показано на рис. 7, то получится "канторово совершеииое миожество" {E}. Оио иесчетио, ио имеет нулевую меру по Лебегу, тогда как множество {R} — едииичиую [Шилов, 1960]. В теории Кантора мощности множеств {R} и {E} признаиы равными, но это неприемлемо для ТВ, поскольку означает, что почти достовериое и почти невозможное события признаны эквивалентными.

Этот дефект теории Каитора — одно из следствий царящего в ней "принципа иеразборчивости", противиого принципу системности [Шрейдер, Шаров, 1982, гл. 1]. Алеатике нужна более "разборчивая" теория миожеств. Как доказал в 1966 г. логик Пол Коэи (США), теорию множеств допустимо строить, полагая наличие миожества промежуточной (между {D} и {R}) мощиости (литературу см. там же, с. 136).

Таким как раз видится {E}: оио несчетно, но имеет иулевую меру. Естествеиио ввести цепочку мощностей $C_D<C_E<C_R<C_{NS}$, где {NS} — множество иестаидартиых чисел отрезка [0, 1] (звеньев может быть больше четырех), и получить тем самым язык для описаиия различиых форм случайиости. Миожества {D} и {R} традициоиио используются для описаиия ие самой случайности, а ее замеиителей — это раскладки Бериулли (пп. 3-2 и 3-3) и их непрерывиый аналог (теоретикомериая ТВ, п. 3-3.1). Между ними лежит область нуль-мериых миожеств, предиазиаченных для описаиия разиых случайиостей, в том числе фрактальиой, которая еще потребует анализа, но о которой уже сейчас можно утверждать, что оиа не всегда описывается вероятностью. Наконец, нестандартиые числа дают поле для развертываиия частотиой теории вероятиостей. Эта теория призвана объяснить, в каком смысле можно говорить о взаимиой дополиительиости вероятности-частоты и вероятности-меры и почему частота ие сходится точно к вероятности, а образует в пределе малый аттрактор.

Вие даиной цепочки остаются случайиости, для которых ие удается ввести меры по Лебегу — см.. пп. 7-6 и 7-7. В последнем из иих тоже фигурирует нестаидартиый аиализ, и иеясио, иасколько велика его роль в поиимаиии случайиости без вероятности в общем плаие. Предлагая математикам решить, всегда ли случайность без вероятности связаиа с нуль-мерностью или иеизмеримостью по Лебегу, замечу для иих, что системная случайиость (в том числе квази-гиперболическая) по самой своей сути образуется теми нежесткими связями случайиых величин, какие реализуют более сложио устроеииые меры в пространстве элементариых событий, чем те, какие можно задать условиыми вероятиостями. Дробную размериость фракталов естествеиио задает мера по Хаусдорфу, но ее алеатический смысл мие пока неясеи.