

Національний університет
"Києво-Могилянська академія"

В. І. Лаврик
Методи
математичного
моделювання
в екології

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
екологічних і біологічних спеціальностей
вищих навчальних закладів*

ББК 20.1в6я73
Л13

У посібнику розглядаються як найпростіші математичні моделі, що будуються за допомогою основних елементарних функцій, так і більш складні моделі, побудовані на основі апарату теорії диференціальних рівнянь. Значне місце в посібнику відведено питанням кінетики біологічних і хімічних процесів, а також моделюванню гідрохімічного та кисневого режимів водних екосистем, процесам молекулярного та турбулентного масопереносу.

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України
від 1 березня 2001 р. № 14/18.2-188*

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Національного університету
«Києво-Могилянська академія»
Протокол № 4 від 24 березня 2000 р.*

Рецензенти:

А. А. Глуценко – д-р фіз.-мат. наук, професор
(Київський національний університет ім. Тараса Шевченка),
М. Ю. Євтушенко – д-р біологічних наук, професор,
член-кор. НАН України
(Національний аграрний університет)

ISBN 966-518-029-0

© Лаврик В. І., 2002
© Михайличенко Н. В., оформлення, 2002
© Видавничий дім «КМ Академія», 2002

Науковий світогляд, проникнутий природознавством і математикою, є величезна сила не тільки сучасного, а й майбутнього

В. І Вернадський

Передмова

Еволюція сучасної науки характеризується глибоким проникненням математичних методів дослідження у різні сфери наукової думки - від суто гуманітарних дисциплін до таких, як соціологія, прикладна лінгвістика, екологія, що розвиваються на зламі кількох наукових напрямів. Це повною мірою стосується різних галузей природознавства, де роль математики істотно зростає. Тож майбутні біологи, а особливо екологи, потребують серйозної математичної підготовки, яка давала б змогу за допомогою математичних методів досліджувати дедалі ширше коло нових проблем, застосовувати обчислювальну техніку, використовувати математичні моделі на практиці.

Обробка експериментальних даних з використанням математичної статистики - це лише найпоширеніше, але не єдине і не найважливіше застосування математики. Справа в тому, що результати навіть досить тонких експериментів далеко не завжди дозволяють відповісти на запитання, які основні рушійні сили і механізми впливають на стан і розвиток тієї чи іншої природної системи. Такі механізми можуть бути визначені при розгляді функціонування біологічної чи екологічної системи як результату взаємодії її складових елементів і зовнішніх факторів, що позначаються на стані середовища, в якому розглядаються ці системи. Дослідити згадану взаємодію різноманітних чинників можна тільки за допомогою математичних методів і методів математичного та імітаційного моделювання. Ось чому сучасним біологам і екологам конче необхідно засвоїти хоча б основи методу математичного моделювання та оволодіти практичними навичками. Адже недаремно Ч. Дарвін писав у автобіографі: «...У наступні роки я не ми собі пробачити шіт

нестачі витримки, що не дозволила мені подолати математику хоча б настільки, щоб розібратися в її великих керівних принципах, у людей, що засвоили ці принципи, одним органом чуття більше, ніж у простих смертних»^{*}

Найважливішим станом застосування математики в екології слід вважати процес побудови адекватної математичної моделі об'єкта або системи, що вивчається. Тому даному питанню в цьому посібнику приділяється основна увага. Зокрема, тут розглядаються найпоширеніші в біологічних дослідженнях математичні моделі, що добре себе зарекомендували протягом значного періоду розвитку біології та екології. На конкретних прикладах показана ефективність застосування математичних методів і методів математичного моделювання у вивченні біологічних процесів на різних рівнях організації живого. Значне місце відводиться питанням кінетики біологічних процесів, адже саме кінетика відіграла основну роль у регулюванні різноманітних процесів в організованих екологічних системах (ці процеси відбуваються з певною швидкістю і в певній послідовності, що суттєво позначається на структурі і функціонуванні екосистем).

Посібник складається зі вступу і семи розділів. У першому розділі розглядаються загальні принципи математичного моделювання та основні положення теорії систем.

Другий розділ присвячено питанням застосування основних елементарних функцій до кількісного опису різних закономірностей, що спостерігаються при вивченні біологічних та екологічних процесів і явищ.

У третьому розділі висвітлюється суть понять і методів математичного аналізу і теорії диференціальних рівнянь як основного апарату побудови математичних моделей в екології. Зокрема, розглядаються приклади застосування похідної до моделювання біологічних, хімічних і фізичних процесів. Наводиться теорія побудови емпіричних формул за допомогою методу найменших квадратів, продемонстровано приклади побудови емпіричних формул, що описують природні процеси. За допомогою диференціальних рівнянь будуються моделі динаміки чисельності популяцій і біоценозів, вводиться поняття стаціонарного розв'язку та його стійкості, наводяться елементи якісної теорії диференціальних рівнянь на прикладі дослідження стійкості одного диференціального рівняння першого порядку, розглядаються приклади дослідження розв'язків диференціальних рівнянь, що описують динаміку популяцій і мають як стійкі, так і нестійкі стаціонарні розв'язки. Значне місце в цьому розділі відводиться побудові конкретних моделей динаміки чисельності популяцій і біоценозів з урахуванням міжвидових взаємовідносин та взаємодії з навколишнім середовищем.

^{*} Дарвін Ч. Собрание сочинений – М.–Л., 1925 – Т. I – Кн. I

Четвертий і п'ятий розділи присвячені основним принципам і методам застосування математичного моделювання в гідроекологічних дослідженнях. У четвертому розділі детально описується математична модель гідрологічного режиму, а в п'ятому — модель динаміки розчиненого у воді кисню та деструкції органічної речовини біологічного походження.

Шостий розділ посібника висвітлює різні просторові моделі, які будуються на основі диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описують процеси молекулярного і турбулентного масопереносу шкідливих речовин. У цьому розділі побудовано математичну модель процесу біологічного очищення води в біореакторі, каналі або річці.

У сьомому розділі розглядаються структура та основи організації екологічного моніторингу, показана роль і місце математичного моделювання в системі екологічного моніторингу.

Посібник розраховано на студентів біологічних, хімічних, географічних, економічних та інших природничих факультетів, на яких викладається курс «Методи математичного моделювання в екології» або курс «Математична екологія». Він стане також у пригоді учням старших класів середньої школи, для яких навчальною програмою передбачено вивчення основ математичної екології.

Розділ 1

ПРОБЛЕМИ ЕКОЛОГІЇ І МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

У даному розділі розглядаються питання, що виникають при вивченні та застосуванні методів сучасної екології. Показано зв'язок основних проблем й актуальних завдань екології з необхідністю застосування математичних методів, зокрема методів математичного моделювання. Викладено основні принципи і методи математичного та імітаційного моделювання екологічних процесів, явищ і систем.

1.1. Біосфера та актуальність проблеми охорони навколишнього природного середовища

Серед багатьох глобальних проблем розвитку людської цивілізації, які виникли в другій половині ХХ століття, є й такі, що стосуються як усього людства, так і кожної людини зокрема. Такою проблемою насамперед є охорона навколишнього природного середовища (довкілля), або, інакше кажучи, охорона води, повітря, ґрунту і всього живого на Землі. Часто ці питання називають проблемою збереження екологічної рівноваги біосфери. Як відомо [2, 8, 21, 36, 47, 52, 96, 117, 118, 129, 131–133, 154, 155, 161, 181], у масштабах усєї земної кулі життя розвивається лише в тонкому шарі води, повітря і ґрунту: кілька кілометрів в океані й атмосфері та всього кілька метрів у ґрунті. Цей шар і називається біосферою. Посилення впливу людської діяльності (антропогенний вплив), що зумовлюється зростаючою технічною та енергетичною озброєністю людини, призводить до дедалі помітніших змін стану біосфери, причому більшість з них мають негативний характер для всього живого. Тому проблема охорони довкілля безпосередньо пов'язана не тільки з питаннями забезпечення нормальних умов життя людей, а й має пряме відношення до розвитку різноманітних природних систем (екосистем), що існують на Землі. Отже, проблема охорони навколишнього природного середовища, або збереження екологічної рівноваги біосфери, найбільшою мірою стосується життя майбутніх поколінь.

Чи дійсно забруднення довкілля набуло таких помітних масштабів? **У чому ми спостерігаємо вияв цього забруднення і як воно впливає на природу, екосистеми, людину?** У чому суть основного протиріччя, що **проявляється** при порушенні екологічної рівноваги біосфери? Відповідаючи на це питання, зауважимо, що в останні десятиріччя внаслідок

швидкого зростання населення, бурхливого розвитку промисловості та інтенсифікації сільського господарства мають місце помітні зміни важливих для всього живого параметрів (характеристик) біосфери. Ці так звані результати антропогенного впливу на біосферу і призводять до порушення екологічної рівноваги як в окремих регіонах, так і на значній частині нашої планети. Щоденно зі сторінок великої кількості періодичних і книжкових видань, з теле- і радіоприймачів нас попереджають: інтенсивне збільшення кількості населення на Землі, виснаження природних ресурсів, руйнування й забруднення навколишнього середовища призводять до серйозних негативних наслідків, які можуть поставити під загрозу життя людини взагалі. Все це є результатом зростаючих потреб індустріальної цивілізації, яка прагне максимально поліпшити умови життя людей. «Дійсно, поліпшення умов життя однієї людини, сім'ї і цілого суспільства нічого не варті, якщо завтра їх нащадки залишаться без найважливіших природних ресурсів, втратять здоров'я і сенс існування, а всьому суспільству загрожуватиме занепад. Не можна забувати добре відому приказку: "Батько п'є, а дитина розплачується"», – пише відомий еколог П. Пессон у передмові до книги Ф. Рамада «Основи прикладної екології» [129].

Про можливість негативних наслідків у разі взаємодії людини з природою попереджав ще Ф. Енгельс, який писав: «Не будемо, однак, занадто спокуюватися нашими перемогами над природою. За кожен таку перемогу вона нам мстить. Кожна з цих перемог має, правда, в першу чергу її наслідки, на які ми розраховували, проте в другу і в третю чергу зовсім інші, непередбачені наслідки, які дуже часто знищують значення перших».

Подібну думку про взаємовідносини людини і природи висловлює видатний сучасний еколог, керівник лабораторії екології Орлеанського університету, президент Федерації товариств охорони природи у Франції професор П'єр Агессе: «Колосальні успіхи в науці і техніці примусили людство повірити в те, що можна розширити межі природного середовища, в якому воно розвивалось. Вона (людина) використовує біосферу, по-перше, щоб дихати і харчуватися, по-друге, щоб викидати в неї численні відходи промисловості. Несумісність цих двох сторін використання біосфери стала настільки очевидною в останні роки, що більшість експертів уже застерігають людство від можливих наслідків» [2].

З усіх видів забруднень найбільшу небезпеку завдає забруднення природних вод. Якщо всі види забруднень мають, головним чином, потенційну небезпеку, то забруднення континентальних та океанічних вод – це проблема наших днів. Механізми і наслідки забруднення природних вод вважаються найнебезпечнішим явищем не тільки в локальних (місцевих),

а й у глобальних масштабах, в масштабах усієї біосфери. Це пояснюється такими основними причинами. По-перше, численні тверді шкідливі речовини можуть розчинятися у воді або у вигляді зависі за допомогою річок, озер, каналів, морів і океанів переноситися на великі відстані від місць скидів, тобто від джерел забруднень. По-друге, вода містить відносно невелику кількість розчиненого кисню, що, як відомо, належить до основних лімітуючих факторів для більшості водних організмів, котрі заселяють як прісні, так і солоні водоймища. У той час, коли навіть досить забруднене повітря зберігає, за незначним винятком, квазіпостійну концентрацію кисню, концентрація кисню у воді може істотно змінюватися в сторону його зменшення при забрудненні органічними речовинами. Дуже негативний вплив на якість води справляє теплове забруднення, яке виникає внаслідок скиду в водоймища теплих вод ставків-охолоджувачів різних електростанцій. Підігрівання води теж знижує вміст кисню у природних водах.

Згадане свідчить, що проблема взаємовідносин людини і природи є багатоплановою. В ній можна виокремити три основних аспекти (напрями) техніко-економічний, екологічний і соціально-політичний. Перший пов'язаний з використанням і виснаженням природних ресурсів, другий – із забрудненням довкілля і станом екосистем, третій визначається тим, що питання охорони природи від забруднення і деградації (руйнування) стосуються інтересів усіх держав і народів.

Розв'язання основних проблем екології, в тому числі тих, про які зазначалося вище, неможливе без знань основних положень і методів екологічної науки, які створюються і розвиваються на основі сучасної методології, зокрема основних положень системного аналізу, математичних методів і методів математичного та імітаційного моделювання. Тому перейдемо до розгляду основних положень і методів математичної екології як важливого розділу сучасної екологічної науки, зупинившись на з'ясуванні змісту основних екологічних понять і методів.

1.2. Екологічний підхід до вивчення навколишнього середовища за інтенсивного антропогенного впливу

Людина в процесі своєї діяльності цікавилася екологією з самого початку власного розвитку. В первісному суспільстві кожний індивідуум, для того щоб вижити, повинен був володіти певними знаннями про навколишній світ, про сили природи, флору і фауну, що його оточували. Праці Гіппократа, Арістотеля та інших древньогрецьких філософів містили відомості явно екологічного характеру. Проте греки не знали терміна «екологія». Він – недавнього походження, впроваджений у

вжиток німецьким біологом Ернстом Геккелем в 1866 р. Як самостійна наука екологія сформувалась до 1900 р., та лише в останні 20–30 років це слово набуло особливої популярності. Починаючи з першої половини минулого століття, екологія стала тією точкою, в якій перетнулися ідеї генетиків, фізіологів, математиків, агрономів, тваринників, географів, економістів.

Термін «екологія» складається з двох грецьких слів *oikos* – оселя, *logos* – наука, тобто буквально наука про оселю. Е. Геккель (1870) наводить таке визначення цієї галузі науки: «Під екологією ми розуміємо суму знань, що стосуються економіки природи: вивчення всієї сукупності взаємовідносин тварини з оточуючим її середовищем, як органічним, так і неорганічним, і перш за все – її дружніх і ворожих стосунків з тими тваринами і рослинами, з якими вона, безпосередньо чи опосередковано, вступає в контакт. Екологія – це вивчення всіх складних взаємовідносин у природі, які Дарвін називав умовами, що породжують боротьбу за існування» [37], а точніше, екологія – це наука про взаємовідносини організмів та їх угруповань між собою і з навколишнім середовищем.

Сьогодні термін «екологія» став таким же модним, як поняття «навколишнє середовище», «довкілля», «забруднення». Нині досить велика кількість дослідників, педагогів, інженерів займається екологією, але проблеми, якими цікавляться біологи, за змістом відрізняються від проблем, що їх розглядають соціологи, економісти, юристи, географи, фізики, математики тощо. Тому кожен фахівець надає цьому терміну настільки відмінне тлумачення, що неспеціалісту стає важко визначити, що ж таке «екологія» насправді. Ще з давніх часів екологи і поділялися на представників двох напрямів: прихильників одного проводять дослідження природи без урахування діяльності людини, представники іншого – включають людину (*Homo sapiens*) разом з її діяльністю в сферу екологічних досліджень. Зазначимо, що в останні десятиліття в зв'язку з швидким зростанням кількості досліджень у галузі екології змінюється погляд на неї як біологічну науку. Дедалі більшу роль у змінах, що спостерігаються останнім часом в екосистемах і біосфері в цілому, починають відігравати наслідки антропогенного впливу. А тому сьогодні людину не можна виключати з поля зору екологічних досліджень.

Розглянемо ще кілька понять екології, без яких неможливе усвідомлення основних питань і проблем, що стоять перед цією наукою. Насамперед нагадаємо, що предметом екології, як було вже зазначено, є вивчення зв'язків між організмами та оточуючим їх середовищем у процесі еволюції. Оскільки такі зв'язки можуть мати місце тільки в біосфері, то одним з основних понять в екології є термін «біосфера», який вперше був запропонований французьким біологом і медиком Ламарком (1744–1829), котрий, за висловом Ф. Енгельса, був «одним з піонерів еволюційного

вчення». У 1926 р. відомий російський вчений В. І. Вернадський ввів цей термін для широкого користування і заклав наукові основи сучасної екології. Як уже було сказано, біосферу можна визначити як ту частину планети, що включає сукупність живих істот і в якій можливе постійне життя. Біосфера – це середовище нашого життя, це та «природа», яка нас оточує, про яку ми говоримо в побуті. В. І. Вернадський визначав біосферу як сферу існування живої речовини [21, 47].

Нескінченне різноманіття середовищ і складових біосфери, асиметрія її структури привели до появи численних еволюційних зв'язків. Це, в свою чергу, зумовило генезис (розвиток) великої кількості видів тварин (близько 1 млн) і рослин (близько 0,5 млн). Незважаючи на нерівномірність розподілу основних складових біосфери та їх властивостей, нерівномірність розміщення різних видів тварин і рослин на Землі, екологія показує, що в будові біосфери анархії (безладу) не спостерігається. Цей висновок, якщо забігти дещо наперед, дає можливість вивчати складні взаємодії і структури (системи) біосфери, встановлювати закономірності у взаємодіях між елементами біосфери, живими істотами та середовищем їх існування, з'ясувати можливість математичного моделювання і прогнозування різних видів взаємодій між складовими біосфери, елементами екосистем у процесі їх еволюції.

Що ж таке екосистема – це важливе поняття сучасної екології? У будові біосфери можна встановити певним чином визначені структури. Так, конкретні угруповання мікроорганізмів, рослин і тварин утворюються за певних умов навколишнього середовища. Кожне таке угруповання організмів, що зветься *біоценозом*, являє собою високий рівень організації взаємних відносин і зв'язків між окремими особами, популяціями і видами. Будь-який біоценоз розвивається в просторі на певному неорганічному субстраті (основі, предметі, речовині). Та ділянка абіотичного середовища, що її займає біоценоз, називається біотопом. Отже, *біотоп* (від лат. *bios* – життя, *topos* – місце) – це місце життя біоценозу. Біотоп характеризується певним поєднанням абіотичних факторів, до яких зокрема належать: географічні умови, сонячна енергія (радіація), вітер, температура, течія у водному середовищі, мінеральні речовини (вода, вуглець, кисень, кальцій, нітрати, фосфати і т. ін.). Таким чином, кожен біотоп складає фізичну основу біоценозу.

Сукупність специфічного фізико-хімічного оточення (біотоп) з угрупованням живих організмів (біоценозом) утворюють екосистему:

$$\text{екосистема} = \text{біотоп} + \text{біоценоз.}$$

Біотоп і біоценоз взаємно впливають один на одного, що виявляється головним чином у неперервному обміні енергією і речовиною як між двома складовими, так і всередині кожної з них.

Один з видатних російських екологів **В. В. Докучаєв (1846–1903)** та його учень, відомий спеціаліст з лісової екології **Г. Ф. Морозов (1867–1920)** надавали великого значення уявленню (розумінню) біоценозу. Цей термін було пізніше розширено **В. М. Сукачовим (1880–1967)** в поняття «біогеоценоз» або «геобіоценоз» [149, 150].

В останні десятиріччя неодноразово виникала дискусія про співвідношення між поняттями «біогеоценоз» і «екосистема». Часто їх розглядають як синоніми.

Головне значення поняття «екосистема» для екологічної науки полягає в тому, що воно підкреслює обов'язкову наявність взаємовідносин, взаємозалежностей і причинних зв'язків, тобто об'єднання компонентів екосистеми у функціональне ціле. З іншого боку, елементарні фрагменти біосфери повинні мати дві ознаки: 1) вони мають бути стійкими та автономними, здатними до саморегуляції і збереження життєвих процесів; 2) неможливе приєднання до них інших фрагментів або їх частин без порушення якісної однорідності даного фрагмента. Саме такими властивостями наділені екосистеми. Звідси випливає важливий висновок: оскільки частини в функціональному відношенні невіддільні від цілого, то екосистема являє собою найпридатніший для вивчення за математичними методами, методами системного аналізу та математичного моделювання елемент біосфери.

Тепер перейдемо до викладу питань, пов'язаних із застосуванням математичних методів і методів математичного моделювання у вивченні та прогнозуванні процесів і явищ, що відбуваються в різних екосистемах і біоценозах.

1.3. Основні принципи математичного та імітаційного моделювання

Зупинимось коротко на загальних принципах і методах математичного моделювання і прогнозування, якими зазвичай потрібно керуватися при розробці і застосуванні математичних та імітаційних моделей, застосовуваних у разі вивчення різноманітних природних систем і процесів, зокрема закономірностей розвитку живих систем та окремих організмів і популяцій.

Люди завжди використовували концепцію моделі, прагнули за її допомогою уявити і виразити як абстрактні поняття (ідеї), так і реальні об'єкти (явища). Формування поняття «модель» та розробка різних моделей завжди відігравали значну роль у духовній, культурній та практичній діяльності суспільства, особливо з тих часів, коли воно почало прагнути до розуміння процесів і явищ, що відбуваються в навколишньому природному середовищі. «По суті прогрес та історія науки і техніки знайшли свій найточніший вираз у розвитку здібностей людини створювати моделі

природних явищ, понять і об'єктів» – відзначає відомий американський учений у галузі математичного та імітаційного моделювання Роберт Шеннон [166]. Таким чином, однією з головних складових наукової методології дослідження природи є побудова та використання різних моделей, причому ці моделі можуть набувати різноманітних форм.

Однією з найкорисніших та найефективніших форм моделювання є **математичне і імітаційне моделювання**, яке виражає (відображає) найістотніші риси реальних об'єктів, процесів, явищ і систем, що вивчаються різними науками, в тому числі біологією та екологією. На жаль, сьогодні не завжди можна створити математичну модель того чи іншого реального процесу або явища в повному розумінні цього поняття, тобто не завжди ми вміємо строго математично описати реальний об'єкт, процес, явище, тобто реальну систему. Разом з тим і за таких ситуацій є вихід завдяки бурхливому розвитку нового напрямку в математичному моделюванні – так званого імітаційного моделювання [25, 38, 55, 68–70, 72–82, 90, 98, 107, 108, 113–116, 143, 146–148, 151, 152, 158, 166, 169–174, 176, 177, 180, 182–185, 190].

Будуючи математичну модель, насамперед потрібно пам'ятати, що це можливо тільки за допомогою певних, кількісно строго визначених величин, які в процесі дослідження можуть змінюватись або залишатись незмінними (константами). Тому перш ніж будувати математичну модель або застосувати вже відомі математичні методи і моделі, необхідно розчленити об'єкт дослідження на ті елементи (компоненти), які характеризують найістотніші властивості даного об'єкта (процесу, явища). Потім кожному елементові утвореної таким чином системи ставиться у відповідність певна кількісна величина. Внаслідок одержуємо деяку абстрактну систему взаємопов'язаних елементів (компонентів), яка представляє (моделює) ту реальну систему або об'єкт, що ми досліджуємо. Процес (процедура) побудови такої абстрактної спрощеної системи називається *математичною формалізацією реального об'єкта, явища або системи*. Нагадаємо, що під моделлю розуміють зображення (уявлення, поняття) об'єкта, процесу або системи в деякій формі, відмінній від форми їх реального існування. Тому побудована абстрактна система і є певною моделлю реального системи. Але це ще не математична модель в повному розумінні цього поняття. Необхідно встановити зв'язки між окремими елементами системи та між елементами системи і середовищем, в якому функціонує дана система. На етапі встановлення кількісних зв'язків і співвідношень між елементами побудованої системи (моделі) застосування математичних методів можна вважати традиційним. Тут широко використовуються методи математичної статистики, методи побудови емпіричних формул, менше – комбінаторний і логічний аналіз. Статистичний аналіз давно застосовується майже в усіх описових науках і тим паче – в біологічних та екологічних дослідженнях.

Суть імітаційного моделювання полягає в тому, що модель реальної системи будується спочатку словесно (вербально), концептуально, а потім для формалізації і математичного опису моделі залучаються всі існуючі методи, включаючи методи інформатики, системного аналізу і математичного моделювання. Основною умовою побудови імітаційної моделі є застосування сучасних електронних обчислювальних машин (ЕОМ). Потрібно також відзначити, що побудова імітаційної моделі не вимагає обов'язкового повного (строного) математичного опису реальної системи чи процесу. В такому разі більше місця відводиться використанню різної додаткової інформації про реальний об'єкт дослідження, яка одержується внаслідок вивчення останнього за допомогою лабораторних та інших нематематичних методів та яку не вдається передати точними математичними виразами або рівняннями. Саме неповнота математичного опису реального об'єкта робить імітаційну модель принципово відмінною від строгої математичної моделі в традиційному розумінні. У процесі імітаційного моделювання широко залучається інтуїція науковця, дослідника чи спеціаліста та їх робота в діалоговому режимі з ЕОМ. Отже, поступаючись у точності математичного опису окремих елементів реальної системи, імітаційна модель, як правило, повинна мати перевагу відносно її інформативності та практичного застосування. Зважаючи на останнє зауваження, можна стверджувати, що будь-яка математична модель, успішно використовувана для розв'язання складних практичних завдань і проблем, з повним правом може називатися *імітаційною моделлю (ІМ)*, або *імітаційною математичною моделлю (ІММ)*.

У даній час існує багато різноманітних способів і прийомів математичного моделювання, при цьому в найменуванні математичної моделі часто відображається назва того чи іншого математичного методу, що застосовується при її побудові. Наприклад, розрізняють моделі дискретні й неперервні, детерміністичні й стохастичні, аналогові й символічні та інші. Класифікацію моделей можна складати за різними ознаками і цілями, зокрема:

- за характером використання початкової інформації;
- за типом (видом) математичного методу;
- за ступенем адекватності моделі і реальної системи;
- за рівнем конкретизації моделюючого об'єкта;
- тощо.

Потрібно також розрізняти математичні моделі за характером опису ними просторових характеристик (властивостей) реальної системи. Моделі, в яких просторові характеристики природної системи не враховуються, тобто ці моделі описують такі характеристики (параметри), які залежать тільки від часу, прийнято називати *моделлями із зосередженими значеннями (параметрами)*. Моделі, в яких враховується зміна характеристик не

тільки в часі, а й у просторі, тобто шукані характеристики (параметри) залежать як від часу, так і від точки простору, називаються *моделями з розподіленими значеннями (параметрами)*. Слід зауважити, що для теоретичних досліджень найперспективнішими є детерміновані моделі з розподіленими параметрами. Разом з тим потрібно ширше реалізовувати можливості простих концептуальних моделей, особливо тих, що фізично обґрунтовані. Можна з упевненістю сказати, що прості моделі в практичному відношенні є мобільнішими, хоча вони і не здатні відтворювати весь можливий спектр природних умов.

Сьогодні більшість математичних моделей, що широко застосовуються в різних галузях природничих і суспільних наук, можна розбити ще на такі два великі класи: 1) *математичні, або аналітичні, моделі*; 2) *імітаційні, або системні, моделі*. При цьому вважається, що в математичних моделях використовуються в основному аналітичні методи, зокрема апарат сучасного математичного аналізу та інших розділів математики, а в імітаційних моделях застосування засобів інформатики і сучасних електронних обчислювальних машин (ЕОМ) є основним і принципово обов'язковим елементом дослідження. На рис. 1.1 схематично зображено класифікацію математичних моделей, наведену в підручнику В. Д. Федорова і Т. Г. Гільманова «Екологія» [155].

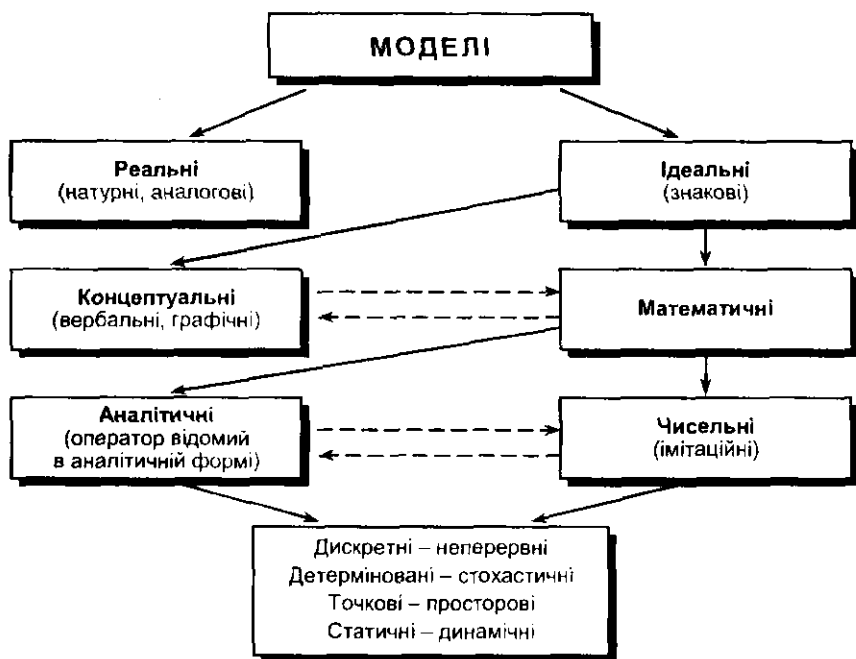


Рис. 1.1

Насправді ж складно провести чітку межу між різними видами моделювання, оскільки в математичних (аналітичних) моделях часто доводиться використовувати чисельний експеримент із застосуванням ЕОМ, а в імітаційних (системних) моделях неможливо обійтися без проведення аналітичного розв'язування поставленої задачі. (На рис. 1.1 ці зв'язки показано пунктирними стрілками.) Усе викладене підтверджує думку, що протиставлення математичного та імітаційного моделювання позбавлено будь-якої основи. Навпаки, розробка конкретних математичних моделей, в тому числі й аналітичних, є тією основою (базою), на якій можна успішно побудувати хорошу імітаційну модель, що спроможна надати значну допомогу при дослідженні складних екологічних систем з метою виявлення найзагальніших і найважливіших закономірностей розвитку організмів, популяцій та угруповань як основних елементів цих систем. Ось чому в тому разі, коли будь-яка математична модель використовується для чисельного (імітаційного) експерименту або для відтворення і прогнозування реальних явищ, ситуацій, процесів або систем, можна говорити про успішне використання імітаційного математичного моделювання в практиці наукових досліджень.

Розглянемо деякі основні принципи і методи побудови (створення) імітаційних математичних моделей під вищенаведеним кутом зору. Як правило, при дослідженні конкретного процесу або явища природи можна побудувати кілька різних математичних (імітаційних) моделей. Кожна з них має певний теоретичний рівень, що характеризує її узагальненість та адекватність реальній системі, яку вона описує. Цей рівень передусім залежить від наших знань про моделюючий об'єкт, процес або явище та від рівня кваліфікації модельєра (математика, фізика, біолога) – розробника математичної моделі. Крім цього, рівень імітаційного математичного моделювання значною мірою залежить від потужності ЕОМ та її математичного забезпечення. Зауважимо також, що моделі не можуть бути одночасно і достатньо адекватними (реалістичними), і досить загальними (теоретичними). З найбільш загальних математичних моделей, що описують широкий клас процесів і явищ, можна вивести (одержати) часткові математичні моделі, які описують уже конкретніші, вузьчі сукупності явищ, що характеризуються додатковими зв'язками. Таким чином будуються моделі різних рівнів, причому кожна модель нижчого рівня повинна бути погоджена (має не суперечити!) з моделлю вищого рівня. Класичним прикладом математичних моделей високого рівня є відомі закони збереження в механіці й фізиці, а саме: закон збереження маси, закон збереження енергії, закон збереження кількості руху та ін.

Процес побудови математичної, а тим паче імітаційної моделі не може бути суворо формалізованим та алгоритмізованим. Він завжди містить як елементи формалізації, відомих правил, законів і алгоритмів, так і елементи творчості й інтуїції, а отже, створює нові правила, підходи, алгоритми. Найзагальнішим правилом побудови імітаційної математичної моделі є процес

последовних наближень (спосіб ітерацій) який полягає в тому, що при розробці моделі на кожному кроці її уточнення враховуються результати розрахунків за попереднім варіантом моделі, які порівнюються як з уже накопиченою інформацією або відомими даними експериментів чи натурних спостережень, так і з новою інформацією і даними про моделювану систему. В процесі порівняння результатів моделювання з даними натурних спостережень або лабораторних експериментів визначаються числові значення параметрів, що входять до математичних моделей і мають певний фізичний зміст (у статистичних моделях такі параметри не мають фізичного змісту). Процес визначення цих параметрів називається *верифікацією або калібрувкою математичної (імітаційної) моделі*. Завдання полягає в тому, щоб визначити (добрати) числові значення невідомих параметрів моделі таким чином, щоб різниця між даними натурних спостережень і розрахунковими значеннями була мінімальною. Модель вважається верифікованою (каліброваною) в тому разі, коли результати розрахунків двох послідовних наближень збігаються із заданою для практики точністю.

Вважається, що найвагоміше значення для екології мають два різновиди знакових моделей: це концептуальні моделі і математичні моделі [155].

Концептуальна модель являє собою деякий більш формалізований, систематизований і строго обґрунтований варіант традиційного словесного (вербального) опису реальної системи чи об'єкта (явища, процесу). Таке уявлення складається з науково обґрунтованої текстової частини, якої обов'язково супроводжуються схемами, графіками, таблицями та іншими ілюстративним матеріалом, в якому можуть використовуватись певні знаки, букви і символи. Термін «концептуальна модель» підкреслює, що основне призначення цієї моделі – виразити чіткої концепції підходу, обґрунтування й узагальнення всіх знань, уявлень і даних натурних спостережень про реальну систему, яка вивчається і для якої планується побудувати математичну модель. Наприклад, у рамках «енергетичної» концепції відповідні концептуальні моделі набувають форми блок-схем трофічних зв'язків і потоків речовини в екосистемі або біоценозі (див. розділ 3.3).

Одночасно із значними загальновідомими перевагами концептуальних моделей, серед яких насамперед слід назвати системність, інформативність, універсальність, обґрунтованість, узагальненість та ін., вони мають також і ряд недоліків, основним з яких є неоднозначність трактування певних положень і неможливість опису процесів у динаміці. Тому найціннішими і найефективнішими є **математичні моделі**. Як уже йшлося, процес побудови будь-якої математичної моделі неможливо формалізувати і тим паче априорі алгоритмізувати. Проте деякий загальний план побудови математичних моделей можна скласти. Частково про такий план уже йшлося, а тепер опишемо його в формалізованих (кількісних) символах.

1.4. Системний підхід до побудови математичних моделей

Основним поняттям при побудові математичних моделей як на концептуальному, так і формалізованому (математичному) рівнях є поняття «система». Системний підхід пронизує всі аспекти побудови математичних моделей в екології, тому варто коротко зупинитись на цьому важливому понятті з погляду математики, знакової символіки, яка дає змогу формалізувати як поняття системи, так і її складові.

Спочатку дамо загальне визначення системи, а саме під **системою** розуміють множину об'єктів разом з відношеннями (зв'язками) між цими об'єктами та їх атрибутами [162]. *Об'єкти* – це окремі частини або компоненти системи, причому їх може бути необмежена множина. *Атрибути* – це властивості об'єктів. *Відношення (зв'язки)* – це ті властивості системи, що об'єднують її в єдине ціле.

Якщо елементи, що утворюють певну систему, позначити символами $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, де n – число елементів, то множину (вектор)

$$X = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\} \quad (1.4.1)$$

природно назвати складом (X) системи S .

Елементи $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ об'єднуються в ціле (систему) певними відношеннями і зв'язками, які називаються системоутворюючими. Крім того, ці елементи не тільки зв'язані між собою, вони зазнають впливу зовнішніх відносно системи S об'єктів. Наприклад, особини популяції взаємодіють не тільки одне з одним, але з особинами інших популяцій при хижацтві, конкуренції і т. ін. (див. розділ 3.2). Отже, кожна система S впливає сама і зазнає впливу з боку нескінченної множини інших систем $S_1, S_2, \dots, S_k, S_{k+1}$,

(рис. 1.2, а). Якщо все ж таки вибрати певну міру інтенсивності взаємодії, то можна встановити певне число зовнішніх систем $V_1, V_2, V_3, \dots, V_m$, що взаємодіють з даною системою S (рис. 1.2, б). Множину V , що складається із зовнішніх систем, які перебувають в істотних (в певному розумінні) зв'язках з даною системою S , прийнято називати навколишнім середовищем (довкіллям) і позначати символом (вектором) V .

$$V = \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_m\} \quad (1.4.2)$$

Множину відношень (зв'язків) між елементами системи і елементами системи і навколишнім середовищем називають структурою даної системи S і позначають її так

$$\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_l\}, \quad (1.4.3)$$

де l – кількість усіх зв'язків, що утворюють структуру системи.



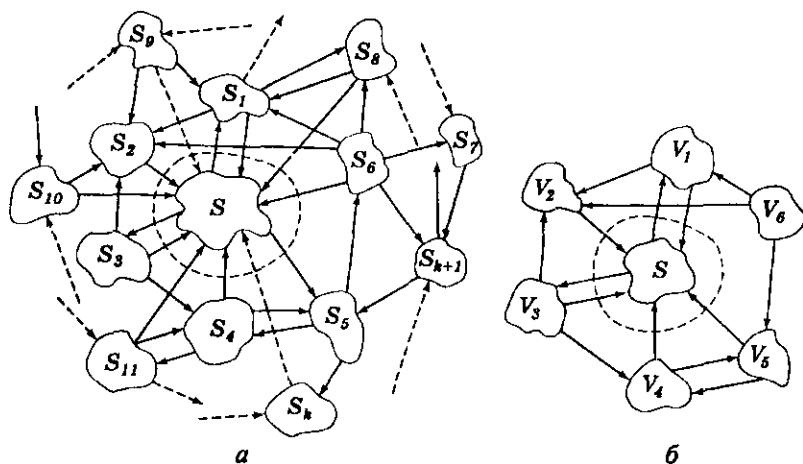


Рис. 1.2

Склад X , навколишнє середовище V і структура Σ можуть змінюватися в часі, що записується таким чином:

$$\begin{aligned} X &= X(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}, \\ V &= V(t) = \{V_1(t), V_2(t), \dots, V_m(t)\}, \\ \Sigma &= \Sigma(t) = \{\Sigma_1(t), \Sigma_2(t), \dots, \Sigma_l(t)\}. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Функцією системи S називається закон (сукупність правил) $F(t)$, за яким залежно від зовнішніх факторів $V(t)$ відбувається зміна в часі внутрішніх елементів $X(t)$ і структури $\Sigma(t)$.

Враховуючи викладене, можна скласти таке формалізоване означення поняття системи [155]:

Системою $S(t)$, що функціонує в навколишньому середовищі $V(t)$, називається множина об'єктів

$$S(t) = S(X, V, \Sigma, F), \quad (1.4.5)$$

утворена із сукупності внутрішніх елементів $X(t)$, які зв'язані між собою і з навколишнім середовищем $V(t)$ сукупністю зв'язків $\Sigma(t)$, що змінюються в часі відповідно до множини функцій $F(t)$.

Таким чином, виходячи з основних положень теорії систем, бачимо, що системний підхід до вивчення будь-яких реальних систем полягає:

1) у визначенні складових частин $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ і взаємозв'язаних з ними елементів (факторів) навколишнього середовища $V_1, V_2, V_3, \dots, V_m$;

2) у вивченні структури внутрішніх зв'язків, а також зв'язків між елементами екосистеми і зовнішніми чинниками $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_l$;

3) у знаходженні законів функціонування екосистеми $F = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_p\}$, що визначають характер зміни (динаміку) основних компонентів екосистеми під дією зовнішніх об'єктів (елементів навколишнього середовища).

Для розв'язання цих трьох основних завдань у сучасній екології існує ряд методів дослідження, основні з яких: польові спостереження (натурні дослідження); проведення експериментів у натурних умовах; лабораторні дослідження; застосування математичного моделювання і проведення імітаційного експерименту. Саме останньому методіві в даному посібнику приділяється основна увага.

Позначимо реальну природну систему, яку ми хочемо вивчити, через $S_0 = S_0(X_0, V_0, \Sigma_0, F_0)$. Тоді, виходячи з основних понять і символів теорії систем, під математичною моделлю цієї реальної системи S_0 розумітимемо деяку її модель $S = S(X, V, \Sigma, F)$, в якій елементами (компонентами) множин X, V, Σ, F виступають математичні символи – як правило, змінні і постійні величини, зокрема скалярні функції від часу t на інтервалі $t_0 \leq t \leq t_N$, а саме:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}, \quad (1.4.6)$$

$$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}, \quad (1.4.7)$$

$$\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_l\}, \quad (1.4.8)$$

$$F = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_p\}. \quad (1.4.9)$$

Структура Σ являє собою множину математичних співвідношень між компонентами множин (1.4.6) - (1.4.7), які записуються у вигляді рівнянь і нерівностей такого виду:

$$\begin{aligned} \sigma_1(v_1, v_2, \dots, v_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \sigma_2(v_1, v_2, \dots, v_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \sigma_k(v_1, v_2, \dots, v_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \sigma_{k+1}(v_1, v_2, \dots, v_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \sigma_l(v_1, v_2, \dots, v_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0. \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Співвідношення (1.4.10) зв'язують між собою зовнішні й внутрішні змінні величини, які описують характеристики (властивості) як компонентів даної екосистеми, так і чинників навколишнього середовища.

Функція $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ є ніщо інше, як розв'язувальний оператор, який за допомогою математичних співвідношень різного виду (див. наступні розділи) по заданих входах $v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)$ з тією чи іншою точністю визначає функції x_1, x_2, \dots, x_n на інтервалі $t_0 \leq t \leq t_N$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f_1(v_1, v_2, \dots, v_m, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t), \\ x_2(t) &= f_2(v_1, v_2, \dots, v_m, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n(t) &= f_n(v_1, v_2, \dots, v_m, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t), \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

які задовольняють рівнянням і нерівностям (1.4.10) і заданим початковим умовам:

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0. \quad (1.4.12)$$

Говорячи про всі переваги методу математичного моделювання, не можна не відзначити, що нерідко відсутність чітких якісних уявлень про досліджувані процеси та явища, про кількісні зв'язки між окремими характеристиками цих процесів (явищ) підміняються наведенням великого числа експериментальних даних, а за теоретичний (модельний) опис видається підібраний емпіричний вираз (одна або кілька формул) без зазначення межі області його застосування. Такий напівемпіричний опис може не мати нічого спільного з реальним процесом (явищем), особливо в тій частині області застосування моделі, яка лежить поза межею адекватності, що й робить побудовану модель малоефективною. Ось чому тільки та математична модель, яка описує суть процесу чи явища, розкриває закономірності їх протікання, і є адекватною в математичному описі окремих характеристик реальної системи. Саме вона дає в руки спеціалісту (досліднику) інструментарій, який дозволяє найоб'єктивніше розв'язувати поставлені завдання і приймати такі рішення, які не повинні викликати жодних сумнівів щодо їх правильності. При всіх найжорсткіших вимогах до моделей ми не повинні забувати, що побудована модель не може бути точнішою, ніж та інформація, що вводиться в модель і використовується при моделюванні.

Особливості математичного моделювання біологічних та екологічних систем полягають у тому, що в основі математичного моделювання процесів біологічного походження лежить уявлення про біологічні системи

або екосистеми як такі, для яких справедливі основні закони фізики і хімії. Інакше кажучи, необхідно пам'ятати, що всі ті основні принципи і закони, згідно з якими протікають різні процеси в неживій природі, зберігають свою силу і для живої матерії. Отже, будь-яка математична (імітаційна) модель повинна базуватися на відомих законах збереження речовини, енергії, кількості руху, на законах діючих мас, хімічних і радіоактивних перетворень та ін. Проте знання одних цих законів недостатньо, оскільки побудована тільки на цих законах модель буде досить загальною. Для побудови математичних моделей конкретних абіотичних і біотичних процесів, що відбуваються в природних системах, необхідно також знати співвідношення, що визначають потоки речовини та енергії як в систему, так і з системи, залежно від стану окремих компонент цієї системи (екосистеми, біотопу, біоценозу) та навколишнього середовища.

Розділ 2

ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ЕКОЛОГІЇ

За допомогою основних елементарних функцій та їх комбінацій можна математично описати різноманітні зв'язки між біологічними та екологічними елементами або об'єктами, що були встановлені протягом всього розвитку біологічної науки, зокрема екології. Без застосування елементарних функцій при формалізації конкретних біологічних та екологічних закономірностей процес побудови ефективних математичних моделей був би значною мірою несприродним, неповним, а в багатьох випадках і неможливим. У даному розділі розглядаються ті функціональні залежності, які дістали значного поширення в біології та екології. Знання цих функцій необхідно для побудови математичних моделей як простих біологічних процесів, так і складніших процесів і систем, що вивчаються в екології.

2.1. Поняття змінної величини та функції

2.1.1. Основи поняття та означення

У природі та різноманітних виробничих процесах одні величини змінюються, тобто змінюються їх числові значення, а інші — ні, тобто характеризуються одним і тим самим числовим значенням (числом). Наприклад, при рівномірному русі час і відстань змінюються, а швидкість залишається сталою. При нагріванні газу або рідини в герметично закритому посуді тиск і температура газу (рідини) змінюються, а об'єм та маса залишаються без змін. На певній ділянці річки її ширина і швидкість в різних створах змінюються, а витрата води залишається сталою. Такі величини, як щільність, чисельність і швидкість розмноження популяцій протягом часу змінюються, разом з тим для окремих популяцій (мікроорганізмів) час, продовж якого чисельність популяції подвоюється, є величиною сталою.

Змінною величиною називається величина, яка може набувати різних числових значень у даному процесі.

Величина, числові значення якої в даному процесі не змінюються, називається сталою, або константою.

Якщо стала величина не змінюється в даному процесі тільки за певних умов то таку величину називають **параметром**.

Величина, яка не змінюється за будь-яких умов, називається **абсолютно сталою** [31, 105, 128, 157, 167, 168].

Змінні і сталі величини позначають буквами латинського ($x, y, z, u, v, \dots, a, b, c, \dots$) або грецького ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) алфавіту Змінна величина в процесі своєї зміни набуває послідовно певних числових значень, які, наприклад, для змінної x позначають x_1, x_2, x_3, \dots і т. д. Отже, символами x_1, x_2, x_3, \dots позначатимемо числа Інколи символами x_1, x_2, x_3, \dots позначають змінні величини, про що зауважується при введенні таких позначень

Сукупність (множина) всіх значень, яких може набувати досліджувана змінна величина (або параметр), називається **областю зміни цієї величини, або областю значень змінної величини** Множина значень змінної величини x позначається символом $\{x\}$ Характер зміни величин дуже різноманітний і залежить від їх фізичної чи біологічної природи (суті) або від місця, яке вони займають у математичних виразах, формулах, рівняннях Одні з них можуть набувати тільки додатних значень, наприклад час ($t > 0$) або біомаса ($B > 0$), інші – від'ємних і додатних, наприклад температура (T)

Змінна величина x вважається **заданою** якщо задана область її значень $\{x\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ Змінна величина називається **зростаючою**, якщо кожне її наступне значення більше за попереднє $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$

$x_{n-1} < x_n < \dots$ Змінна величина називається **спадною**, якщо кожне її наступне значення менше від попереднього $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_{n-1} > x_n > \dots$

Зростаючі і спадаючі змінні величини називаються **монотонними** Змінна величина є обмеженою зверху, якщо її значення не перевищують деякої сталої величини M Змінна величина є обмеженою знизу, якщо її значення перевищують певну сталу величину m При цьому число M називається **верхньою межею** а число m називається **нижньою межею** змінної величини Змінна величина є обмеженою, якщо вона обмежена зверху і знизу ($m < x < M$)

При вивченні та дослідженні різноманітних явищ природи, зокрема процесів, що відбуваються в природних та біологічних системах, доводиться розглядати змінні величини, що можуть характеризувати окремі елементи систем, не ізольовано, а залежно від інших. Адже в природі не існує змінних величин без зв'язку з іншими фізичними (абіотичними) чи біологічними (біотичними) величинами Наприклад, швидкість води у річці залежить від її ширини і глибини, а біомаса популяції змінюється залежно

З ~~часу~~ часу, тобто швидкість води в річці є функцією ширини і глибини річки, а біомаса популяції – функцією часу. Абстрагуючись від цих та інших реальних прикладів залежностей між конкретними величинами, в математиці запроваджено поняття **функціональної залежності** або **функції** – основного поняття математики, яке широко використовується при побудові математичних моделей. Отже, нехай відома (задана) змінна величина x , областю зміни (областю значень) якої є деяка множина $\{x\}$. Якщо кожному значенню змінної x із множини $\{x\}$ за певним законом ставиться у відповідність певне значення змінної y із множини $\{y\}$, то говорять, що на множині $\{x\}$ задана функція y . Ця залежність записується за допомогою однієї з таких рівностей:

$$y = y(x); \quad y = f(x); \quad y = F(x). \quad (2.1.1)$$

Змінну величину x у даному разі називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, множину $\{x\}$ – *областю визначення функції*, а множину $\{y\}$ – *множиною значень функції*. Буква f у рівності $y = f(x)$ позначає *характеристику функції*.

Для позначення аргумента, функції та її характеристики можуть вживатися й інші букви. Рівність $y = f(x)$ означає, що, застосувавши до значення аргумента x закон (або правило) f , знайдемо відповідне цьому значенню x значення функції y . Наприклад, рівність

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 5 \quad (2.1.2)$$

означає, що будь-якому значенню x із множини всіх дійсних чисел ставиться у відповідність значення функції y , характеристика функції f у даному разі означає такі операції: піднести значення x до квадрата, помножити перший результат на $\frac{1}{4}$ і від одержаного другого результату відняти число 5.

2.1.2. Способи задання функцій

Якщо в системі координат xOy на числовій осі Ox (вісь абсцис) відкласти значення аргумента x , а на осі Oy (вісь ординат) відкласти відповідне значення функції y , то на координатній площині xOy можна зобразити точки M з відповідними координатами x і y . Множина цих точок $\{M\} = \{x, y\}$ називається **графіком функції** $y = f(x)$. Графіком

Таблиця 2.1

x	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
0	-5	-4	-4	-1	-1	+4	+4
-2	-5	-4	-4	-1	-1	+4	+4
+2	-5	-4	-4	-1	-1	+4	+4
-4	-5	-4	-4	-1	-1	+4	+4
+4	-5	-4	-4	-1	-1	+4	+4
-6	-5	-4	-4	-1	-1	+4	+4
+6	-5	-4	-4	-1	-1	+4	+4

може бути деяка лінія, крива або пряма, а також множина окремих не з'єднаних між собою точок, прямих або кривих. Наприклад, щоб знайти координати точок графіка функції (2.1.2), потрібно скласти таблицю значень аргументів x_1, x_2, x_3 і т. д. і відповідних їм значень функції y_1, y_2, y_3 і т. д. Для зручності ці значення представимо у вигляді таблиці (див. табл. 2.1), а потім на координатній площині побудуємо точки M_1, M_2, M_3 і т. д.

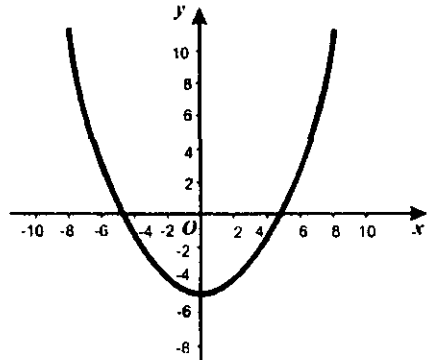


Рис. 2.1

з відповідними координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ і т. д. Сполучивши точки M_1, M_2, M_3 і т. д. лінією, одержимо графік даної функції

На рис. 2.1 зображено графік функції (2.1.2), побудований за сімома точками. Чим більше точок буде відкладено на координатній площині, тим точніше графік функції відобразатиме дану функціональну залежність.

Існують спеціальні методи побудови графіків різних функцій, але спосіб побудови графіка функції за окремими точками є найпростішим і найпоширенішим. З викладеного випливає, що функціональну залежність між двома змінними величинами x та y можна задавати різними способами.

- *аналітичним*, тобто у вигляді формули, як у наведеному прикладі – рівність (2.1.2);
- *табличним*, тобто у вигляді таблиці значень аргументу x і відповідних їм значень функції y (наприклад, табл. 2.1);
- *графічним*, тобто у вигляді графіка функції $y = f(x)$ як множини точок M , координати яких (x, y) задовольняють дане рівняння $y = f(x)$ (наприклад, за допомогою графіка, що зображений на рис. 2.1).

При побудові (синтезу) математичних моделей екологічних процесів і систем кінцевим результатом є одержання функціональної залежності, яка виражається аналітично (аналітичним виразом, рівністю або рівнянням). В екології, як правило, шлях створення математичної моделі пов'язаний з

Табличний спосіб використання всіх трьох способів задання функції. Табличний спосіб являє собою результати експериментальних досліджень та їх первинної статистичної обробки. Перехід від табличного до графічного способу є необхідним етапом для розуміння структури функціональної залежності. Відзначимо, що перехід від табличного представлення до аналітичного без розгляду графічного зображення хоча і дозволяє побудувати функціональну залежність, проте побудована таким способом математична модель не завжди найкращим способом відображає (віддзеркалює) існуючий зв'язок між змінними, що досліджуються.

Слід також зазначити, що поділ двох змінних величин, що перебувають у функціональній залежності, на аргумент і функцію є в певному відношенні формальним правилом, оскільки в одних випадках змінна x може вважатися аргументом, а змінна y – функцією, в інших випадках або задачах змінну y слід розглядати як аргумент, а змінну x – визначати як функцію. Якщо розглядати функціональну залежність в екології, то абсолютно незалежних величин (аргументів), що характеризують стан і розвиток екосистем, не існує взагалі. Абсолютно незалежною змінною для екосистем є тільки час, який позначається буквою t .

Для побудови математичних моделей біологічних та екологічних процесів, що виражаються різними аналітичними виразами (формулами), насамперед потрібно знати структуру і властивості найпростіших функцій, які називаються **основними елементарними функціями**. Перейдемо до їх вивчення і застосування в задачах математичного опису і моделювання найпростіших біологічних і екологічних закономірностей.

2.2. Лінійна функціональна залежність

2.2.1. Означення лінійної функції, її графік

Найпростіша залежність між двома змінними величинами дається лінійною функцією, яка визначається такою рівністю (формулою):

$$y = kx + b \quad (2.2.1)$$

або рівнянням:

$$ax + by + c = 0. \quad (2.2.2)$$

Графіком цієї функції є пряма лінія (рис. 2.2). Числа k , b або a , b , c називаються параметрами, причому параметр k , який має назву **кутовий коефіцієнт**, характеризує нахил прямої до осі Ox і дорівнює $k = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут нахилу прямої до осі Ox . Параметр b у рівнянні (2.2.1) показує, який відрізок на осі Oy відсікає пряма від початку координат. Отже, якщо

пряма проходить через початок координат, то в рівнянні (2.2.1) $b=0$, а в рівнянні (2.2.2) $c=0$.

Якщо пряма лінія задається рівнянням (2.2.2), то, розділивши кожен член рівняння на b , легко записати його в такому вигляді:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \quad (2.2.3)$$

а розділивши рівняння (2.2.2) на a , можна його записати в такому вигляді:

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}. \quad (2.2.4)$$

Якщо в рівнянні (2.2.2) покласти $a=0$, то одержимо рівняння прямої, що паралельна осі Ox , у вигляді $y=y_1$, а якщо покласти $b=0$, то одержимо рівняння прямої, що паралельна осі Oy , у вигляді $x=x_1$ (на рис. 2.2 це – пунктирні прямі).

2.2.2. Застосування в екології

В біології, як і в екології, лінійна залежність між двома змінними величинами зустрічається дуже рідко, але за певних умов (обмежень) залежність між двома змінними можна описати лінійною функцією. Наприклад, на певному проміжку часу, зокрема на ранній стадії свого розвитку, вага деяких риб лінійно залежить від їх віку [14, 42], тому, позначивши вагу риби буквою w , її можна знайти за формулою:

$$w = at, \quad (2.2.5)$$

де параметр (коефіцієнт пропорциональності) a залежить від виду риби і визначається за даними натурних спостережень. Якщо на основі натурних спостережень відомо, що даний вид риби у віці одного року (однолітка) важить 0,24 кг, то, підставивши в рівняння (2.2.5) $t=1$ і $w=0,24$, одержимо:

$$a = \frac{w}{t} = \frac{0,24}{1} = 0,24 \frac{\text{кг}}{\text{рік}} \quad (2.2.6)$$

Отже, в будь-який час (вік) вага риби w визначається за формулою:

$$w = 0,24t. \quad (2.2.7)$$

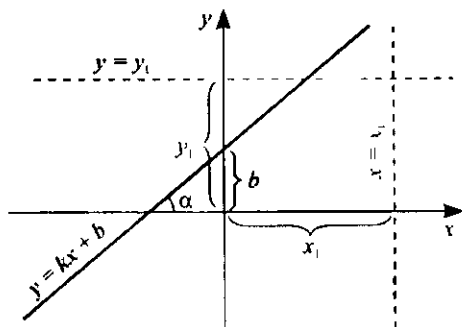


Рис. 2.2

Якщо ж прийняти, що в цей період росту риби її довжина теж залежить лінійно від віку, то довжину риби L можна визначити за допомогою функції:

$$L = bt \quad (2.2.8)$$

Враховуючи залежності (2.2.5) і (2.2.8), одержимо формулу знаходження ваги риби за її довжиною

$$w = \frac{a}{b} L = kL. \quad (2.2.9)$$

Якщо відомо, що довжина однопіткої дорівнює 12 см, то, підставивши у формулу (2.2.8) $L = 12$ і $t = 1$, знайдемо параметр b

$$b = \frac{L}{t} = \frac{12}{1} = 12 \frac{\text{см}}{\text{рік}} \quad (2.2.10)$$

Отже, для даного виду риби формула (2.2.8) матиме такий вигляд:

$$L = 12t \quad (2.2.11)$$

Знаючи значення параметрів (коефіцієнтів) $a = 0,24$ і $b = 12$, легко обчислити параметр (коефіцієнт) k , що входить в праву частину рівності (2.2.9)

$$k = \frac{a}{b} = \frac{0,24}{12} = 0,02 \frac{\text{кг}}{\text{см}}. \quad (2.2.12)$$

Отже, для цього виду риби її вага виражається через її довжину за допомогою такої лінійної залежності

$$w = 0,02L \quad (2.2.13)$$

Якщо значення змінних величин t і L вимірювати в інших одиницях, то й значення параметрів a , b і k будуть іншими. Наприклад, якщо довжину риби вимірювати в метрах, то одержимо $L = 0,12$ м, $b = 0,12$ м/рік, $k = 2$ кг/м. Отже, формула (2.2.9) матиме такий вигляд

$$w = 2L \quad (2.2.14)$$

Хоча формула набула іншого вигляду, результати обчислення ваги за допомогою обох формул будуть однаковими. Дійсно, якщо у формулу (2.2.13) підставити $L = 25$ см, а у формулу (2.2.14) — $L = 0,25$ м, то за обома одержимо $w = 0,5$ кг

2.3. Пряма і обернена пропорціональні залежності

2.3.1. Означення, основні формули, графіки

Функціональна залежність між двома змінними величинами називається **прямо пропорціональною** в тому разі, якщо збільшення (зменшення) однієї з величин у кілька разів приводить до збільшення (зменшення) другої величини в стільки ж разів

Інакше кажучи, дві змінні величини x і y перебувають у прямій пропорціональній залежності, якщо відношення між ними протягом їх змінювання залишається сталою величиною, тобто $\frac{y}{x} = k = \text{const}$, число k називається коефіцієнтом пропорціональності. Очевидно, лінійна функція

$$y = kx \quad (2.3.1)$$

виражає пряму пропорціональну залежність, де параметр k є коефіцієнтом пропорціональності. Графічно ця залежність зображується прямою, що проходить через початок координат. Більше того, будь-яка пряма лінія зображує пряму пропорціональну залежність між двома змінними величинами x і y , яка виражається лінійною функцією. Зокрема, якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з координатами x_0 і y_0 , то рівняння прямої виглядатиме так

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (2.3.2)$$

де параметр k , що називається кутовим коефіцієнтом, є коефіцієнтом пропорціональності.

Якщо пряма проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ і точку $M_2(x_2, y_2)$, то рівняння такої прямої має вигляд

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad (2.3.3)$$

де відношення

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2.3.4)$$

є кутовим коефіцієнтом, або коефіцієнтом пропорціональності.

Наведені у попередньому пункті лінійні залежності між довжиною риби та її вагою $w = 0,02L$ і $w = 2L$ є прикладами прямої пропорціональної залежності з коефіцієнтами пропорціональності відповідно $k_1 = 0,02$ і $k_2 = 2$.

Обернено пропорційною залежністю між двома змінними величинами називається обернено пропорційною, якщо збільшення (зменшення) однієї з них в кілька разів приводить до зменшення (збільшення) другої величини в стільки ж разів.

Інакше кажучи, дві змінні величини x і y перебувають в обернено пропорційній залежності, якщо добуток цих величин у процесі їх зміни залишається постійним, тобто $xy = k = \text{const}$.

Отже, обернено пропорційна залежність виражається такою функцією:

$$y = \frac{k}{x}, \quad (2.3.5)$$

де параметр k називається коефіцієнтом оберненої пропорційності.

Графіком оберненої пропорційної залежності (2.3.5) є рівностороння гіпербола (рис. 2.3)

У загальному випадку обернено пропорційна залежність виражається такою функцією:

$$y = \frac{k}{x-a} + b, \quad (2.3.6)$$

де k, a, b – постійні величини (параметри).

Графіком функції (2.3.6) є гіпербола, зміщена відносно осі Oy на величину a і відносно осі Ox – на величину b (рис. 2.4).

Якщо сталу величину k замінити на $-k$, то графіками функцій

$$y = -\frac{k}{x}, \quad y = -\frac{k}{x-a} + b \quad (2.3.7)$$

будуть гіперболи, розташовані симетрично вже побудованим (на рис. 2.3 і рис. 2.4 ці гіперболи зображені пунктирними лініями).

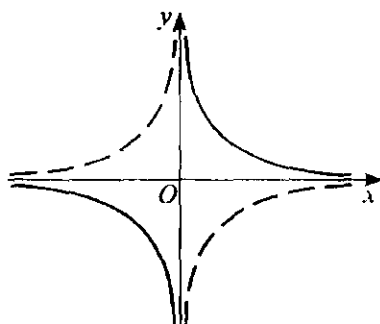


Рис. 2.3

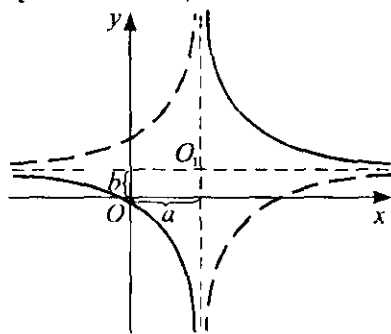


Рис. 2.4

2.3.2. Застосування в екології. Модель типу «хижак – жертва»

Розглянемо приклади застосування цих функцій в екології. Відомо, що між деякими видами існує залежність типу «хижак – жертва». Зокрема, такі взаємовідносини мають популяції зайців і вовків, а саме: на певному періоді свого розвитку залежність кількості N_3 популяції зайців від кількості N_B популяції вовків може бути виражена такою функцією:

$$N_3 = \frac{k}{N_B}, \quad (2.3.8)$$

де параметр k визначається на основі даних натурних спостережень. Якщо в якийсь певний день було зафіксовано (підраховано) кількість зайців $N_{31} = 115$ і кількість вовків $N_{B1} = 46$, то знайдемо $k = N_{31} \cdot N_{B1} = 115 \cdot 46 = 5290$. Отже, кількість зайців залежно від кількості вовків можна визначити за формулою:

$$N_3 = \frac{5290}{N_B}. \quad (2.3.9)$$

Легко побачити, що чим більше налічується вовків, тим менше буде зайців. Зазначимо також, що така залежність, крім хижацтва вовків, не враховує інших факторів, які впливають на розмноження і смертність зайців. Тому користуватись залежністю (2.3.9) можна тільки за певних обмежень для досить наближеного прогнозування. Точніші формули і математичні моделі, що описують взаємодію популяцій типу «хижак – жертва», будуть розглянуті у третьому розділі посібника.

2.4. Дробово-лінійна функція.

Рівняння Міхаеліса–Менген

2.4.1. Означення і формула

Обернено пропорціональна залежність є окремим випадком дробово-лінійної функції, яка має такий вигляд:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (2.4.1)$$

де a , b , c і d – постійні величини (параметри). Оскільки знаменник не може бути нулем, то функція y визначається для всіх значень x , крім точки $x = -\frac{d}{c}$. При $c = 0$ дана функція перетворюється на лінійну:

$$y = \frac{ax + b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}. \quad (2.4.2)$$

Легко помітити, що після приведення до спільного знаменника правої частини функції (2 3 6) вона матиме вигляд (2 4 1). Функцію (2 4 1) можна також записати у формі (2 3 6). Для цього потрібно розділити чисельник правої частини (2 4 1) на знаменник (відділити цілу частину), а саме

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d} \quad (2 4 3)$$

Порівнюючи одержаний вираз з правою частиною функції (2 3 6), бачимо, що дробово-раціональна функція виражає обернено пропорційну залежність, а її графіком є гіпербола, яка зміщена відносно осі Oy на величину $-\frac{d}{c}$ і відносно осі Ox – на величину $\frac{a}{c}$.

2.4.2. Рівняння Міхаеліса-Ментен

У біології відомо, що між кількістю їжі і швидкістю її споживання мікроорганізмами існує тісна залежність, яка може бути виражена дробово-раціональною функцією. Так, вивчаючи розмноження мікроорганізмів на різних поживних речовинах (субстратах), французький мікробіолог Ж. Моно [189] показав, що в багатьох випадках залежність швидкості V подання субстрату мікроорганізмами від концентрації S субстрату може описуватись відомим рівнянням Міхаеліса-Ментен

$$V = \frac{V_{\max} S}{K_m + S}, \quad (2 4 4)$$

де V_{\max} – максимальна швидкість подання (поглинання) субстрату, K_m – постійна, яка називається константою Міхаеліса. Константа K_m дорівнює

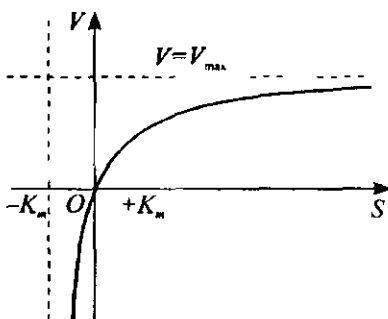


Рис. 2.5

такій концентрації субстрату, за якої швидкість поглинання субстрату досягає половини максимальної швидкості, тобто коли $V = 0,5 V_{\max}$.

Графіком функції (2 4 4) є гіпербола, яка називається *гіперболою Міхаеліса* (рис. 2 5).

Коли кількість (концентрація) субстрату необмежено зростає ($S \rightarrow \infty$), швидкість поглинання

прямує до сталої величини $V = V_{\max}$, тобто точки гіперболи **наближаються** до прямої $V = V_{\max}$ (на рис 2.5 це – горизонтальна пунктирна **пряма**). Така пряма, до якої зменшується відстань від точок кривої, що простягається в нескінченність, називається **асимптотою кривої або асимптотою графіка даної функції**. Отже, пряма $V = V_{\max}$ є асимптота гіперболи Міхаєліса

2.5. Степенева функція

2.5.1. Означення, формула і графіки

Степенева функція визначається рівнянням

$$y = ax^{\alpha}, \quad (2.5.1)$$

де a – будь-яке стале число (параметр), α – раціональне число (показник степеня). Якщо $a > 0$ і α – парне і додатне число, то графіком функції (2.5.1) є парабола з вершиною в початку координат, симетрична відносно осі Oy , причому вітки параболи спрямовані угору (рис 2.6). При $\alpha = 2$ парабола називається квадратичною параболою, при $\alpha = 4$ – параболою четвертого степеня і т.д. При $a < 0$ і α – парному і додатному числі вітки параболи будуть спрямовані вниз (пунктирні лінії на рис 2.6)

Якщо $a > 0$, а α – непарне і додатне число, то графіком функції буде парабола, що проходить через початок координат і симетрична відносно початку координат, причому права вітка спрямована угору, а ліва – вниз (рис 2.7). Якщо $a < 0$ і α – непарне і додатне число, то права вітка спрямована вниз, а ліва – угору (пунктирні лінії на рис 2.7). При $\alpha = 3$ парабола називається кубічною, при $\alpha = 5$ – параболою п'ятого степеня і т.д.

Характерним для графіків усіх парабол є те, що їх вітки, які відповідають більшим значенням показника α , лежать ближче до осі Ox (рис 2.6 і 2.7)

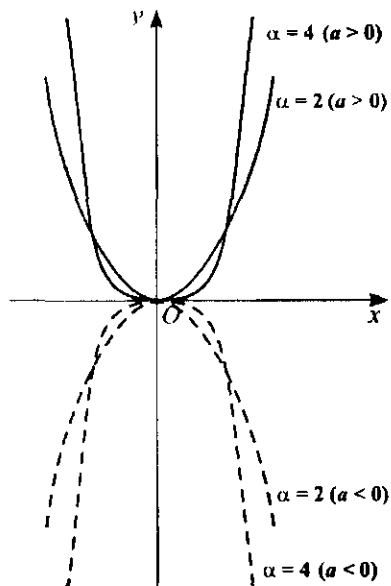


Рис. 2.6

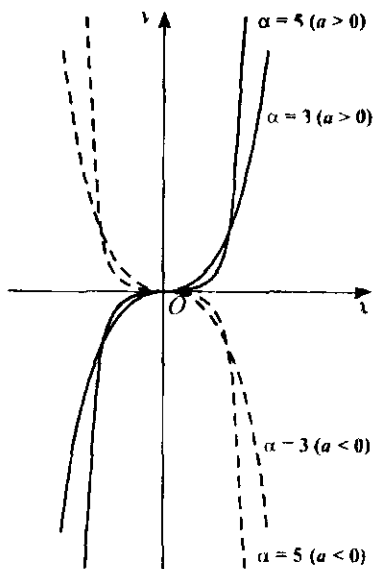


Рис. 2.7

Якщо $\alpha = \frac{m}{n}$ - дробове число, то функція (2.5.1) матиме вигляд

$$y = ax^{\frac{m}{n}}, \quad (2.5.2)$$

а її графіки для різних значень m і n відрізнятимуться від кривих, зображених на рис. 2.6 і рис. 2.7. Тому побудова цих графіків потребує спеціального розгляду (радімо читачеві виконати цю побудову самостійно).

При $\alpha = -1$ з рівняння (2.5.1) одержимо обернено пропорційну функціональну залежність у вигляді (2.3.5), графіком якої є рівнобічна гіпербола (рис. 2.3), а якщо $\alpha < -1$, то графік відповідної функції називається степеневою гіперболою.

2.5.2. Застосування в екології

Розглянемо кілька прикладів, коли біологічні процеси описуються степеневою функцією. Раніше зазначалось, що вага риби на ранньому періоді її розвитку (від 2 до 6 років) може описуватись лінійною функцією.

Ф. І. Баранов (1961) замість лінійної залежності (2.2.5) запропонував обчислювати вагу риби кубічною залежністю [42]

$$W = at^3, \quad (2.5.3)$$

а вагу риби визначати через її довжину за допомогою такої степеневої функції

$$W = bL^3, \quad (2.5.4)$$

де a і b - параметри, які знаходяться на основі експериментальних або натурних спостережень.

Швидкість розмноження популяції як правило, спочатку збільшується, а потім, у зв'язку з недостатнім харчуванням та внутрішньою конкуренцією, починає зменшуватись, прямуючи до значень, близьких нулю. Цим самим підтримується оптимальна в даних умовах чисельність популяції. Встановлення такої рівноваги називається гомеостазом популяції. Виходячи зі сказаного, швидкість розмноження популяції доцільно описати за допо-

могою степеневих функцій, зокрема такою функцією (квадратним дво членом)

$$V_n = rN - \frac{r}{K} N^2, \quad (2.5.5)$$

де N – кількість особин, r – питома швидкість розмноження, K – ємність середовища (максимальна чисельність, при якій швидкість дорівнює нулю, тобто швидкість розмноження припиняється)

2.6. Показникова та логарифмічна функції, їх застосування до опису розмноження популяцій

2.6.1. Означення, формули і графіки

Показниковою називається функція вигляду

$$y = a^x, \quad (2.6.1)$$

де a – додатне число ($a > 0$), що не дорівнює одиниці ($a \neq 1$) і називається основою степеня. Показникова функція має дійсні значення за будь-якого значення аргументу. Її областю існування для неї є вся числова вісь, тобто інтервал $-\infty < x < +\infty$. За будь-яких додатних чи від'ємних значень аргументу x значення функції y завжди додатні, а тому її графік всіма своїми точками лежить вище осі Ox . Якщо $a > 1$, то графік являє собою криву, яка піднімається праворуч угору (рис. 2.8), а якщо $a < 1$, то графік є кривою, що опускається праворуч униз (на рис. 2.8 це пунктирна лінія). В обох випадках вісь Ox є асимптотою всіх кривих, що є графіками функції (2.6.1), причому всі ці криві проходять через точку $(0, 1)$.

Якщо порівняти степеневу і показникову функції, то легко побачити, що при визначенні степеневих функцій за аргумент є взята основа степеня, а при визначенні показникової функції – показник степеня. Отже, обидві ці функції утворилися внаслідок введення чи піднесення до степеня.

Якщо у співвідношенні (2.6.1) за аргумент x взяти результат піднесення до степеня, а за функцію y –

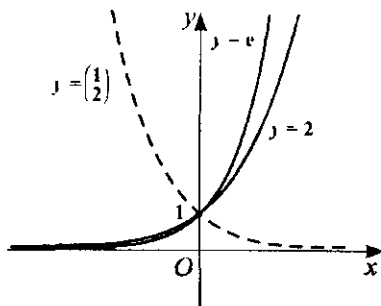


Рис. 2.8

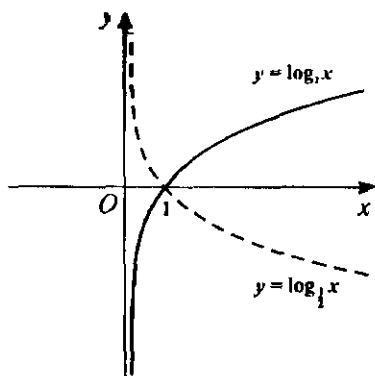


Рис. 2.9

показник степеня, то одержимо функціональну залежність

$$x = a^y, \quad (2.6.2)$$

яка буде оберненою до функціональної залежності (2.6.1). Обернену до показникової функцію y називають **логарифмічною** і позначають її таким символом:

$$y = \log_a x, \quad (2.6.3)$$

де $a > 0$ називається основою логарифма. Рівності (2.6.2) і (2.6.3) еквівалентні й відрізняються тільки тим, що за допомогою рівності (2.6.2) можна побачити, як обчислювати значення функції, а з символічної рівності (2.6.3) цього не видно. Тому, розглядаючи рівність (2.6.3), завжди потрібно пам'ятати рівність (2.6.2), яка і є основою при визначенні логарифмічної функції.

Графіки логарифмічної функції (2.6.2) або (2.6.3) мають таку саму форму, як і графіки показникової функції, але розташовані вони щодо останніх симетрично відносно бісектриси $y = x$ першого координатного кута (рис. 2.9).

Якщо в показниковій функції (2.6.1) за основу степеня a взяти число $e = 2,71828$ (ірраціональне число), то графік показникової функції

$$y = e^x \quad (2.6.4)$$

називається *експонентою* (див. рис. 2.8).

Якщо в логарифмічній функції за основу логарифма a взяти число e , то така функція називається *натуральним логарифмом* і записується так:

$$y = \ln x, \quad (2.6.5)$$

а якщо за основу логарифма взято $a = 10$, то відповідну функцію називають *десятиковим логарифмом* і записують так:

$$y = \lg x. \quad (2.6.6)$$

При вивченні різних природних процесів, включаючи і екологічні процеси, найчастіше зустрічаються залежності між змінними величинами, які описуються показниковою або логарифмічною функціями з основою $a = e$.

2.6.2. Приклади застосування в екології

Розглянемо приклади застосування показникової і логарифмічної функцій. Розмноження більшості бактерій описується такою експоненціальною (показниковою) залежністю:

$$N = N_0 e^{rt}, \quad (2.6.7)$$

де N – кількість бактерій у будь-який час t , N_0 – початкова кількість бактерій у момент часу $t = 0$, r – константа швидкості розмноження бактерій, t – визначається експериментально. Колонія клітин дріжджів розмножується також за експоненціальним законом. Інакше кажучи, з кожної окремої клітини через кожні десять хвилин з'являються вже дві клітини, тобто має місце їх збільшення на 100 %. Іще через десять хвилин клітин буде вже чотири, потім – вісім, шістнадцять і т. д., тобто ці числа утворюють геометричну прогресію. Таке експоненціальне зростання є звичайним процесом у біологічних, економічних та багатьох інших системах оточуючого нас світу. Проте, незважаючи на свою звичайність, експоненціальне зростання здатне приводити до досить дивних результатів, які протягом віків зачаровували людство. Вісім відома стара персидська легенда про мудрого слугу, який подарував своєму королю гарну шахову дошку і попросив, щоб король натомість дав йому 1 зерно рису за першу клітинку шахової дошки, 2 зернини – за другу клітинку, 4 – за третю і т. д. Король одразу ж погодився і наказав принести рис. Для четвертої клітинки необхідно було 8 зернин, для десятої – 512, для п'ятнадцятої – 16 384, а двадцять перша клітинка принесла царському слугі понад 1 млн зерен рису. За сорокову клітинку король повинен був віддати мільйон мільйонів зерен. Усі запаси рису в королівстві закінчилися задовго до того, як дісталися шістдесят четвертої клітинки.

Отже, експоненціальне зростання, починаючи з невеликих чисел, приводить до велетенських величин, які збільшуються з блискавичною швидкістю. Таке несподіване зростання величин яскраво спостерігається ще на одному цікавому прикладі. Припустимо, що ви маєте ставок, в якому ростуть лілії. Щодня кількість квіток подвоюється. Якби дозволити ліліям розростатися безконтрольно, то вся поверхня ставка заросла б за 30 днів, знищивши при цьому всі інші форми життя у воді. Протягом досить тривалого часу заросла ліліями частина ставка залишається невеликою і не має необхідності в їх розрідженні. Тому ви вирішуєте не зрізати зайві лілії до того часу, доки вони не покриють половину ставка. На який день це відбудеться? Виходить, що половина ставка заросте на двадцять дев'ятий день. Отже, для спасіння ставка залишається тільки один день.

На рис. 2.10, взятому із [107], зображена крива експоненціального зростання кількості населення світу. В 1650 році чисельність населення Землі

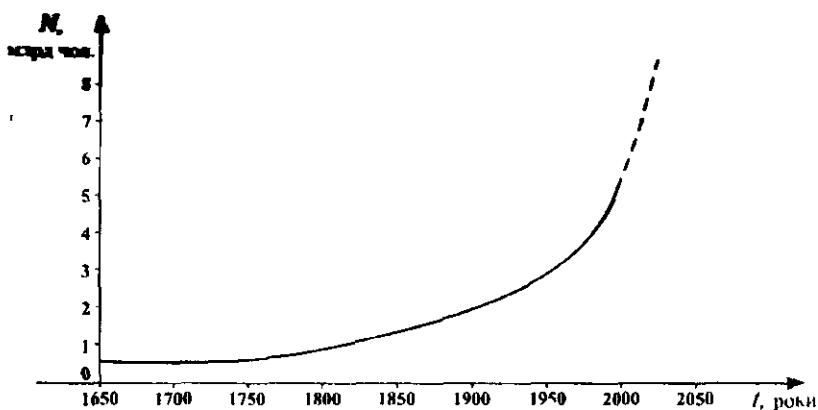


Рис. 2.10

становила приблизно 0,5 млрд чол і збільшувалась з темпом зростання 0,3 % на рік. Це відповідає періоду подвоєння кількості населення, рівному приблизно 250 рокам. У 1970 році загальна чисельність населення Землі становила 3,6 млрд чол., а темп зростання дорівнював 2,1 % на рік. При такому темпі збільшення населення період його подвоєння дорівнює 33 рокам. Отже, бачимо, що чисельність населення зростає не просто експоненціально, а таким чином, що збільшується сам темп зростання. У даному випадку можна говорити про понадекспоненціальне зростання населення, тобто крива чисельності населення піднімається швидше, ніж це мало б місце при експоненціальному зростанні.

Але для більшості біологічних процесів, в тому числі й процесу розмноження різних популяцій, значення змінних не можуть зростати необмежено. Для опису таких процесів добре пристосована показникова функція з від'ємним показником:

$$y = e^{-kt} \quad (2.6.8)$$

Чисельність більшості популяцій спочатку зростає, а потім ріст припиняється і чисельність залишається сталою, точніше, не перевищує певної величини N_{\max} . Таку динаміку чисельності популяції можна описати за допомогою функції:

$$N = N_0 + (N_{\max} - N_0)(1 - e^{-kt}), \quad (2.6.9)$$

де N_0 – початкова чисельність популяції, k – постійне число (коефіцієнт), яке визначається експериментально для кожного виду популяції. Пряма $N = N_{\max}$ є горизонтальною асимптотою графіка цієї функції (рис. 2.11), де величина N_{\max} називається смістю середовища.

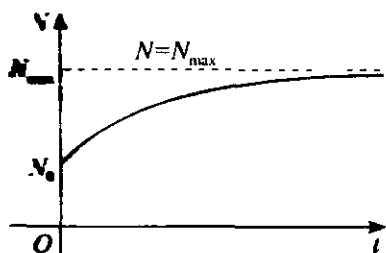


Рис. 2.11

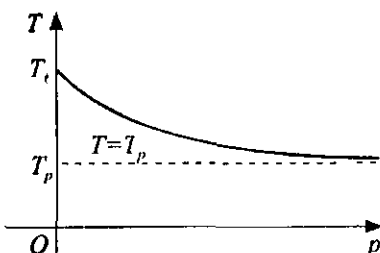


Рис. 2.12

Розглянемо ще один приклад, пов'язаний з дією на організм тварин шкідливих речовин (токсикантів), які скорочують тривалість їхнього життя. Якщо дозу речовини, що діє на організм, позначити через p , середню тривалість життя контрольних тварин — через T_t , і врахувати дію великої кількості токсичних речовин ($p \rightarrow \infty$), що скорочує тривалість життя T до величини T_p , то процес дії шкідливої речовини добре описується такою показниковою функцією з від'ємним показником

$$T = T_p + (T_t - T_p)e^{-kp} \quad (2.6.10)$$

Графік функції (2.6.10) має горизонтальну асимптоту $T = T_p$ (рис. 2.12), сталі T_p і k визначаються експериментально для кожного виду тварин і для кожної шкідливої речовини.

На самкінець наведемо приклад, в якому для математичного моделювання процесів збільшення ваги риби застосовується комбінація показникової і степеневої функції. Бевертон і Холт запропонували визначати вагу риби будь-якого віку за допомогою формули Берталанфі [14]

$$W = W_{\max} [1 - e^{-\alpha(t - t_0)}]^3, \quad (2.6.11)$$

де W_{\max} — найбільша вага риби, α і t_0 — емпіричні коефіцієнти (графік цієї функції читач легко побудує самостійно).

2.7. Тригонометричні функції та їх застосування до моделювання періодичних процесів

2.7.1. Означення та графіки

Тригонометричні функції виражають залежність між відношеннями сторін прямокутного трикутника і його гострими кутами. Якщо розглянути прямокутний трикутник ABC з катетами a і b та гіпотенузою c

рис. 2.13, а), то можна формулювати означення тригонометричних функцій гострого кута A таким чином

синусом кута A називається відношення протилежного катета до гіпотенузи c

$$\sin A = \frac{a}{c};$$

косинусом кута A називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи c :

$$\cos A = \frac{b}{c};$$

тангенсом кута A називається відношення протилежного катета до прилеглого катета b :

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b};$$

котангенсом кута A називається відношення прилеглого катета до протилежного катета a :

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

Кути вимірюються градусами і радіанами (рис. 2.13, б).

Радіаном називається гострий кут α , під яким видно з центру дугу MN , довжина якої дорівнює радіусу R ($MN = OM = R$)

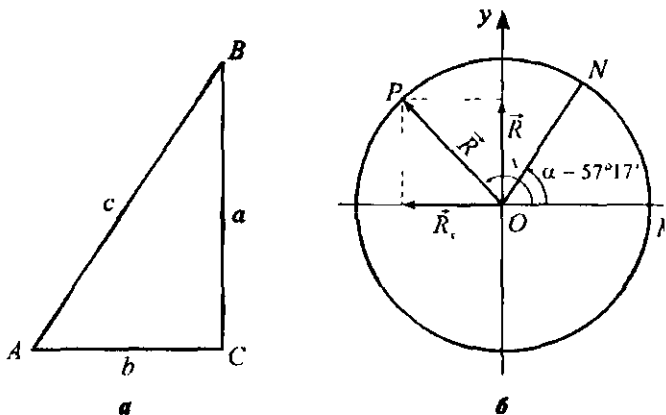


Рис. 2.13

чних функ-
гета a до гі-

(2.7.1)

гета b до гі-

(2.7.2)

катета a до

(2.7.3)

катета b до

(2.7.4)

тра кола O

Оскільки півколо видно з центра кола під кутом 180° , а довжина його дуги дорівнює πR , де R – радіус кола (рис. 2.13, б), то розгорнутий кут, що дорівнює 180° , має π радіанів. Отже, між градусами і радіанами існує така залежність.

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ радіанів} \approx 0,017, \quad (2.7.5)$$

$$1 \text{ радіан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44'', \quad (2.7.6)$$

$$\alpha \text{ (радіанів)} = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ. \quad (2.7.7)$$

Для довільного кута x тригонометричні функції визначаються рівностями

$$y = \sin x = \frac{R_y}{R}, \quad y = \cos x = \frac{R_x}{R}, \quad (2.7.8)$$

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{R_y}{R_x}, \quad y = \operatorname{ctg} x = \frac{R_x}{R_y},$$

де x – кут, утворений радіусом-вектором R з додатним напрямом осі абсцис Ox (рис. 2.13, б), R – довжина (модуль) радіуса-вектора \vec{R} , R_x і R_y – його координати (проекції відповідно на вісі Ox та Oy)

Значення тригонометричних функцій будь-якого кута x можна зобразити геометрично у вигляді відрізків відносно кола, радіус якого дорівнює одиниці, а центр розміщений у точці O – початку координат. На рис. 2.14 зображені значення тригонометричних функцій у різних чвертях (квадрантах) на рис. 2.14, а зображені значення синуса, на рис. 2.14, б – значення косинуса, на рис. 2.14, в – значення тангенса, а на рис. 2.14, г – значення котангенса.

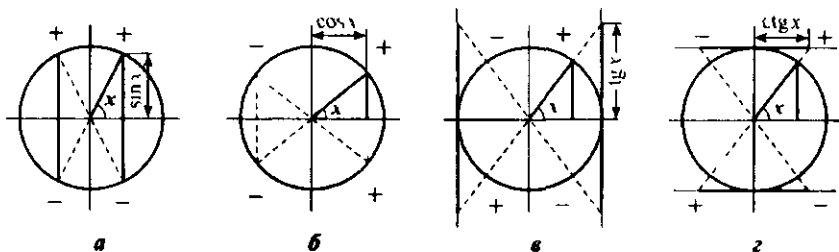


Рис. 2.14

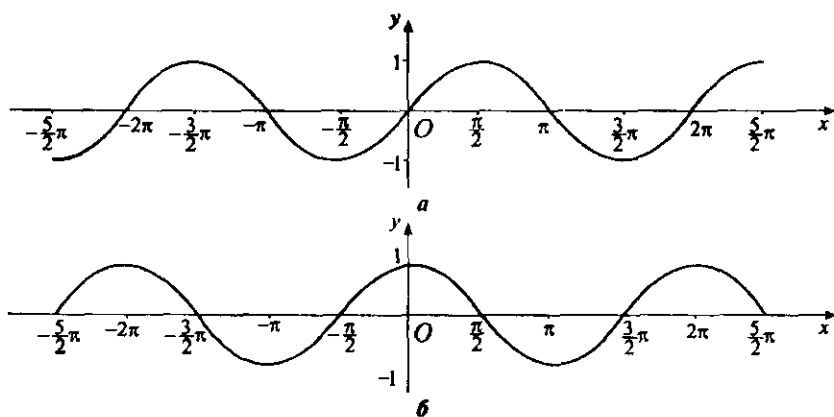


Рис. 2.15

Використовуючи добре відомі значення тригонометричних функцій для певних значень аргументів (кутів), що представлені в табл. 2.2, легко побудувати графіки цих функцій, які називаються синусоїдою і косинусоїдою (рис. 2.15) та тангенсоїдою і котангенсоїдою (рис. 2.16)

Таблиця 2.2

y	α°							
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\operatorname{ctg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

На рис. 2.15, а зображено графік функції $y = \sin x$ (синусоїда), а на рис. 2.15, б – зображено графік функції $y = \cos x$ (косинусоїда). На рис. 2.16, а зображено графік функції $y = \operatorname{tg} x$ (тангенсоїда), а на рис. 2.16, б – графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенсоїда).

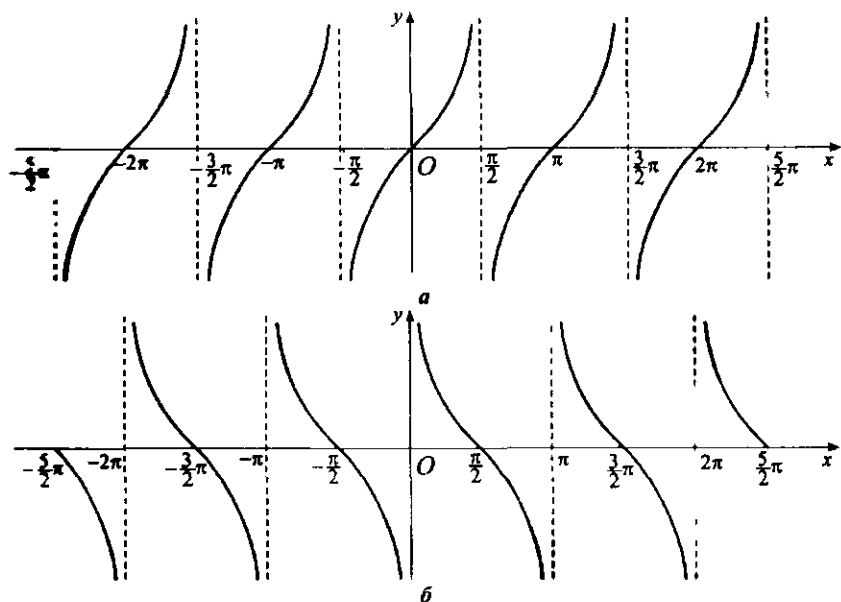


Рис. 2.16

2.7.2. Основні співвідношення

Характерною властивістю тригонометричних функцій є їх періодичність

Функція називається **періодичною**, якщо існує таке число h , що додавання його до будь-якого значення аргументу не змінює значення функції

Інакше кажучи, періодичними називаються такі функції, для яких виконується рівність

$$f(x + h) = f(x) \quad (2.7.9)$$

Найменше з чисел h називається **періодом** функції і позначається через τ . Інколи число τ називають **основним періодом**

З графіків видно, що основний період функцій $\sin x$ і $\cos x$ дорівнює 2π , а основний період функцій $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ дорівнює π

Якщо синусоїдальну (гармонічну) функціональну залежність записати в такому вигляді

$$y = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.7.10)$$

то **стала** A – це амплітуда, $\omega > 0$ – частота, сума $(\omega t + \varphi)$ – фаза, а φ – **початкова фаза** (вона одержується з фази при $t = 0$).

Амплітуда збільшує висоту синусоїди в A разів, а частота ω перетворює період 2π на період τ , що дорівнює

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (2.7.11)$$

тобто зменшує період 2π у ω разів.

За наявності початкової фази φ (або $-\varphi$) синусоїда зміщується вліво (вправо) на величину $\frac{\varphi}{\omega}$.

З означень тригонометричних функцій, тобто з формул (2.7.1)–(2.7.4) випливають такі важливі співвідношення:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}, \quad \sin A = \cos B, \quad \operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B; \quad (2.7.12)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad (2.7.13)$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Для прямокутного трикутника ABC (див. рис. 2.13, *a*) виконується теорема Піфагора, а саме:

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (2.7.14)$$

Якщо ліву і праву частини рівності (2.7.14) розділити на c^2 , то одержимо

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1. \quad (2.7.15)$$

Враховуючи співвідношення (2.7.1) і (2.7.2), з (2.7.15) одержимо основну тригонометричну тотожність:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (2.7.16)$$

З тотожності (2.7.16) випливають такі співвідношення

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}; \quad (2.7.17)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}. \quad (2.7.18)$$

Якщо ввести означення ще двох тригонометричних функцій, а саме, ~~косеканса~~ і косеканса:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad (2.7.19)$$

формули (2.7.18) перепишуться у такому вигляді:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$$

2.7.3. Моделі періодичних процесів

Розглянемо приклади застосування тригонометричних функцій до моделювання періодичних процесів, що спостерігаються в природі. Зв'язати, точних (строгих) періодичних процесів у природі не дуже багато, але близькі до періодичних (майже періодичних або квазіперіодичних) спостерігаються досить часто. Зокрема, зміна температури повітря, води в річках та поверхні Землі відбувається по роках, по сезонах і протягом доби. Нехай відомо, що літньої днини найвища температура повітря, яка дорівнює 25 °С, досягається опівдні, а найнижча температура, що дорівнює 15 °С, спостерігається опівночі, тобто в нуль годин (або о 24 години). Покажемо, що цей процес зміни температури T протягом доби можна наближено описати такою тригонометричною функцією:

$$T(t) = 5 \sin\left(\frac{\pi t}{12} - \frac{\pi}{2}\right) + 20, \quad (2.7.20)$$

де через t позначено час в годинах, $0 \leq t \leq 24$.

У розглянутому випадку, коли $\omega = \frac{\pi}{12}$, маємо, що період зміни температури повітря дорівнює

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 12}{\pi} = 24 \text{ год.} \quad (2.7.21)$$

Графік функції (2.7.20) побудуємо в такій послідовності (рис. 2.17):

$$1) T = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}\pi, \quad \text{графік на рис. 2.17, а;} \quad (2.7.22)$$

$$2) T = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{графік на рис. 2.17, б;} \quad (2.7.23)$$

$$3) T = 5 \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + 20, \quad \text{графік на рис. 2.17, в;} \quad (2.7.24)$$

$$4) T = 5 \sin\left(\frac{\pi t}{12} - \frac{\pi}{2}\right) + 20, \quad \text{графік на рис. 2.17, г.} \quad (2.7.25)$$

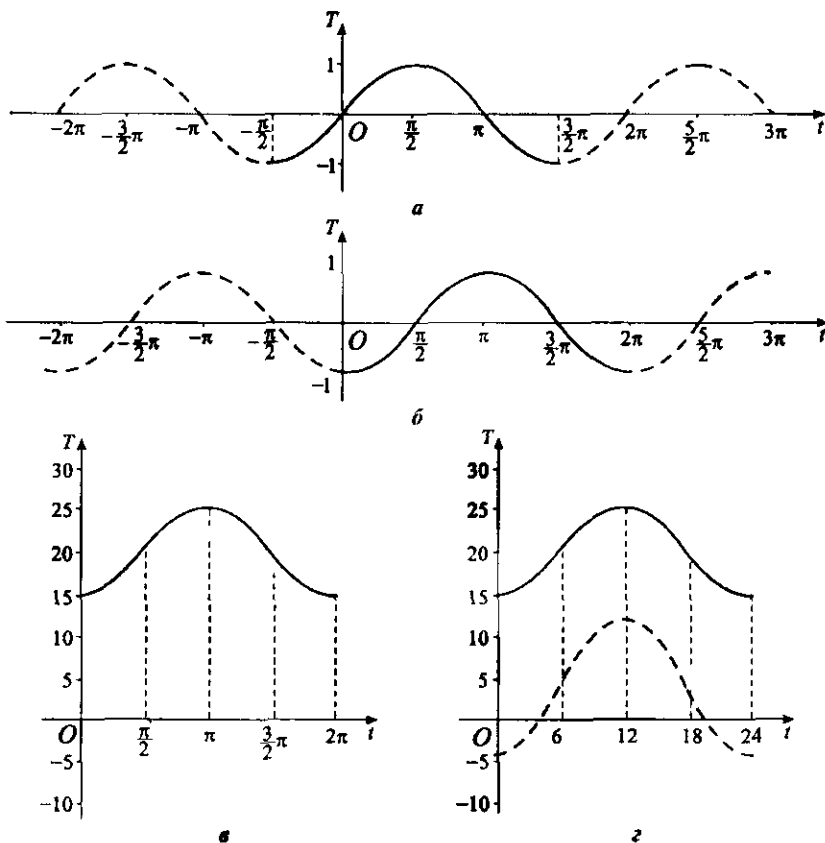


Рис. 2.17

Функцию (2 7 20) можна визначити іншим способом. Для цього скористасмося загальним виглядом функції

$$T(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + B \quad (2 7 26)$$

та додатковими умовами, що випливають з постановки задачі, а саме

$$T(0) = 15^\circ\text{C}, \quad T(12) = 25^\circ\text{C}, \quad T(0) = T(24) \quad (2 7 27)$$

З умов (2 7 27) видно, що функція (2 7 26) повинна мати період 24, мінімальне значення її дорівнює 15, а максимальне – 25. Скориставшись залежністю (2 7 11), знаходимо частоту

$$\omega = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \quad (2 7 28)$$

Враховуючи, що синус набуває найменшого значення при $-\frac{\pi}{2}$, знаходимо початкову фазу

$$\left[\frac{\pi}{12}t + \varphi \right]_{t=0} = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (2.7.29)$$

Отже, шукана функція має такий вигляд

$$T = A \sin \left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2} \right) + B \quad (2.7.30)$$

Тепер, якщо скористатися умовами (2.7.27), то одержимо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} -A + B = 15, \\ A + B = 25 \end{cases} \quad (2.7.31)$$

Розв'язавши систему (2.7.31), знаходимо невідомі параметри A і B

$$A = 5, \quad B = 20 \quad (2.7.32)$$

Підставивши значення (2.7.32) у рівність (2.7.29), шукану функцію запишемо в такому остаточному вигляді

$$T = 5 \sin \left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2} \right) + 20 \quad (2.7.33)$$

Якщо протягом доби температура повітря змінюється від -4 °C до 12 °C, то для визначення сталих A і B одержимо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} -A + B = -4, \\ A + B = 12 \end{cases} \quad (2.7.34)$$

Розв'язавши систему (2.7.34), знайдемо

$$A = 8, \quad B = 4 \quad (2.7.35)$$

Підставивши (2.7.35) в (2.7.30), отримасмо нову функцію такого вигляду (графік зображений на рис. 2.17, з пунктирною лінією)

$$T = 8 \sin \left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2} \right) + 4 \quad (2.7.33)$$

Подібним способом за допомогою тригонометричних функцій описуються також інші періодичні процеси

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Метод теорії диференціальних рівнянь є найефективнішим методом побудови математичних моделей що описують динаміку екосистем, враховуючи взаємодію як між окремими елементами екосистеми, так і між елементами екосистеми і зовнішніми факторами середовища, в якій функціонує кожен елемент екосистеми. Ці рівняння можуть описати різні види динаміки біологічних і екологічних процесів [4-7, 14-17, 22, 25-31, 33, 39, 42, 44, 53, 55, 68, 70, 72-86, 90, 91, 96, 100-108, 112-116, 119, 120, 135-140, 143-148, 151, 152, 158, 169-173, 183-192]. У розділі розглядаються деякі основні поняття і методи теорії диференціальних рівнянь та їх застосування до побудови математичних моделей розвитку окремих популяцій і біоценозів.

3.1. Поняття похідної та її застосування до вивчення законів природи, операції диференціювання та інтегрування

3.1.1. Задачі, що приводять до поняття похідної

Розглянемо кілька задач, розв'язування яких допоможе усвідомити суть поняття похідної.

Задача про дотичну до кривої. В елементарній математиці розглядається задача дотична до кола, яка визначається як пряма, що має з колом одну спільну точку. Якщо розглядати будь яку криву, яка є графіком деякої заданої на відрізку (a, b) функції (рис 3.1)

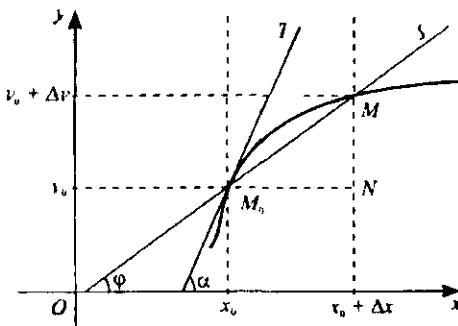


Рис. 3.1

$$y = f(x), \quad (3.1.1)$$

то таке визначення дотичної не підходить. Дійсно, для параболи таких прямих, що мають одну спільну точку з кривою (параболою), можна провести безліч,

але вони не будуть дотичними. Отже, узагальнено ми повинні дати таке визначення дотичної до кривої в даній точці:

дотичною до кривої в даній точці $M_0(x_0, y_0)$ називається граничне положення січної M_0M , коли точка M наближається до точки M_0

Проведемо через точку $M_0(x_0, y_0)$ дотичну M_0T до перетину з віссю Ox і позначимо кут нахилу до осі абсцис через α . Кут нахилу січної M_0M до осі абсцис позначимо через φ (рис. 3.1). З рисунка видно, як визначити кут φ або $\operatorname{tg} \varphi$, а саме

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.1.2)$$

Якщо точка M , рухаючись по кривій, наближатиметься до точки M_0 ($\Delta x \rightarrow 0$), то величина кута φ буде прямувати до кута α , а $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$. Звідси випливає, що тангенс кута нахилу дотичної до осі Ox у точці $M_0(x_0, y_0)$ визначається такою рівністю

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (3.1.3)$$

або

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.1.4)$$

Як відомо, тангенс кута нахилу прямої до осі абсцис називається кутовим коефіцієнтом k (див. розділ 2.2).

Отже, якщо ми хочемо записати рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$, то погрібно скористатися рівнянням прямої, що проходить через дану точку, а саме

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (3.1.5)$$

де кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg} \alpha$ визначається рівністю (3.1.4).

Задача про визначення швидкості тіла, що рухається нерівномірно. Розглянемо спочатку тіло, що рухається рівномірно по прямій OS (рис. 3.2). Швидкість руху тіла V у даному разі дорівнює шляху, пройденому тілом за одиницю часу, а саме

$$V = \frac{S_1 - S_0}{t_1 - t_0} = \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \operatorname{const} \quad (3.1.6)$$

Розглянемо тепер ситуацію, коли тіло рухається нерівномірно, тобто за рівні проміжки часу тіло проходить різні відстані. У такому разі відношення (3.1.6) характеризує середню швидкість руху

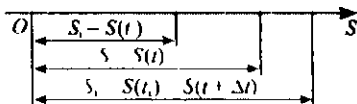


Рис. 3.2

тіла. Очевидно, чим менший буде проміжок часу $\Delta t = t - t_0$, а отже і проміжок шляху $\Delta S = S - S_0$, тим більше наблизитиметься середня швидкість $V_{\text{ср}}$ до справжньої (реальної) швидкості, яку ще називають миттєвою швидкістю у даний момент часу. Отже, якщо пройдений тілом шлях S задано як функцію від часу t , то середня швидкість руху $V_{\text{ср}}$ на проміжку часу від t до $t + \Delta t$ визначається відношенням (рис. 3.2)

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_1 - S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}, \quad (3.1.7)$$

а миттєва швидкість (або просто швидкість) руху тіла в момент t визначається внаслідок граничного переходу, тобто:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \quad (3.1.8)$$

Задача хімічної кінетики. Хімічна кінетика є розділом фізичної хімії, в якому вивчаються швидкості хімічних реакцій і ті проміжні й кінцеві продукти (речовини), що утворюються під час протікання цих реакцій. Нехай у момент t_0 протікання реакції перетворення речовини A в речовину B маса речовини, що прореагувала, була m_0 , а через деякий час Δt маса речовини A стала дорівнювати m_1 . Отже, за час від t_0 до $t_0 + \Delta t$ прореагувала маса речовини, що дорівнює $\Delta m = m_1 - m_0$. Швидкістю хімічної реакції називається кількість (маса) речовини Δm , що вступила в реакцію або утворилась внаслідок реакції за одиницю часу в одиниці об'єму. Оскільки реакція відбувається нерівномірно, то справжню (дійсну) швидкість V_A можна визначити тільки за допомогою вже знайомої нам рівності

$$V_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m_A}{W_A \Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta c_A}{\Delta t}. \quad (3.1.9)$$

Під концентрацією c речовини розуміють кількість (масу) речовини в одиниці об'єму, тобто:

$$c_A = \frac{m_A}{W_A}, \quad c_B = \frac{m_B}{W_B}, \quad (3.1.10)$$

де W_A - об'єм речовини A , що прореагувала, а W_B - об'єм речовини B , що утворилась.

3.1.2. Означення похідної та невизначеного інтегралу

Таким чином, якщо на проміжку (a, b) задана функція $y = f(x)$, то границя відношення приросту функції Δy до приросту

аргументу Δx за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називається *похідною функції $f(x)$ по аргументу x* .

Для похідної застосовуються такі символічні позначення:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.1.11)$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.1.12)$$

Позначення $y' = f'(x)$ ввів французький математик Ж. Л. Лагранж (1736–1813), а позначення $\frac{dy}{dx}$ ввів німецький математик Л. Лейбніц (1646–1716). Крім того, англійський математик і механік І. Ньютон (1643–1727) застосував таке позначення похідної: $\dot{y} = \dot{f}(x)$. Вживаються і такі позначення: y'_x , y'_i і т. д. Операція знаходження похідної даної функції називається *диференціюванням*.

Якщо дана функція z залежить від двох аргументів x і y , то вводиться поняття *частинного приросту функції*, а саме:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y); \quad (3.1.13)$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y), \quad (3.1.14)$$

а також поняття *частинних похідних*, а саме:

$$z'_x = \frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad (3.1.15)$$

$$z'_y = \frac{dz}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (3.1.16)$$

За допомогою формул (3.1.11)–(3.1.16) можна знайти похідну від будь-якої елементарної функції однієї змінної або частинну похідну функції двох незалежних змінних.

Якщо задана похідна:

$$f'(x) = F(x), \quad (3.1.17)$$

а потрібно знайти функцію $f(x)$, то така обернена до операції диференціювання операція знаходження функції за її похідною називається *інтегруванням*. Функція $f(x)$ у даному разі називається *первісною*, а сукупність $f(x) + C$ усіх первісних – *невизначеним інтегралом від функції $F(x)$* і позначається так:

$$\int F(x) dx = f(x) + C. \quad (3.1.18)$$

Похідні та інтеграли основних елементарних функцій

Функція	Похідна	Інтеграл
$y = a = \text{const}$	$y' = 0$	$\int a dx = ax + C$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$	$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + uv'$	$\int u dv = uv - \int v du$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$
$y = f[u(x)]$	$y' = f'(u) u'(x)$	$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$

Рівняння (3.1.17), в яке входить похідна невідомої функції $y = f(x)$, називається **диференціальним рівнянням**. Розв'язати диференціальне рівняння означає знайти невідому функцію $y = f(x)$ або сімейство функцій $f(x) + C$, які задовольняють дане диференціальне рівняння. Наприклад рівняння (3.1.17). Для розв'язку такого простого рівняння, як (3.1.17), застосовується формула (3.1.18)

3.1.3. Приклади застосування похідної до моделювання біологічних, хімічних і фізичних процесів

Тепер розглянемо деякі приклади побудови простих математичних моделей за допомогою поняття похідної і диференціального рівняння

Приклад 1. За сприятливих умов знаходиться деяка кількість бактерій N_0 . З експериментальних досліджень відомо, що швидкість розмноження таких бактерій пропорційна їх кількості. Знайдемо залежність числа бактерій від часу, пам'ятаючи, що швидкість розмноження визначається як похідна $\frac{dN}{dt}$. Отже, можна записати рівняння

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad (3.1.19)$$

де коефіцієнт пропорційності r залежить від виду бактерій і називається коефіцієнтом або константою швидкості розмноження бактерій.

Розділяючи змінні в (3.1.19) і інтегруючи, одержимо

$$\frac{dN}{N} = rdt, \quad \int \frac{dN}{N} = \int r dt + A \quad (3.1.20)$$

або

$$\ln N = rt + \ln a, \quad A = \ln a. \quad (3.1.21)$$

Звідси

$$N(t) = a e^{rt}, \quad a = \text{const} \quad (3.1.22)$$

Скориставшись додатковою інформацією

$$N(0) = N_0, \quad (3.1.23)$$

рівність (3.1.22) запишемо в такому вигляді

$$N(t) = N_0 e^{rt}. \quad (3.1.24)$$

Щоб визначити сталу r , потрібно знати кількість бактерій у будь-який момент часу $t = t_1$. Нехай відомо

$$N(t_1) = N_1 \quad (3.1.25)$$

Підставивши (3.1.25) в (3.1.24), одержимо

$$N_1 = N_0 e^{rt_1} \quad (3.1.26)$$

Прологарифмуємо ліву і праву частини рівності (3.1.26):

$$\ln N_1 = \ln N_0 + rt_1 \quad (3.1.27)$$

Звідси знаходимо шукане значення константи r :

$$r = \frac{\ln N_1 - \ln N_0}{t_1}. \quad (3.1.28)$$

Отже, формулу (3.1.24) можна записати так:

$$N(t) = N_0 \exp \frac{\ln N_1 - \ln N_0}{t_1} t, \quad (3.1.29)$$

де через символ \exp позначається експоненціальна залежність – $\exp = e \approx 2,72$.

Приклад 2. Згідно із законом хімічної кінетики (законом діючих мас) швидкість протікання реакції пропорціональна масі або концентрації речовини, що вступає в реакцію, тобто:

$$v_A = -kc_A \quad (3.1.30)$$

або

$$v_B = kc_A, \quad (3.1.31)$$

де c_A і c_B – концентрації відповідно речовини A і B , причому речовина A перетворюється на речовину B . Знак мінус у правій частині рівняння (3.1.30) означає, що кількість речовини A зменшується. Якщо використати поняття похідної, то швидкість протікання хімічної реакції є похідна від маси або концентрації по часу. Тому рівняння (3.1.30) і (3.1.31) можна записати у вигляді таких диференціальних рівнянь:

$$\frac{dc_A}{dt} = -kc_A, \quad (3.1.32)$$

$$\frac{dc_B}{dt} = kc_A, \quad (3.1.33)$$

де k – коефіцієнт пропорціональності, який визначається для кожної речовини, що вступає в реакцію, на основі експериментальних даних.

Розв'язуючи (інтегруючи) диференціальне рівняння (3.1.32), одержимо

$$c_A = ae^{-kt}. \quad (3.1.34)$$

Щоб визначити постійні a і k , що входять до правої частини рівностей (3.1.34), потрібно знати концентрацію речовин A і B до початку реакції. Нехай відомо

$$c_A(0) = c(0) = c_0. \quad (3.1.35)$$

Враховуючи (3.1.35) і (3.1.34), маємо:

$$a = c_0. \quad (3.1.36)$$

Отже, дана реакція відбувається за таким законом:

$$c_A(t) = c_0 e^{-kt}. \quad (3.1.37)$$

Щоб знайти концентрацію речовини B , потрібно переписати рівняння (3.1.33) з урахуванням співвідношень (3.1.34) і (3.1.36), а саме:

$$\frac{dc_B}{dt} = kc_0 e^{-kt}. \quad (3.1.38)$$

Після інтегрування (3.1.37) одержимо:

$$c_B(t) = -c_0 e^{-kt} + b. \quad (3.1.39)$$

Враховуючи, що $c_B(0) = 0$, знайдемо:

$$c_B(0) = -c_0 + b = 0; \quad b = c_0. \quad (3.1.40)$$

Отже, формула (3.1.39) матиме такий вигляд:

$$c_B(t) = c_0 (1 - e^{-kt}), \quad (3.1.41)$$

де k – стала швидкості протікання реакції для даної речовини.

Приклад 3. Похідна від похідної називається другою похідною, або похідною другого порядку, і позначається так:

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad x(t), \quad y_{xx}'', \quad y_{yy}''. \quad (3.1.42)$$

Отже, друга похідна показує швидкість зміни першої похідної. Зокрема, якщо розглядати рух тіла при вільному падінні, то друга похідна визначається як похідна від швидкості руху тіла, тобто друга похідна від шляху, пройденого тілом, по часу є прискорення рухомого тіла. Оскільки з даних експерименту відомо, що прискорення тіл при вільному падінні є величина стала і дорівнює $g = 982 \text{ см/сек}^2$, то можна скласти таке рівняння:

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad v = \frac{dS}{dt}, \quad (3.1.43)$$

або

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = g. \quad (3.1.44)$$

Інтегрування рівняння (3.1.44) один раз дає

$$\frac{dS}{dt} = gt + C_1, \quad C_1 = \text{const}. \quad (3.1.45)$$

Після інтегрування рівняння (3.1.45) одержимо

$$S(t) = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (3.1.46)$$

Щоб рівняння (3.1.46) описувало рух конкретного тіла, потрібно знати його початкове положення і початкову швидкість. Нехай відомо:

$$S(0) = S_0, \quad v(0) = v_0. \quad (3.1.47)$$

Враховуючи додаткові дані (3.1.47) та рівняння (3.1.32) і (3.1.33), знайдемо:

$$v(0) = C_1 = v_0, \quad S(0) = C_2 = S_0. \quad (3.1.48)$$

Тепер формула (3.1.46), за якою визначається положення тіла при вільному падінні, матиме такий вигляд:

$$S(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0t + S_0. \quad (3.1.49)$$

3.2. Побудова емпіричних формул, метод найменших квадратів

3.2.1. Постановка задачі, побудова емпіричної формули графічним методом

При вивченні закономірностей, що спостерігаються в різноманітних явищах природи, виникає необхідність за даними натурних спостережень побудувати математичну формулу, тобто представити результати натурного експерименту у вигляді функціональної залежності, наприклад, у вигляді однієї з елементарних функцій. Як правило, при побудові такої так званої емпіричної формули починають з того, що дані натурних спостережень або дані лабораторного експерименту заносять у таблицю, а потім значення аргументу і функції переносять на міліметровку або інший аркуш паперу. Після цього, виходячи з форми розташування точок на папері, підбирають вид функції (формули), яка б описувала наближено закономірність розташування точок, зображених на папері, за даними натурного експерименту. Інколи не вдається підібрати одну формулу для всього інтервалу зміни аргументу (інтервалу визначення функції), а тому доводиться розбивати цей інтервал на окремі частини і для кожної з них підбирати свою формулу.

На рис. 3.3 наводяться дані з динаміки бактеріопланктону в Київському водосховищі з 1963 р. по 1985 р. Залежність біомаси B від часу t будемо описувати лінійною функцією

$$B = at + b. \quad (3.2.1)$$

Для знаходження невідомих параметрів a і b графічним методом проведемо пряму так, щоб зображені на рисунку точки, починаючи з

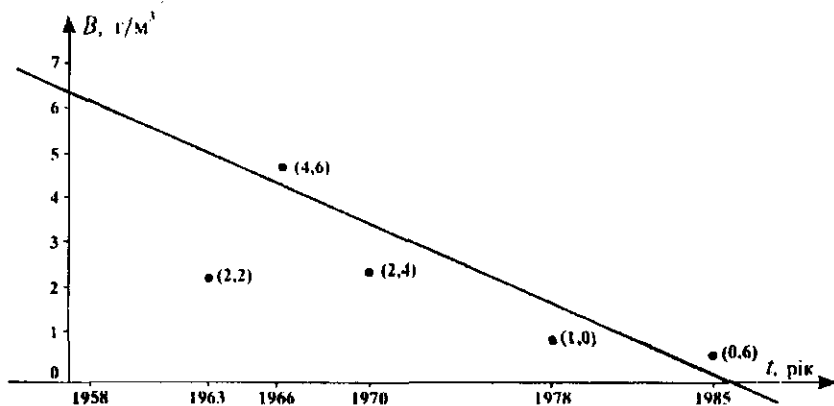


Рис. 3.3

1966 р., були розташовані найближче до цієї прямої. Наприклад, проведемо пряму через точки (1958; 6,1) і (1985; 0). Використовуючи вибрані точки, знайдемо

$$\Delta B = 6,1 - 0 = 6,1; \quad \Delta t = 1985 - 1958 = 27;$$

$$a = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{6,1}{27} = -0,23; \quad (3.2.2)$$

$$b = 0,23 \cdot 1958 + 6,1 = 456,44. \quad (3.2.3)$$

Отже, шукана лінійна залежність має такий вигляд:

$$B(t) = -0,23t + 456,44. \quad (3.2.4)$$

Визначимо біомасу бактеріопланктону в 1966, 1970, 1978 і 1985 рр.:

$$B_1 = B(1966) = -0,23 \cdot 1966 + 456,44 = 4,26,$$

$$B_2 = B(1970) = -0,23 \cdot 1970 + 456,44 = 3,34,$$

$$B_3 = B(1978) = -0,23 \cdot 1978 + 456,44 = 1,50,$$

$$B_4 = B(1985) = -0,23 \cdot 1985 + 456,44 = -0,11.$$

Легко обчислити відхилення δ_1 , δ_2 , δ_3 і δ_4 одержаних результатів від даних спостережень. Вони відповідно дорівнюють:

$$\delta_1 = 4,60 - 4,26 = 0,34 \text{ г/м}^3, \quad \delta_2 = 2,40 - 3,34 = -0,94 \text{ г/м}^3,$$

$$\delta_3 = 1,00 - 1,50 = -0,50 \text{ г/м}^3, \quad \delta_4 = 0,60 - (-0,11) = 0,71 \text{ г/м}^3.$$

Отже, загальна похибка, яку доцільно визначити як суму квадратів усіх похибок, дорівнюватиме

$$\delta^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = 0,12 + 0,88 + 0,25 + 0,50 = 1,75.$$

Зауваження Загальну похибку не можна визначати через алгебраїчну суму окремих похибок, що, як видно з розглянутого прикладу, можуть бути як додатні, так і від'ємні. А тому загальна похибка може бути малою (зокрема дорівнювати нулю), а окремі похибки – досить великі

3.2.2. Побудова емпіричної формули методом найменших квадратів для моделювання лінійних процесів

Тепер побудуємо лінійну функцію

$$y = kx + b \quad (3.2.5)$$

за відомими експериментальними даними точнішим методом, який називається **способом або методом найменших квадратів**. Нехай результати експерименту позначимо через x_i та y_i . Якщо замість аргументу x у формулу (3.2.5) підставити його значення x_i , то одержимо відповідні значення функції y_i . Але, оскільки точки з координатами (x_i, y_i) не лежатимуть на прямій, то права частина рівняння (3.2.5) після підстановки $x = x_i$ не дорівнюватиме лівій частині цього рівняння $y = y_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Отже, будемо мати такі рівності

$$\begin{aligned} kx_1 + b - y_1 &= \delta_1, \\ kx_2 + b - y_2 &= \delta_2, \\ &\dots \dots \dots \\ kx_n + b - y_n &= \delta_n, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

де $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ – деякі числа, взагалі кажучи, не рівні нулю, які називають нев'язкою, відхилом або похибкою

Доберемо параметри k і b таким чином, щоб похибки були **найменшими по абсолютній величині**. Метод найменших квадратів полягає в тому, **що параметри k і b добираються так, щоб сума квадратів усіх похибок була найменшою, тобто щоб сума**

$$S = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2 \quad (3.2.7)$$

була найменшою. Якщо ця сума дійсно буде найменшою, то очевидно і самі похибки теж будуть мінімальними за абсолютною величиною. Якби замість суми квадратів похибок взяти просто їх суму, то з того факту, що сума похибок досить мала, не випливає, що сама похибка буде малою за абсолютною величиною (адже похибки можуть мати різні знаки)

Підставивши в (3.2.7) вирази для похибок (3.2.6), одержимо таку функцію параметрів k і b :

$$S(k, b) = (kx_1 + b - y_1)^2 + (kx_2 + b - y_2)^2 + \dots + (kx_n + b - y_n)^2, \quad (3.2.8)$$

як $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ числа, одержані внаслідок експериментальних вимірювань, а параметри k і b є невідомі змінні величини – аргументи функції S .

Отже, функція S є функцією двох змінних k і b . Щоб знайти найменше значення функції (3.2.8), потрібно записати необхідну умову екстремуму, тобто такі рівняння

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \quad (3.2.9)$$

Враховуючи (3.2.8), рівняння (3.2.9) перепишемо у вигляді такої системи

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 2(kx_1 + b - y_1)x_1 + 2(kx_2 + b - y_2)x_2 + \dots + 2(kx_n + b - y_n)x_n = 0, \quad (3.2.10)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2(kx_1 + b - y_1) + 2(kx_2 + b - y_2) + \dots + 2(kx_n + b - y_n) = 0$$

Одержані рівняння представимо у зручнішому вигляді

$$k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (3.2.11)$$

$$k \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i$$

Остаточний вигляд рівнянь (3.2.11) називається *нормальною системою методу (способу) найменших квадратів*. Розв'язавши систему лінійних рівнянь (3.2.11), знайдемо параметри k і b , які підставляємо в шукану лінійну функцію (3.2.5)

Знайдемо тепер параметри a і b , що входять у рівність (3.2.1), методом найменших квадратів. Для зручності обчислень вважатимемо, що відлік часу зроблених спостережень почався з 1958 р. Тоді замість осі t введемо нову часову вісь τ (рис. 3.4) через таку заміну незалежної змінної

$$\tau = t - 1958 \quad (3.2.12)$$

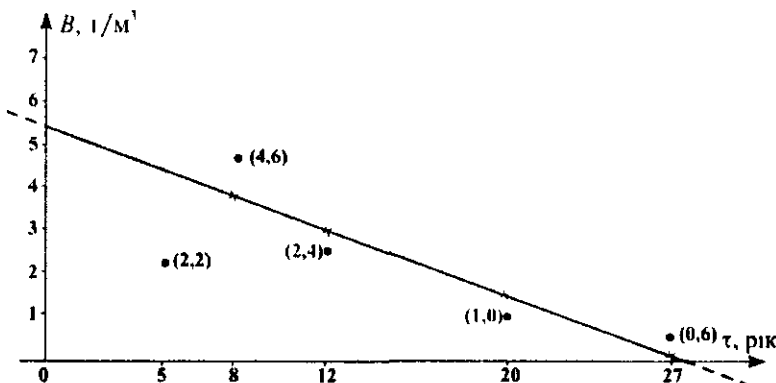


Рис. 3.4

У новій, так званій зведеній системі координат нормальна система рівнянь має такий вигляд

$$\begin{aligned} a(64 + 144 + 400 + 729) + b(8 + 12 + 20 + 27) &= \\ &= 8 \cdot 4,6 + 12 \cdot 2,4 + 20 \cdot 1,0 + 27 \cdot 0,6, \\ a(8 + 12 + 20 + 27) + 4b &= 4,6 + 2,4 + 1,0 + 0,6, \end{aligned} \quad (3 \ 2 \ 13)$$

яка після обчислення набуває вигляду

$$\begin{aligned} 1337a + 67b &= 101,8, \\ 67a + 4b &= 8,6 \end{aligned} \quad (3 \ 2 \ 14)$$

Розв'язавши лінійну систему (3 2 14), знайдемо шукані параметри $a = -0,20$ і $b = 5,45$. Отже, шукана лінійна залежність має вигляд

$$B^*(\tau) = -0,20\tau + 5,45 \quad (3.2 \ 15)$$

Як і раніше, визначимо за формулою (3 2 16) біомасу бактеріопланктону в Київському водосховищі в 1966, 1970, 1978 і 1985 рр., а саме при $\tau_1 = 8$, $\tau_2 = 12$, $\tau_3 = 20$, $\tau_4 = 27$

$$\begin{aligned} B^*(8) &= -0,20 \cdot 8 + 5,45 = 3,85, \\ B^*(12) &= -0,20 \cdot 12 + 5,45 = 3,05; \\ B^*(20) &= -0,20 \cdot 20 + 5,45 = 1,45, \\ B^*(27) &= -0,20 \cdot 27 + 5,45 = 0,05 \end{aligned}$$

Похибки в даному разі відповідно дорівнюють

$$\begin{aligned} \delta_1^* &= 4,60 - 3,85 = 0,75, \\ \delta_2^* &= 2,40 - 3,05 = -0,65, \\ \delta_3^* &= 1,00 - 1,45 = -0,45, \\ \delta_4^* &= 0,60 - 0,05 = 0,55 \end{aligned}$$

Загальна оцінка похибки дорівнює

$$\delta^{*2} = \delta_1^{*2} + \delta_2^{*2} + \delta_3^{*2} + \delta_4^{*2} = 0,56 + 0,42 + 0,20 + 0,30 = 1,48$$

Як бачимо, $\delta^{*2} < \delta^2$ ($\delta^{*2} = 1,48$, $\delta^2 = 1,75$), тобто похибка при користуванні формулою (3 2 15) менша, ніж похибка при обчисленні формулою (3 2 4)

3.2.3. Побудова емпіричної формули методом найменших квадратів для моделювання нелінійних процесів

Перейдемо до розгляду загального випадку методу найменших квадратів, коли емпірична формула представляється у вигляді многочлена m -го степеня

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_mx^m \quad (3.2.16)$$

Якщо маємо n ($n > m$) точок з координатами (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ..., (x_n, y_n) , де значення ординат $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ одержані на основі натурального або лабораторного експерименту, то задача полягає в тому, щоб невідомі коефіцієнти $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ визначити таким чином, щоб відхилення графіка функції (3.2.16) від експериментальних точок були найменшими. Для цього, як і раніше, знайдемо відхилення $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ від кожної точки, які називаються також нев'язками або похибками

$$\begin{aligned} \delta_1 &= A_0 + A_1x_1 + A_2x_1^2 + \dots + A_mx_1^m - y_1, \\ \delta_2 &= A_0 + A_1x_2 + A_2x_2^2 + \dots + A_mx_2^m - y_2, \\ \delta_3 &= A_0 + A_1x_3 + A_2x_3^2 + \dots + A_mx_3^m - y_3, \\ &\dots \dots \\ \delta_n &= A_0 + A_1x_n + A_2x_n^2 + \dots + A_mx_n^m - y_n \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Похибки $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ будуть найменшими тоді, коли сума їх квадратів буде найменшою, тобто функція

$$S(A_0, A_1, A_2, \dots, A_m) = \sum_{k=1}^n \delta_k^2 \quad (3.2.18)$$

має мінімум

Необхідною умовою мінімуму функції кількох змінних є рівність нулю всіх її частинних похідних, а саме

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial A_0} &= 2 \sum_{k=1}^n (A_0 + A_1x_k + A_2x_k^2 + \dots + A_mx_k^m - y_k) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial A_1} &= 2 \sum_{k=1}^n (A_0 + A_1x_k + A_2x_k^2 + \dots + A_mx_k^m - y_k) x_k = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial A_2} &= 2 \sum_{k=1}^n (A_0 + A_1x_k + A_2x_k^2 + \dots + A_mx_k^m - y_k) x_k^2 = 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial S}{\partial A_m} &= 2 \sum_{k=1}^n (A_0 + A_1x_k + A_2x_k^2 + \dots + A_mx_k^m - y_k) x_k^m = 0 \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Якщо ввести позначення Гауса, то нормальна система рівнянь (3.2.19) запишеться в такому вигляді:

$$\begin{aligned} nA_0 + [x]A_1 + [x^2]A_2 + \dots + [x^m]A_m &= [y], \\ [x]A_0 + [x^2]A_1 + [x^3]A_2 + \dots + [x^{m+1}]A_m &= [xy], \\ [x^2]A_0 + [x^3]A_1 + [x^4]A_2 + \dots + [x^{m+2}]A_m &= [x^2y], \\ \dots & \\ [x^m]A_0 + [x^{m+1}]A_1 + [x^{m+2}]A_2 + \dots + [x^{2m}]A_m &= [x^m y], \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

де:

$$\begin{aligned} [x] &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k; \\ [x^2] &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2; \\ \dots & \\ [x^m] &= x_1^m + x_2^m + x_3^m + \dots + x_n^m = \sum_{k=1}^n x_k^m; \\ [y] &= y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = \sum_{k=1}^n y_k; \\ [xy] &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k; \\ [x^2 y] &= x_1^2 y_1 + x_2^2 y_2 + x_3^2 y_3 + \dots + x_n^2 y_n = \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k; \\ \dots & \\ [x^m y] &= x_1^m y_1 + x_2^m y_2 + x_3^m y_3 + \dots + x_n^m y_n = \sum_{k=1}^n x_k^m y_k. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

При побудові емпіричних формул найчастіше застосовується многочлен другого степеня, тобто квадратний тричлен:

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (3.2.22)$$

Для визначення коефіцієнтів a , b і c згідно з рівностями (3.2.20) маємо таку нормальну систему ($A_0 = c$, $A_1 = b$, $A_2 = a$):

$$\begin{aligned} nc + b \sum_{k=1}^n x_k + a \sum_{k=1}^n x_k^2 &= \sum_{k=1}^n y_k; \\ c \sum_{k=1}^n x_k + b \sum_{k=1}^n x_k^2 + a \sum_{k=1}^n x_k^3 &= \sum_{k=1}^n x_k y_k; \\ c \sum_{k=1}^n x_k^2 + b \sum_{k=1}^n x_k^3 + a \sum_{k=1}^n x_k^4 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Найефективніше застосовувати метод найменших квадратів у випадку лінійної залежності, коли задані точки, що одержані внаслідок натурних або лабораторних експериментів, розміщені навколо деякої прямої. Проте складніші функціональні залежності (нелінійні) часто можна звести до лінійної функції. Зокрема, будь-яке рівняння, що має вигляд

$$\varphi(x, y) = a + bf(x, y) \quad (3.2.24)$$

з допомогою введення нових змінних

$$u = \varphi(x, y), \quad v = f(x, y) \quad (3.2.25)$$

легко зводиться до лінійної функції:

$$u = a + bv. \quad (3.2.26)$$

Цим так званим способом спрямлення (вирівнювання) широко користуються при побудові емпіричних формул методом найменших квадратів.

Найчастіше спосіб вирівнювання застосовується до експоненціальної функції:

$$y = ae^{\pm bx}, \quad (3.2.27)$$

яка після логарифмування лівої і правої частин рівності (3.2.27) запишеться у вигляді такої лінійної функції:

$$u = A \pm bx, \quad (3.2.28)$$

де

$$u = \ln y, \quad A = \ln a. \quad (3.2.29)$$

Степенева функція:

$$y = ax^{\alpha} \quad (3.2.30)$$

зводиться до лінійної теж за допомогою логарифмування:

$$u = A + \alpha v, \quad (3.2.31)$$

де

$$u = \ln y, \quad A = \ln a, \quad v = \ln x. \quad (3.2.32)$$

Розглянемо ще два окремих вигляди дробово-лінійної функції, яка зводиться до лінійної.

Функцію

$$y = \frac{1}{a + bx} \quad (3.2.33)$$

можна записати так:

$$\frac{1}{y} = a + bx. \quad (3.2.34)$$

Останню рівність легко записати у вигляді лінійної функції:

$$u = a + bx \quad \left(u = \frac{1}{y} \right). \quad (3.2.35)$$

Дробово-лінійну функцію

$$y = \frac{x}{a + bx} \quad (3.2.36)$$

можна представити в одному з таких виглядів

$$a + bx = \frac{x}{y}, \quad \frac{1}{y} = a \frac{1}{x} + b, \quad \frac{y}{x} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a} y. \quad (3.2.37)$$

Вибір того чи іншого рівняння залежить від конкретних умов задачі. Як правило, при виборі нових змінних

$$\left(x, \frac{x}{y}\right); \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right); \left(\frac{y}{x}, y\right) \quad (3.2.38)$$

прагнуть, щоб числові значення цих змінних знаходились у вузких інтервалах і щоб точки навколо прямої розміщувались рівномірніше, без великих відхилень

3.2.4. Метод середніх величин

У випадку, коли для одержання емпіричних формул не потрібно добиватися великої точності, крім графічного методу (методу вибраних точок), застосовується так званий метод середніх величин, або просто метод середніх

Нехай на основі спостережень залежність між змінними величинами x і y задається n точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$. Потрібно побудувати емпіричну формулу у вигляді лінійної залежності

$$y = ax + b \quad (3.2.39)$$

У відповідності з методом середніх знайдемо відхилення розрахункових ординат від заданих

$$\delta_k = ax_k + b - y_k \quad (3.2.40)$$

і знайдемо невідомі параметри a і b з умови, що сума всіх відхилень повинна дорівнювати нулю. Оскільки для визначення двох параметрів необхідно два рівняння, то розділимо дані спостережень на дві групи: в одній візьмемо m точок, а в другій – $n - m$ точок. Отже, для визначення параметрів a та b маємо такі рівняння:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (ax_k + b - y_k) &= 0, \\ \sum_{k=m+1}^n (ax_k + b - y_k) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

Якщо необхідно побудувати емпіричну формулу у вигляді квадратного тричлена

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (3.2.42)$$

то невідомі параметри a , b і c знаходяться з умови рівності нулю суми таких відхилень

$$\delta_k = ax_k^2 + bx_k + c - y_k. \quad (3.2.43)$$

Розширивши всі дані точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$ на три групи, в одній візьмемо m точок, в другій – ℓ точок, а в третій візьмемо $n - (m + \ell)$ точок. Отже, шукані параметри a , b і c знайдемо з такої системи рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (ax_k^2 + bx_k + c - y_k) &= 0, \\ \sum_{k=m+1}^{m+\ell} (ax_k^2 + bx_k + c - y_k) &= 0, \\ \sum_{k=m+\ell+1}^n (ax_k^2 + bx_k + c - y_k) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

Якщо в формулі (3.2.39) або (3.2.42) деякі з параметрів a , b і c дорівнюють нулю, то число рівнянь системи (3.2.41) або (3.2.44) дорівнюватиме кількості параметрів, що залишилися.

3.3. Загальні принципи моделювання екологічних систем за допомогою диференціальних рівнянь, стаціонарні розв'язки та їх стійкість

Як було зазначено у розділі 1.4, при побудові математичної моделі реальної екологічної системи вводяться певні математичні символи, які позначають змінні й постійні величини, що характеризують кількісні властивості даної системи. Як правило, змінні величини є скалярні функції часу і описують чисельність, біомасу або густоту досліджуваної популяції, біоценозу і т. ін.

Математична модель вважається побудованою, якщо знайдено функції $F = \{F_1, F_2, \dots, F_p\}$, що визначають характер зміни в часі (динаміку) основних компонентів екосистеми, які позначимо через $c_1(t), c_2(t), c_3(t), \dots, c_n(t)$, залежно від зміни параметрів зовнішнього середовища. Невідомі функції $c_1 = F_1(t)$, $c_2 = F_2(t)$, $c_3 = F_3(t)$, ..., $c_n = F_n(t)$ знаходяться з деякого співвідношення виду (1.4.10). Але найчастіше таким співвідношенням виступає одне або кілька (система) диференціальних рівнянь, де невідома функція входить під знак похідної. Найпростіші моделі такого типу були розглянуті в розділі 3.1.

3.3.1. Загальний вигляд математичної моделі

В загальному випадку математична модель, що побудована за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= f_1(c_1, c_2, \dots, c_n, t); \\ \frac{dc_2}{dt} &= f_2(c_1, c_2, \dots, c_n, t); \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dc_n}{dt} &= f_n(c_1, c_2, \dots, c_n, t), \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

де $c_1(t), c_2(t), c_3(t), \dots, c_n(t)$ – невідомі функції часу, що описують показники (характеристики) компонентів екологічної системи; $\frac{dc_j}{dt}$ – швидкості зміни показників екосистеми (концентрації речовини, чисельності або біомаси організмів); f_j – функції, які залежать від зовнішніх і внутрішніх параметрів екосистеми ($j = 1, 2, 3, \dots, n$).

Функції f_j можуть бути як лінійні, так і нелінійні. Якщо функції f_j не залежать явно від часу t , то система рівнянь (модель) називається автономною (динамічною або консервативною) і записується таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= f_1(c_1, c_2, \dots, c_n); \\ \frac{dc_2}{dt} &= f_2(c_1, c_2, \dots, c_n); \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dc_n}{dt} &= f_n(c_1, c_2, \dots, c_n). \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Якщо права частина системи (3.3.1) є лінійні функції, то відповідна система рівнянь називається лінійною і записується у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n + f_1(t); \\ \frac{dc_2}{dt} &= a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n + f_2(t); \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dc_n}{dt} &= a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \dots + a_{nn}c_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Лінійні диференціальні рівняння не завжди можуть детально описати складні екологічні процеси, що потребують глибокого дослідження іа

експерименту. Але в багатьох випадках доцільність їх використання для вивчення екологічних систем і процесів не викликає жодних сумнівів, тим паче, коли методи розв'язування диференціальних лінійних рівнянь розвинуті значно краще, ніж методи розв'язування нелінійних рівнянь.

Якщо виникає необхідність моделювання поведінки (стану) екосистеми або її окремих компонент при змінних у часі зовнішніх умовах (наприклад, таких, що змінюються періодично або випадково), то задача зводиться до розгляду неавтономної системи (3.3.1) або (3.3.3). При цьому з початку будується і досліджується автономна система (модель), потім, залежно від характеру змінних зовнішніх умов, або до правої частини рівнянь (3.3.2) додаються нові члени, що залежать явно від часу, або постійні коефіцієнти замінюються змінними, що залежать від часу.

Як уже зазначалось, задача моделювання полягає в тому, щоб розв'язати систему диференціальних рівнянь (3.3.1), (3.3.2) або (3.3.3), тобто знайти невідомі функції:

$$c_1 = F_1(t), \quad c_2 = F_2(t), \quad \dots, \quad c_n = F_n(t), \quad (3.3.4)$$

які б задовольняли відповідні диференціальні рівняння і додаткові (початкові) умови:

$$c_1(t_0) = c_{10}, \quad c_2(t_0) = c_{20}, \quad \dots, \quad c_n(t_0) = c_{n0}. \quad (3.3.5)$$

Функції (3.3.4) називаються **розв'язками** або **інтегралами** диференціальних рівнянь, а їх графіки, побудовані в $(n+1)$ просторі, називаються **інтегральними кривими**.

В загальному випадку знайти аналітичні розв'язки нелінійних систем (3.3.1) або (3.3.2) можна далеко не завжди. Але наближені (чисельні) розв'язки можна знайти майже завжди за допомогою сучасних чисельних методів й електронних обчислювальних машин (ЕОМ). Разом з тим, не завжди доцільно знаходити точний або наближений розв'язок, можна обмежитись якісним аналізом шуканих розв'язків і з'ясувати найбільш цікаві властивості динаміки системи, зокрема умови її рівноваги і стійкості. Для цієї мети існує спеціальна якісна теорія диференціальних рівнянь, на якій ми детально у даному курсі зупинятися не будемо, а розглянемо тільки її основні поняття, які будуть корисними при побудові простих математичних моделей.

Основний підхід в **якісній теорії диференціальних рівнянь** полягає в тому, що стан динамічної системи (екосистеми) характеризується змінними $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, які в кожен момент часу набувають певних значень відповідно до системи (3.3.2). Якщо в n -мірному просторі відкласти на осях координат значення змінних $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, то стан системи буде характеризуватися точкою $M(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$, яка в просторі буде описувати деяку криву. Цю криву називають **фазовою траєкторією системи** (3.3.2), а простір, в якому проходить ця крива, — **фазовим простором автономної системи** (3.3.2)

Будь-яка фазова траєкторія належить до одного з трьох типів

- 1) гладка крива без точок самоперетину,
- 2) замкнута крива (цикл), що описує періодичний процес,
- 3) точка, що відповідає положенню рівноваги системи

Якісна теорія диференціальних рівнянь дозволяє описувати поведінку фазових траєкторій [11–13, 31, 106, 137–139] і цим самим досліджувати реальні системи (екосистеми). Сукупність фазових траєкторій, що відповідають різним початковим умовам, називається *фазовим портретом системи* (3.3.2)

Звичайно, фазові траєкторії несуть менше інформації про досліджувану систему, ніж інтегральні криві, які дають повну інформацію. Проте, в багатьох випадках досить знати поведінку (структуру) фазових траєкторій. Зауважимо, що фазова траєкторія для одного диференціального рівняння являє собою пряму, яка називається *фазовою прямою*.

Одна з важливих властивостей автономної системи (3.3.2) полягає в тому, що вона може мати *стаціонарні розв'язки*, які визначають стан рівноваги реальної системи або процесу. У положенні рівноваги всі показники екосистеми $c_1^*, c_2^*, c_3^*, \dots, c_n^*$ не змінюються в часі, тобто не залежать від часу. Тому в *стаціонарному положенні всі похідні за часом у системі* (3.3.2) *дорівнюють нулю*. Отже, прирівнявши до нуля праві частини рівнянь (3.3.2), одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення стаціонарних значень $c_1^*, c_2^*, c_3^*, \dots, c_n^*$, а саме

$$f_1(c_1^*, c_2^*, c_3^*, \dots, c_n^*) = 0,$$

$$f_2(c_1^*, c_2^*, c_3^*, \dots, c_n^*) = 0,$$

$$f_n(c_1^*, c_2^*, c_3^*, \dots, c_n^*) = 0$$

Точка фазового простору $M^*(c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*)$ *називається стаціонарною або особливою точкою, або точкою рівноваги системи*

3.3.2. Стійкість стаціонарних розв'язків

Після знаходження стаціонарних розв'язків автономної системи (3.3.2) виникає питання про їх стійкість, а отже, і про стійкість рівноважної реальної системи.

Стійкий стан рівноваги можна визначити таким чином: якщо при досить малому початковому відхиленні від положення рівноваги система (розв'язок) ніколи не відхиляється далеко від цього положення, то стан рів-

Рівновага є стійким і відповідає стійкому стаціонарному режиму функціонування реальної системи. Якщо ж система після виведення її зі стану рівноваги з часом відхилятиметься від цього стану відповідно до рівняння (3.3.2), то такий стан рівноваги є нестійким.

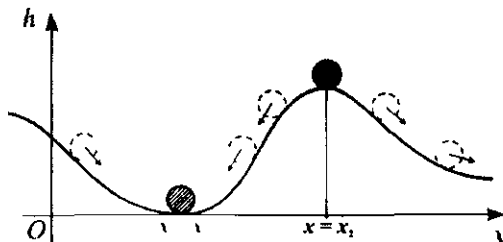


Рис. 3.5

Поняття стійкості легко пояснити на прикладі механічної стійкості. Розглянемо металеву кульку, що котиться по хвилястій поверхні (рис. 3.5). Для такої кульки є два положення рівноваги: одне – коли вона знаходиться в найнижчій точці поверхні (на дні впадини $x = x_1$), друге – коли кулька знаходиться в найвищій точці поверхні (наприклад, на вершині гірки $x = x_2$). Зрозуміло, що перше положення рівноваги кульки є стійким (невеликі відхилення кульки приведуть до затухаючих коливань навколо положення рівноваги), а друге положення є нестійким (невеликі відхилення кульки від цього положення призведуть до великого зміщення кульки і вона займе або перше положення, або віддалятиметься на нескінченність).

Значний інтерес являє собою дослідження стійкості екологічних систем, які теж можуть мати як стійкі, так і нестійкі положення рівноваги. Нестійкі положення рівноваги з часом можуть переходити у стійкі або система набуде нереальних (критичних) форм, або, нарешті, може загинути. Всі ці випадки описуються точковими математичними моделями, що побудовані за допомогою звичайних диференціальних рівнянь та їх систем.

У разі, коли моделююча система описується одним диференціальним рівнянням виду

$$\frac{dc}{dt} = f(c), \quad (3.3.7)$$

питання про стійкість положення рівноваги системи можна розв'язати, досліджуючи поведінку функції $f(c)$, тобто характер зміни похідної $\frac{dc}{dt}$.

За означенням у стаціонарній точці $c = c^*$ похідна дорівнює нулю

$$f(c^*) = 0 \quad (3.3.8)$$

Розглянемо, як змінюються розв'язки (інтегральні криві) $c_n = \varphi_n(t)$ в околі точки $c = c^*$ залежно від значень похідної $f(c_n)$ при $c_n < c^*$ і при $c_n > c^*$. Побудуємо також фазові прямі

Існує три варіанти

1. Нехай відомо, що в околі положення рівноваги c^* похідна $f(c)$ змінює знак з «+» на «-» при зростанні c . Отже, при $c_n < c^*$ маємо $\frac{dc_n}{dt} > 0$, а це означає, що всі значення c_n , розміщені нижче від прямої $c = c^*$, збільшуються, тобто прямують до c^* . При $c_n > c^*$ маємо $\frac{dc_n}{dt} < 0$, а це означає, що всі значення c_n , розміщені вище від прямої $c = c^*$, зменшуються, тобто теж прямують до c^* (рис. 3.6). Отже, всі інтегральні криві, що знаходяться на деякій віддалі від положення рівноваги, прямують до нього при зростанні часу t . Очевидно, що ми маємо ситуацію, коли положення рівноваги є стійким.

2. Тепер розглянемо варіант, коли в околі положення рівноваги c^* похідна $f(c)$ мняє знак «-» на «+» при зростанні змінної c . Тоді при $c_n < c^*$

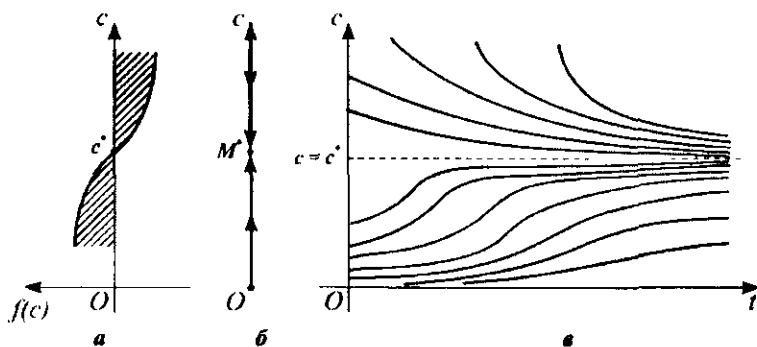


Рис. 3.6

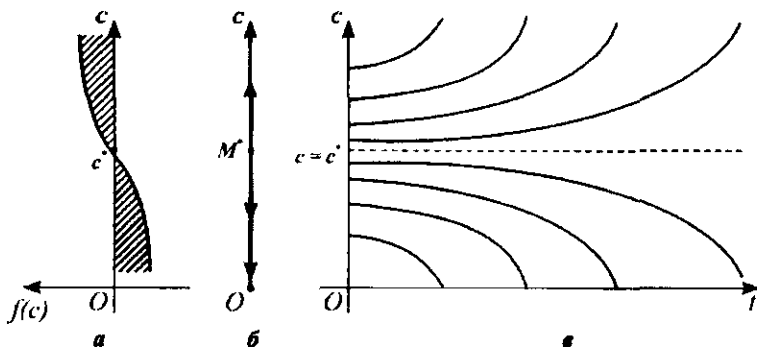


Рис. 3.7

масмо $\frac{dc_n}{dt} < 0$, а це означає, що всі значення c_n , розміщені нижче прямої $c = c^*$, зменшуються, тобто відділяються від положення рівноваги $c = c^*$. При $c_n > c^*$ масмо $\frac{dc_n}{dt} > 0$, а це означає, що всі значення c_n , розміщені вище від прямої $c = c^*$, збільшуються, тобто теж віддаляються від положення рівноваги $c = c^*$ (рис. 3.7). У даному разі, як бачимо, положення рівноваги нестійке.

3. Якщо в околі точки c^* похідна $f(c)$ не змінює знак, то за такої ситуації з одного боку від положення рівноваги $c = c^*$ значення c_n наближаються до c^* , а з іншого боку від прямої $c = c^*$ значення c_n віддаляються від c^* (рис. 3.8 і 3.9). Отже, положення рівноваги буде теж нестійким.

Для дослідження стійкості положення рівноваги системи з двох і більше диференціальних рівнянь відомим математиком О. М. Ляпуновим (1857–1918) розроблений спеціальний метод [11, 12, 106, 138, 139, 141].

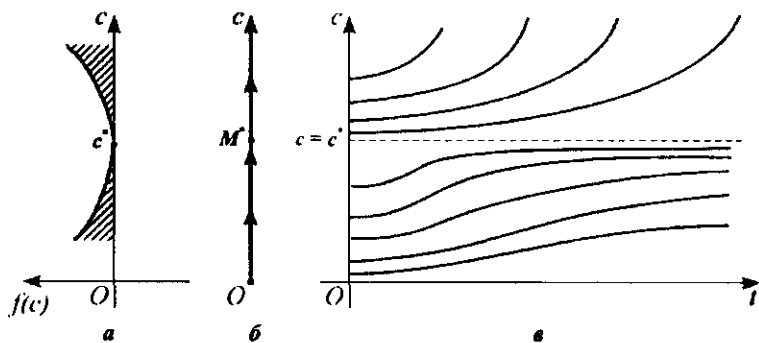


Рис. 3.8

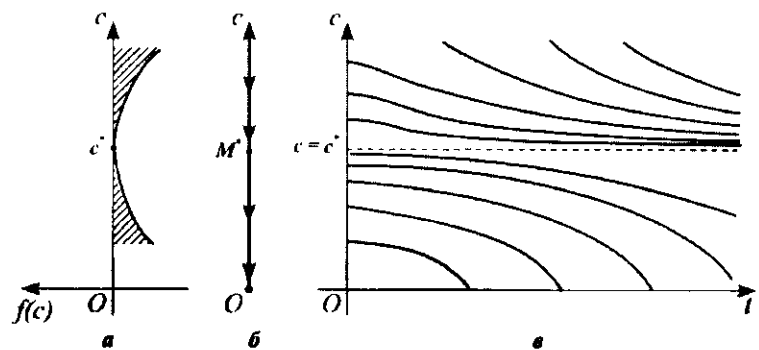


Рис. 3.9

Динамічні системи, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь типу (3.3.1), (3.3.2) або (3.3.3), називаються **точковими системами**, або **точковими моделями**. Це означає, що в усіх точках простору для такої системи значення концентрації однієї і тієї ж речовини (або щільності популяції) рівні в кожен момент часу.

Більш загальними є моделі, що описують зміну концентрації речовини не тільки в часі, а й у просторі, коли на розподіл речовин впливають дифузійні або інші процеси. Такі моделі розглядатимуться в розділі 6.

3.4. Моделювання динаміки чисельності окремих популяцій

3.4.1. Експоненціальний закон

Розглянемо, як будуються найпростіші математичні моделі, що вперше почали застосовуватись у біології та екології (моделі, що були запропоновані В. Вольтеррою [24] і А. Лоткою [187] для описування розвитку популяцій при взаємодії типу «хижак – жертва» розглядатимуться у підпункті 3.6.2). Нагадаємо, що **популяцією називають будь-яку групу організмів одного виду, що протягом великого числа поколінь займає певний простір і може функціонувати (розмножуватись і розвиватись) за певних умов навколишнього природного середовища. Популяція – це елементарна одиниця еволюційного процесу і форма існування виду, це множина (група) організмів, що мають властивість саморозмноження.**

Популяції мають властивості, притаманні як самій популяції (щільність, народжуваність, смертність, вікова структура, генетика, пристосованість), так і окремим організмам (життєвий цикл, репродукція та ін.).

Біотичне угруповання, в свою чергу, визначається як сукупність популяцій, що функціонує як цілісна одиниця у відведеному йому просторі фізичного природного середовища.

Під **щільністю** популяції розуміють число особин (організмів) на одиницю площі або об'єму, наприклад 500 дерев на га, 200 кг риби на га або 5 млн діатомей на м³ води. Якщо знехтувати віковими, статевими і генетичними відмінностями, то щільність певного виду досліджуваних організмів може бути повністю математично описана однією змінною величиною – числом особин на одиницю площі. Всі популяції дуже мінливі, тобто їх чисельність (щільність) з часом зазнає змін. Навіть у тому випадку, коли угруповання (популяція) та екосистема вбачаються незмінними, щільність, народжуваність, рівень виживання (смертність), вікова структура, швидкість росту та інші характеристики, як правило, змінюються залежно від зміни сезону, клімату та інших факторів навколишнього середовища. Екологів найбільше

цікавить те, з якою швидкістю відбувається зміна чисельності популяції або її певної вікової групи. *Середня швидкість розмноження популяції* визначається як відношення зміни кількості організмів (особин) ΔN до проміжку часу Δt , протягом якого відбулася ця зміна (збільшення або зменшення, в останньому випадку ΔN береться зі знаком мінус). *Миттєва (істинна) швидкість* $V = \frac{dN}{dt}$ розмноження особин або просто швидкість розмноження організмів у деякий момент часу t визначається як межа середньої швидкості за умови необмеженого зменшення проміжку часу Δt , тобто:

$$V = \frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t}. \quad (3.4.1)$$

Таким чином, швидкість розмноження популяції є похідною за часом від кількості особин, що розглядається як функція часу (віку особин або віку популяції), тобто $N = f(t)$, $V = f'(t)$.

Крім уже згаданих кількісних величин, при формалізації закономірностей розмноження популяцій розглядають також певну так звану питому швидкість розмноження r , яка дорівнює зміні числа особин за одиницю часу з розрахунку на одну особину (організм), тобто:

$$r = \frac{\Delta N}{N \Delta t}. \quad (3.4.2)$$

Якщо розглядати випадок, коли для розмноження популяції створені найсприятливіші умови і відсутні лімітуючі фактори, то швидкість зростання чисельності популяції може бути описана диференціальним рівнянням

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad (3.4.3)$$

що виражає закон *прямої пропорційності швидкості розмноження* кількості особин (організмів) цієї популяції, причому параметр r в рівнянні (3.4.3) часто називають коефіцієнтом швидкості розмноження популяції (або угруповання). Рівняння (3.4.3) вперше в 1802 р. одержав англійський священик Томас Мальтус. Помилка Мальтуса полягала в тому, що він це рівняння, яке справедливе для певного класу популяцій (про що йтиметься далі), вважав універсальним законом не тільки для всієї природи, але й для суспільства людей.

Для розв'язання (інтегрування) диференціального рівняння (3.4.3) розділимо в ньому змінні N і t , а саме:

$$\frac{dN}{N} = rdt, \quad \int \frac{dN}{N} = \int rdt + A.$$

Після інтегрування одержимо:

$$\ln N = rt + \ln a, \quad A = \ln a.$$

З останньої рівності після потенціювання одержимо:

$$N = ae^{rt}.$$

Якщо відома чисельність популяції $N = N_0$ в початковий момент часу $t = t_0$, то, підставивши в останню рівність ці значення, одержимо:

$$N_0 = ae^{rt_0}, \quad a = N_0 e^{-rt_0}.$$

Отже, після розв'язання (інтегрування) рівняння (3.4.3) знаходимо шукану функцію у такому вигляді:

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}, \quad (3.4.4)$$

де N_0 – чисельність популяції у початковий момент часу $t = t_0$, $e = \exp$ – основа натуральних логарифмів, число e називається неперовим числом і дорівнює $e = 2,718282... \approx 2,72$

Для визначення коефіцієнта r (питомої швидкості розмноження) необхідно прологарифмувати обидві частини рівності (3.4.4) і записати це так:

$$\ln N = \ln N_0 + r(t - t_0). \quad (3.4.5)$$

Користуючись рівнянням (3.4.5), можна обчислити значення r за двома відомими значеннями величин N_1 і N_2 у будь-які два моменти часу $t_0 = t_1$ і t_2 ($\Delta t_2 = t_1 - t_2$):

$$r = \frac{\ln N_2 - \ln N_1}{t_2 - t_1}, \quad t_1 - t_2 = \Delta t_2. \quad (3.4.6)$$

Експоненціальна функція (3.4.4) добре описує розмноження (зростання) колоній деяких бактерій до виснаження культурального середовища (їжі). Графік цієї функції називається *кривою зростання (розмноження) популяції* (рис 3.10). Число особин, що визначається цією кривою (рис. 3.10),

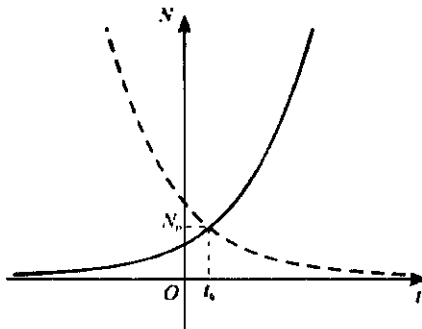


Рис. 3.10

можна також зобразити відповідно до рівності (3.4.5) в логарифмічному масштабі (рис 3.11)

З іншого боку, питому швидкість розмноження параметр r можна біологічно інтерпретувати як різницю між питомою швидкістю народження « b » (birth) і питомою швидкістю смертності « d » (death).

$$r = b - d. \quad (3.4.7)$$

Показник r часто використовують для кількісної характеристики

репродуктивної пристосованості організмів у генетичному розумінні і називають **біотичним потенціалом**, тобто цей показник (параметр) характеризує вроджену властивість організмів до розмноження та виживання. За природних умов у короткочасні періоди, коли мається достатньо їжі, відсутні скупченість і хижаки-вороги, для популяції часто проявляється експоненціальний характер зростання чисельності. За таких умов уся популяція зростає з величезною швидкістю, хоча при цьому кожен організм розмножується з постійною швидкістю (питома швидкість розмноження є сталою $r = \text{const}$).

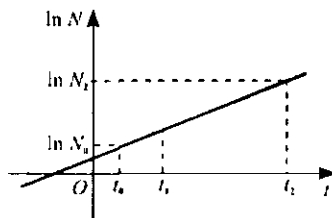


Рис. 3.11

Багато явищ природи, такі як «цвітіння» води у водоймищах, спалах (вибух) чисельності шкідників, розмноження бактерій та інших мікроорганізмів, супроводжується зростанням чисельності організмів згідно з експоненціальним законом. За сприятливих неконтрольованих умов потомство однієї пари мух через кілька років важило б більше, ніж земна куля [46]. Відзначимо також, що експоненціальний характер спостерігається для багатьох інших процесів і явищ природи, таких як поглинання світла, мономолекулярні хімічні реакції, зростання складних процентів та ін. Проте, як уже було вказано, сприятливі для розмноження умови не можуть довго існувати через вплив навколишнього середовища, присутність ворогів (хижаків) та інших несприятливих для життя їєї чи іншої популяції факторів. Взаємодія популяції з іншими та вплив зовнішнього середовища значно змінює швидкість зростання її чисельності і змінює характер закономірності розмноження цієї популяції (або угруповання). Зокрема, якщо питома швидкість смертності d перевищує питому швидкість народження b , то величина $r = b - d$ буде від'ємною і розв'язок рівняння (3.4.3) запишеться у такому вигляді:

$$N(t) = N_0 e^{-r(t-t_0)}, \quad r = d - b > 0 \quad (3.4.8)$$

Графік функції (3.4.8) буде спадною кривою з асимптотою $N = 0$ (на рис. 3.10 пунктирна лінія).

3.4.2. Логістичне рівняння

Отже, оскільки після інтенсивного зростання чисельність популяції може стабілізуватися на деякому стійкому рівні, то в даному разі доцільно зростання чисельності (розмноження) популяції описувати так званим логістичним рівнянням:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2, \quad (3.4.9)$$

яке часто записується в такому вигляді:

$$\frac{dN}{dt} = rN \frac{K - N}{K}, \quad (3.4.10)$$

де через r , як уже зазначалось, позначено питому швидкість розмноження, а через $K = N_{\max}$ – максимально можливу чисельність популяції (угруповання). На відміну від лінійного диференціального рівняння (3.4.3), рівняння (3.4.9) є нелінійним диференціальним рівнянням, а нелінійні залежності краще описують реальні об'єкти. З іншого боку, нелінійні моделі складніші, і тому їх аналіз має певні, часом досить значні труднощі.

Розділивши змінні в рівнянні (3.4.10), одержимо рівняння:

$$\frac{KdN}{N(K - N)} = rdt, \quad (3.4.11)$$

яке, враховуючи співвідношення

$$\frac{1}{N(K - N)} = \frac{1}{KN} + \frac{1}{K(K - N)}, \quad (3.4.12)$$

запишемо в такому вигляді:

$$\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N} \right) dN = rdt. \quad (3.4.13)$$

Після інтегрування рівняння (3.4.13) одержимо

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N} \right) dN = \int rdt + A, \\ \ln N - \ln(K - N) = rt + \ln a, \quad \ln a = A, \\ \ln \frac{N}{K - N} = rt + \ln a.$$

З останньої рівності знаходимо

$$\frac{N}{K - N} = a e^{rt}. \quad (3.4.14)$$

Якщо відомо, що при $t = 0$ число особин було $N = N_0$, то за допомогою рівності (3.4.14) знайдемо параметр a :

$$a = \frac{N_0}{K - N_0}. \quad (3.4.15)$$

Розв'язавши рівняння (3.4.14) відносно N , знайдемо шукану функцію $N = f(t)$ у такому вигляді:

$$N(t) = \frac{aK e^{rt}}{1 + a e^{rt}}, \quad (3.4.16)$$

50 після ділення чисельника і знаменника правої частини на e^{-rt} одержимо:

$$N(t) = \frac{aK}{a + e^{-rt}}, \quad a = \frac{N_0}{K - N_0} \quad (0 < a < \infty). \quad (3.4.17)$$

Функцію (3.4.17) можна записати і в такому вигляді:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \exp(b - rt)}, \quad (3.4.18)$$

де стала інтегрування b визначається рівністю:

$$b = \ln \frac{1}{a} = \ln \frac{K - N_0}{N_0}. \quad (3.4.19)$$

Розв'язок (3.4.18) логістичного рівняння (3.4.10) зображається сигмовидною кривою, яка називається *логістичною кривою* (рис. 3.12). Асимптотою кривої є пряма $N = K$.

Логістичне рівняння вперше було запропоноване Ферхюльстом [194] в 1838 р. Ним також користувався Лотка [187], а потім майже через 100 років його «перевідкрили» Перл і Рід [191]. Рівняння Ферхюльста–Перла (3.4.9) враховує так званий ефект самоотруснення популяції, або точніше, внутрішню боротьбу (конкуренцію) в популяції, яка описується членом $-r \frac{N^2}{K}$.

Розв'язок (3.4.18)–(3.4.19) має дві важливі властивості:

1) при малих значеннях чисельності (або біомаси) популяції зростання відбувається за експоненціальним законом, як і у випадку рівняння (3.4.4);

2) з часом чисельність популяції асимптотично наближається до деякого постійного числа K , перевищити яке чисельність популяції не може (число K називається *смістю середовища*).

Потрібно зазначити, що більшість біологічних процесів за сприятливих і стабільних природних умов дуже добре описується логістичним рівнянням, причому максимальний рівень розмноження популяції визначається *смістю середовища* K , а швидкість розмноження (крутість сигмоподібної кривої і положення точки перегину M_0) залежить від величини $r = b - d$ (рис. 3.12).

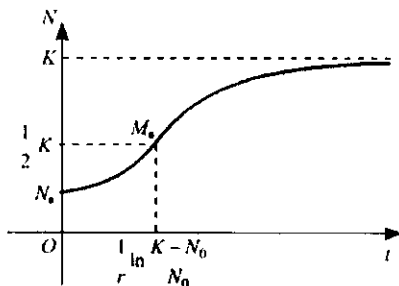


Рис. 3.12

3.5. «Жорсткі» та «м'які» математичні моделі динаміки популяцій

3.5.1. Дослідження найпростіших моделей

Як було показано в попередньому розділі, найпростіша математична модель розмноження популяції, що була запропонована Томасом Мальтусом для прогнозування чисельності населення на Землі, має такий вигляд

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (r = b - d) \quad (3.5.1)$$

і відповідає реальному процесу зростання чисельності особин (організмів) певної популяції тільки на початковому етапі розвитку. Значне зростання чисельності популяції призводить до загострення конкуренції за ресурси (їжа, простір і т. ін.), що, в свою чергу, впливає на збільшення смертності d і зменшення параметра r (питома швидкість розмноження). Про параметр народжуваності b складно щось говорити, оскільки його величина залежить в основному від фізіологічних властивостей організмів, закладених природою.

Отже, модель Мальтуса досить «жорстка» і не може описувати зростання популяції протягом тривалого періоду. «Жорсткість» цієї моделі пов'язана з параметром r , який вважається сталим. Тому «жорстку» модель Мальтуса доцільно замінити іншою, так званою «м'якою» моделлю

$$\frac{dN}{dt} = r(N)N, \quad (3.5.2)$$

де параметр $r(N)$ розглядається як змінна величина, що залежить від чисельності популяції і може враховувати зворотний зв'язок, який може набутися такого вигляду

$$r(N) = b - aN = r_0 - \frac{r_0 N}{K} \quad (3.5.3)$$

Внаслідок таких уточнень і заміни постійного («жорсткого») параметра r змінним («м'яким»), одержимо так звану логістичну модель розвитку популяції (3.4.10), яку запишемо в такому вигляді

$$\frac{dN}{dt} = r(N)N = (b - aN)N = r_0 \left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \quad K = N_{\max} \quad (3.5.4)$$

Зауважимо, що тут, як і в (3.5.3), для зручності покладено $b = r_0$, $a = \frac{r_0}{K}$.

Побудуємо паралельно три графіки: графік залежності швидкості розмноження популяції від її чисельності, фазову траєкторію, графік динаміки чисельності популяції залежно від часу (інтегральну криву) для обох моделей (рис. 3.13 і 3.14).

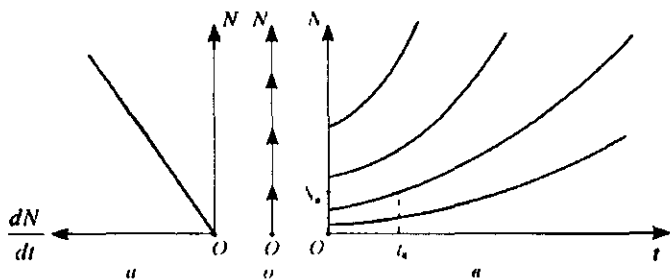


Рис. 3.13

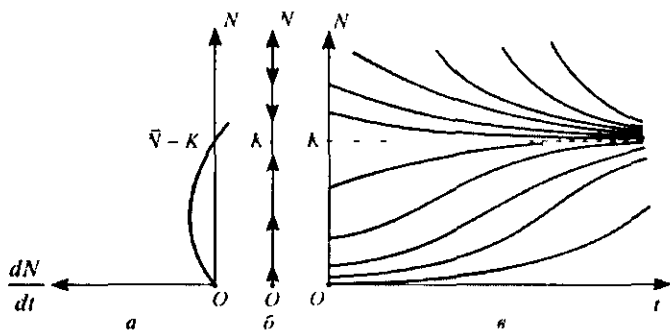


Рис. 3.14

Для логістичної моделі в точках O і K швидкість розмноження популяції дорівнює нулю, це стаціонарні точки. Логістична модель прогнозує, що з часом установлюється стаціонарний (рівноважний) режим $N = K$, який є стиком. Кількість особин, що перевищує K , зменшується, а кількість особин, що менша за K , збільшується (рис. 3.14, б). Населення Землі зараз наближається до 6 млрд, стаціонарне значення за різними оцінками вчених становить 16–20 млрд осіб.

3.5.2. Оптимізація параметрів для «жорстких» і «м'яких» моделей

Логістична модель є значним розширенням експоненціального закону. Але вона теж має певні рамки застосування. Нехай логістична модель (3.5.4) описує розмноження популяції риб в озері або іншому водоймищі. Якщо на кількість риб впливають тільки природні фактори, то за певних сприятливих природних умов чисельність риб можна підрахувати або спрогнозувати за допомогою моделі (3.5.4). Але, якщо в розвиток риб втручалась людина, наприклад, якщо щорічно виловлюється q одиниць риб, то замість моделі (3.5.4) потрібно розглянути таку модель:

$$\frac{dN}{dt} = r_0 N - \frac{r_0}{K} N^2 - q \quad (3.5.5)$$

За допомогою заміни змінних

$$N = KB, \quad t = \frac{\tau}{r_0}, \quad q = r_0 K Q \quad (3.5.6)$$

рівняння (3.5.5) приведемо до простішого і зручнішого для досліджень вигляду

$$\frac{dB}{d\tau} = B - B^2 - Q \quad (3.5.7)$$

Модель популяції риб (3.5.7) описує динаміку чисельності риб у нових умовах, коли починає діяти антропогенний вплив. Побудуємо паралельно графік зміни швидкості розмноження, фазову пряму і графік динаміки популяції риб у нових умовах при різних значеннях інтенсивності вилову риб Q (рис. 3.15–3.17).

Стационарний режим (він же й оптимальний) обчислюється з рівняння

$$B - B^2 - Q = 0 \quad (3.5.8)$$

Корені рівняння визначаються рівністю

$$B_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - Q} \quad (3.5.9)$$

Залежно від значень Q матимемо різні корені рівняння (3.5.9). Так при $Q = \frac{1}{4}$ рівняння (3.5.9) має один корінь $B = \frac{1}{2}$. Отже, для «жорсткої» моделі (3.5.7) значення інтенсивності $Q = \frac{1}{4}$ призводить до одного стационарного режиму будь-яке початкове значення чисельності популяції $B \geq \frac{1}{2}$ з часом виходить на стационарний режим $B = \frac{1}{2}$. Але цей стационарний режим є нестійким: невелике випадкове зменшення чисельності $B < \frac{1}{2}$ призводить до повного знищення популяції за обмежений відрізок часу (рис. 3.15).

При великому вилові $Q > \frac{1}{4}$ популяція знищується за певний проміжок часу, якою б великою вона не була в початковий момент (рис. 3.16).

При малій інтенсивності вилову $Q < \frac{1}{4}$ маємо два стационарні (рівноважні) режими B_1 і B_2 (рис. 3.17). Стационарний режим при чисельності популяції B_2 є стійким: чисельність популяції у цьому випадку дещо

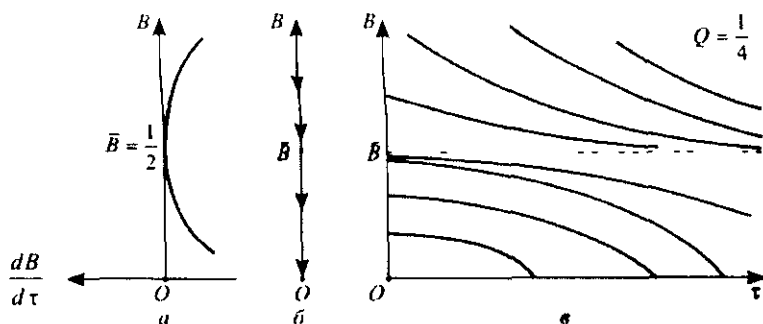


Рис. 3.15

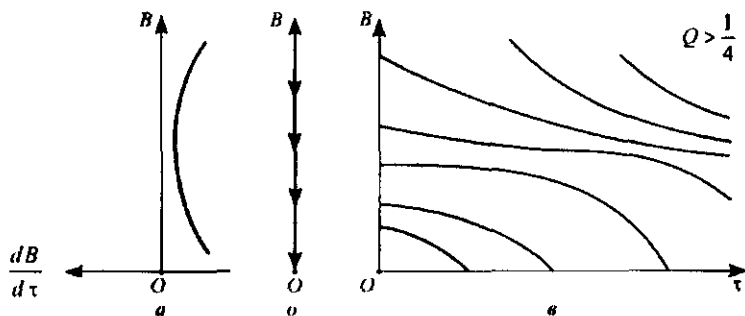


Рис. 3.16

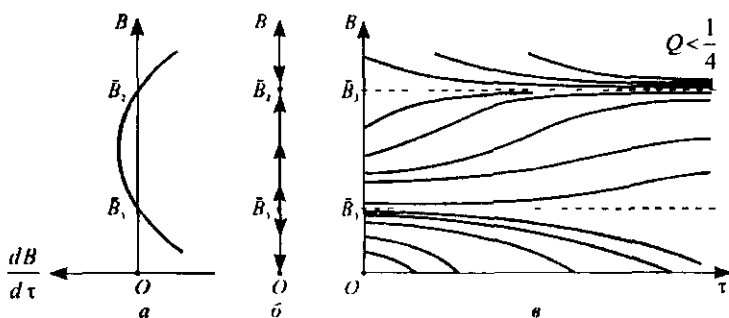


Рис. 3.17

менша, ніж чисельність популяції при відсутності вилову, але її кількість швидко відновлюється при малих відхиленнях від рівноваги. Стационарний режим при чисельності популяції B_1 є нестійким, якщо чисельність популяції спаде, хоча б трохи, нижче B_1 , то в наступний період популяція буде повністю знищена (рис. 3.17).

Як бачимо, оптимізація параметрів планування вилову риби призводить до повного знищення жорстко регульованої системи внаслідок виникнення

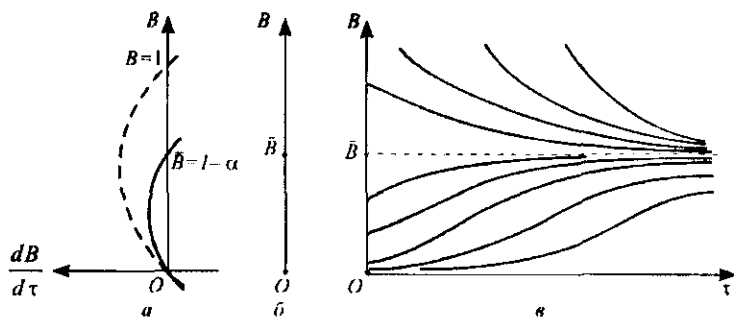


Рис. 3.18

нестійких режимів, що з'являються при оптимізації. Проте побудова «м'якої» моделі дозволяє боротися з виникненням нестійких режимів. Для цього потрібно замінити «жорстке» планування вилову «м'яким», що враховує зворотний зв'язок, тобто величина вилову повинна залежати від досягнутої чисельності популяції. Нехай ця залежність має такий вигляд

$$Q = \alpha B, \quad (3.5.10)$$

де параметр α (диференційована квота) підлягає вибору.

У даному разі модель (3.5.5) набуває такого вигляду:

$$\frac{dB}{d\tau} = B - B^2 - \alpha B, \quad (3.5.11)$$

де $\alpha > 0$.

Стационарний режим $B = 1 - \alpha$ буде стійким при $\alpha < 1$ (рис. 3.18).

При стационарному режимі чисельність популяції риб визначається з рівняння:

$$B - B^2 - \alpha B = 0, \quad (3.5.12)$$

тобто:

$$B_0 = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.5.13)$$

Отже, інтенсивність вилову при стационарному режимі дорівнює:

$$Q = \alpha B_0 = \alpha(1 - \alpha). \quad (3.5.14)$$

Знайдемо величину значення параметра α при максимальному вилові риби. Для цього прирівняємо до нуля похідну інтенсивності вилову (3.5.14), що розглядається як функція параметра α :

$$\frac{dQ}{d\alpha} = 1 - 2\alpha = 0. \quad (3.5.15)$$

Звідси знаходимо:

$$\alpha = \frac{1}{2}. \quad (3.5.16)$$

Таким чином, максимальна інтенсивність вилову Q_{\max} досягається при $\alpha = \frac{1}{2}$, тобто вона дорівнює $Q_{\max} = \frac{1}{4}$.

Як і у випадку «жорсткого» параметра Q дослідження «м'якої» моделі, коли $Q = \alpha B$, приводить до того самого результату: оптимальне значення інтенсивності дорівнює $Q = \frac{1}{4}$. Але, на відміну від «жорсткого» планування вилову ($Q = \frac{1}{4}$), новий принцип вилову риби з інтенсивністю $Q = \alpha B$, що враховує зворотний зв'язок, не порушує стійкості системи (популяції), і при оптимальному значенні коефіцієнта α незначні зменшення початкової чисельності риби щодо стаціонарного режиму $B = B_0 = 1 - \alpha$ приводять до автоматичного відновлення стаціонарного режиму природою самої системи (рис. 3.18, в). Більше того, невелике відхилення коефіцієнта α від оптимального $\alpha = \frac{1}{2}$ не приводить до самознищення популяції, а тільки зменшує величину прибутку (інтенсивність вилову Q). Результати таких досліджень «м'якої» (гнучкої) моделі залишаються справедливими і для складніших «м'яких» моделей. Тому прості «м'які» моделі досить корисні як для моделювання багатьох складних процесів, так і для управління (регулювання) ними.

3.6. Динаміка біоценозів як наслідок міжвидових взаємовідносин

3.6.1. Основні типи взаємовідносин

Під біоценозом, як правило, розуміють угруповання таких популяцій біологічних видів, які взаємодіють між собою і беруть істотну участь у функціонуванні екосистеми. В біоценоз включаються не тільки ті види рослин, тварин і мікроорганізмів, які постійно мешкають у даній екосистемі, а й види, що проживають у ній тільки певний час свого життєвого циклу, але істотно впливають на стан екосистеми. Представники кожного виду здатні існувати лише в такому біотичному оточенні, де зв'язки з іншими організмами забезпечують їм нормальні умови життя. Серед величезного розмаїття взаємовідносин живих істот можна виділити певні типи відносин, які найчастіше зустрічаються у середовищі організмів, популяцій і біоценозів. Саме знання цих типів взаємовідносин дозволяє вивчати динаміку популяцій за допомогою математичного моделювання.

Як уже не раз підкреслювалось, при побудові математичних моделей насамперед застосовуються ті закони і співвідношення, які важко заперечувати і які певною мірою мають абсолютний характер. Останнім часом при побудові моделей біологічних угруповань (біоценозів) різних видів організмів широко використовується добре відома в екології така класифікація взаємовідносин між видами:

1 *Хижацтво* (+, -) один вид («хижак») пригнічує розвиток іншого виду («жертви»), а інший вид («жертва») прискорює розвиток першого («хижака»)

2 *Конкуренція* (,) кожен з видів має пригнічуючий (негативний) вплив на розвиток іншого виду, хоча існує і внутрішньовидова конкуренція

3 *Симбіоз* (+, +) або *коменсализм* (+, 0) кожен з видів прискорює зростання (розвиток) іншого або один вид дістає вигоду, не завдаючи іншому шкоди, але й не приносячи користі

Якщо розвиток (розмноження) однієї популяції можна, як уже було показано, описати експоненціальним або логістичним рівнянням, тобто одним з рівнянь

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad \frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2, \quad (3.6.1)$$

то вплив іншої популяції можна описати ще одним додатковим членом, який змінює розвиток першої популяції. Вигляд цього члена рівняння залежить від виду взаємовідносин між популяціями.

Нехай маємо дві популяції чисельністю N_1 і N_2 , які взаємодіють між собою. Розмноження кожної з цих популяцій будемо описувати логістичним рівнянням, а їхню взаємодію опишемо членом, пропорциональним добутку $N_1 N_2$. Тоді, у випадку взаємовідносин типу «хижацтво» динаміка популяцій опишеться такою системою диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1^2 + \gamma_1 N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 - \frac{r_2}{K_2} N_2^2 - \gamma_2 N_2 N_1 \end{aligned}$$

У випадку взаємовідносин типу «конкуренція» динаміка популяцій опишеться системою

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1^2 - \gamma_1 N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 - \frac{r_2}{K_2} N_2^2 - \gamma_2 N_2 N_1 \end{aligned}$$

Нарешті, при взаємовідносинах типу «симбіоз» динаміка популяцій опишеться наступною системою рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1^2 + \gamma_1 N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 - \frac{r_2}{K_2} N_2^2 + \gamma_2 N_2 N_1\end{aligned}$$

3 6 2 Математичні моделі популяцій при взаємовідносинах «хижак – жертва»

Перевага наведеної класифікації взаємовідносин в її простоті й логічності. Використовуючи її, розглянемо найпоширенішу в природі систему двох популяцій (або видів). Особини однієї з них стають їжею для особин іншої, тобто маємо взаємодію типу «хижак – жертва». Крім балансових рівнянь чисельності або біомас, що одержуються згідно із законом збереження речовин (або енергії), необхідно ще знати швидкості споживання жертви хижаком (швидкість видання), яка звичайно залежить як від кількості жертв, так і від кількості хижаків. Цю залежність в екології, зокрема в гідроекології, називають *трофічною функцією* або *трофічним коефіцієнтом*. Зрозуміло, що вигляд цієї функції залежить від багатьох факторів, передусім таких, як мисливська стратегія хижака, захисна реакція жертви, наявність схованок для жертви тощо.

Вперше диференціальне рівняння (математична модель), що описує взаємодію «хижак – жертва» було одержано італійським математиком Віто Вольтерра [11], якої не випадково називають батьком математичної екології. Рівняння, як правило, складається відносно чисельності популяції або відносно біомаси організмів. Розглянемо найпростіші і найпоширеніші з них, лінійні диференціальні рівняння.

Позначимо чисельність (або біомасу) однієї популяції («жертви») через B , а іншої популяції («хижака») через P . Спочатку розглянемо випадок, коли хижак розмножується за експоненціальним законом і впливає на жертву, яка має доступ до сталого запасу харчів. У даному разі динаміку взаємодії двох популяцій можна описати такою системою лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dB}{dt} = \alpha_1 B - m_1 B - \gamma_1 P, \quad (3\ 6\ 2)$$

$$\frac{dP}{dt} = r_2 P, \quad r_2 = \gamma_2 - m_2, \quad (3\ 6\ 3)$$

де α_1 – коефіцієнт засвоєння їжі «жертвою», m_1, m_2 – коефіцієнти смертності відповідно «жертви» і «хижака», γ_1, γ_2 – коефіцієнти ви-

визначення (поїдання) «жертви» «хижаком» та коефіцієнт засвоєння їжі «хижаком».

Розв'язок рівняння (3.6.3) має вигляд:

$$P(t) = P_0 e^{r_2 t}, \quad r_2 = \gamma_2 - m_2. \quad (3.6.4)$$

Враховуючи розв'язок (3.6.4), рівняння (3.6.2) запишемо у вигляді:

$$\frac{dB}{dt} = \alpha_1 Q_1 - m_1 B - \gamma_1 P_0 e^{r_2 t}. \quad (3.6.5)$$

Щоб знайти розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (3.6.5), скористаємось розв'язком відповідного лінійного однорідного рівняння:

$$\frac{dB}{dt} = -m_1 B, \quad (3.6.6)$$

яке запишемо у вигляді:

$$B(t) = A e^{-m_1 t}, \quad A = \text{const}. \quad (3.6.7)$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (3.6.5) шукатимемо методом варіації сталої (методом Лагранжа), тобто загальний розв'язок визначатимемо за таким рівнянням:

$$B(t) = A(t) e^{-m_1 t}, \quad (3.6.8)$$

де $A(t)$ – поки що невідома функція.

Знайдемо похідну:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dA}{dt} e^{-m_1 t} - A(t) m_1 e^{-m_1 t}. \quad (3.6.9)$$

Підставивши (3.6.8) і (3.6.9) в рівняння (3.6.5), одержимо:

$$\frac{dA}{dt} e^{-m_1 t} - A(t) m_1 e^{-m_1 t} = \alpha_1 Q_1 - m_1 A(t) e^{-m_1 t} - \gamma_1 P_0 e^{r_2 t}$$

або

$$\frac{dA}{dt} = \alpha_1 Q_1 e^{m_1 t} - \gamma_1 P_0 e^{(m_1 + r_2)t}. \quad (3.6.10)$$

Після інтегрування рівняння (3.6.10) одержимо:

$$A(t) = \frac{\alpha_1 Q_1}{m_1} e^{m_1 t} - \frac{\gamma_1 P_0}{m_1 + r_2} e^{(m_1 + r_2)t} + A_1. \quad (3.6.11)$$

Отже, розв'язок (3.6.8) з урахуванням знайденої функції (3.6.11) матиме такий вигляд:

$$B(t) = \frac{\alpha_1 Q_1}{m_1} e^{m_1 t} - \frac{\gamma_1 P_0}{m_1 + r_2} e^{r_2 t} + A_1 e^{-m_1 t}. \quad (3.6.12)$$

Якщо відома початкова умова $B = B_0$,
впли $t = 0$, то з рівності (3.6.12) одер-
жимо:

$$B_0 = \frac{\alpha_1 Q_1}{m_1} - \frac{\gamma_1 P_0}{m_1 + r_2} + A_1,$$

звідки знаходимо невідому сталу A_1 :

$$A_1 = B_0 - \frac{\alpha_1 Q_1}{m_1} + \frac{\gamma_1 P_0}{m_1 + r_2}. \quad (3.6.13)$$

Враховуючи вираз (3.6.13), знаходимо
із загального розв'язку (3.6.12) шука-
ний розв'язок у такому вигляді:

$$B(t) = \frac{\alpha_1 Q_1}{m_1} - \frac{\gamma_1 P_0}{m_1 + r_2} e^{r_2 t} + \left(B_0 - \frac{\alpha_1 Q_1}{m_1} + \frac{\gamma_1 P_0}{m_1 + r_2} \right) e^{-m_1 t}, \quad r_2 = \gamma_2 - m_2. \quad (3.6.14)$$

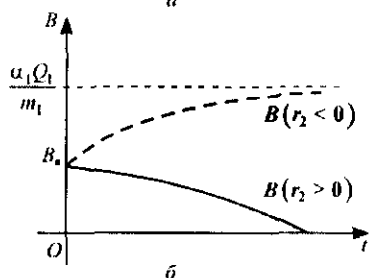
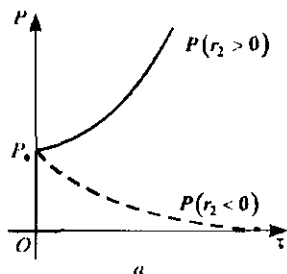


Рис. 3.19

Отже, функції (3.6.4) і (3.6.14) є шуканим розв'язком системи рівнянь (3.6.2)–(3.6.3), що описує динаміку двох видів популяції, між якими існують взаємовідносини типу «хижак – жертва». На рис. 3.19 зображено графіки функцій P і B , що є розв'язком системи (3.6.2)–(3.6.3) для різних співвідношень параметрів r_2 , m_1 , m_2 .

Якщо друга популяція («хижак»), як і перша, одержує сталий запас кор-
мів, то відповідна математична модель описуватиметься такою системою
диференціальних рівнянь:

$$\frac{dB}{dt} = \alpha_1 Q_1 - m_1 B - \gamma P, \quad (3.6.15)$$

$$\frac{dP}{dt} = \alpha_2 Q_2 - m_2 P, \quad (3.6.16)$$

де α_1 , α_2 – коефіцієнти засвоєння їжі, m_1 , m_2 – коефіцієнти смертності,
 γ – коефіцієнт поїдання (пригнічення).

Проводячи викладки, аналогічні попередньому випадку, одержимо
розв'язок цієї системи в такому вигляді:

$$B(t) = \frac{\alpha_1 m_2 Q_1 - \alpha_2 \gamma Q_2}{m_1 m_2} - \frac{\gamma (m_2 P_0 - \alpha_2 Q_2)}{(m_1 - m_2) m_2} e^{-m_2 t} + \left(B_0 - \frac{\alpha_1 m_2 Q_1 - \alpha_2 \gamma Q_2}{m_1 m_2} + \frac{\gamma (m_2 P_0 - \alpha_2 Q_2)}{(m_1 - m_2) m_2} \right) e^{-m_1 t}, \quad (3.6.17)$$

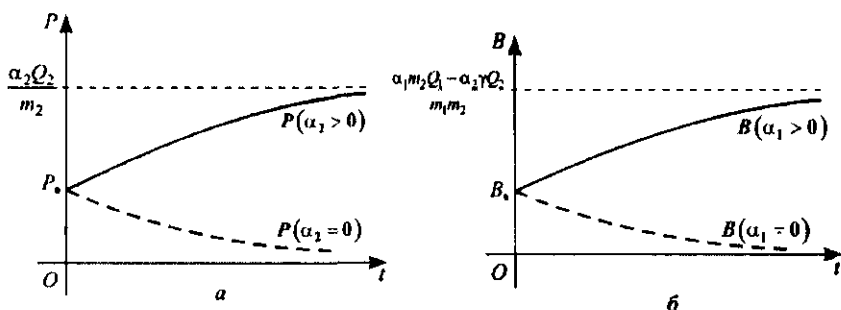


Рис. 3.20

$$P(t) = \frac{\alpha_2 Q_2}{m_2} + \left(P_0 - \frac{\alpha_2 Q_2}{m_2} \right) e^{-m_2 t}. \quad (3.6.18)$$

Якщо припустимо, що $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (закрита екосистема), то система рівнянь (3.6.15) (3.6.16) набуде такого вигляду:

$$\frac{dB}{dt} = -m_1 B - \gamma P, \quad (3.6.19)$$

$$\frac{dP}{dt} = -m_2 P. \quad (3.6.20)$$

а її розв'язок одержимо з розв'язку (3.6.17), (3.6.18) в такому вигляді:

$$B(t) = -\frac{\gamma P_0}{m_1 - m_2} e^{-m_2 t} + \left(B_0 + \frac{\gamma P_0}{m_1 - m_2} \right) e^{-m_1 t}, \quad (3.6.21)$$

$$P(t) = P_0 e^{-m_2 t}, \quad (3.6.22)$$

де B_0, P_0 – початкова кількість тварин (організмів) одного і другого видів.

На рис. 3.20 зображено графіки функцій $B(t)$ і $P(t)$ для різних співвідношень параметрів $\alpha_1, \alpha_2, m_1, m_2$, що входять у розв'язок системи (3.6.15), (3.6.16).

3.6.3. Структура трофічної функції

В. Вольтерра розглянув систему рівнянь, що описує взаємодію жертви з чисельністю (або біомасою) X і хижака з чисельністю Y в такому вигляді

$$\frac{dX}{dt} = aX - bX^2 - cXY, \quad (3.6.23)$$

$$\frac{dY}{dt} = -eY + dXY. \quad (3.6.24)$$

В разі відсутності хижака ($Y = 0$) зростання чисельності (або щільності) жертви відбувається за логістичним рівнянням з питомою швидкістю розмноження a і смістю середовища $\frac{a}{b}$. Член $(-bX^2)$ описує дію пригнічення розвитку популяції за рахунок внутрішньої конкуренції. Цей член часто називають *демпфруючим*, тобто таким, що зменшує амплітуду коливання, яке спостерігається в техніці. Через b і e позначено коефіцієнти смертності, а параметри c і d називають трофічними коефіцієнтами (або функціями).

Останнім часом для моделювання системи «хижак - жертва» або «споживач - ресурс» широко застосовується така система рівнянь:

$$\frac{dR}{dt} = Q - V(R, N)N, \quad (3.6.25)$$

$$\frac{dN}{dt} = -mN + kV(R, N)N, \quad (3.6.26)$$

де R - кількість ресурсу, N - кількість (біомаса) особин популяції споживачів, Q - швидкість надходження ресурсу в систему, $V(R, N)$ - трофічна функція, яка моделює швидкість споживання ресурсу однією особиною популяції (питома швидкість споживання), $k < 1$ - частина ресурсу, що використовується на продуктивні цілі, m - коефіцієнт смертності, який обернено пропорціональний середній тривалості життя особин в певних умовах навколишнього середовища. Найпростіша ситуація, коли величини Q , k і m стали

Відносно вибору трофічної функції $V(R, N)$ зустрічаються різні міркування, окремі з яких були розглянуті в попередніх випадках. Приймають також, що трофічна функція залежить тільки від R , причому в нулі вона дорівнює нулю, а при збільшенні R вона зростає і асимптотично прямує до величини $V = A$ (рис. 3.21). Останнє обмеження відображає той факт, що навіть за великої кількості ресурсу швидкість його споживання завжди обмежена. Як свідчать результати багатьох реальних спостережень, усю різноманітність трофічних функцій можна розділити в основному на два великих класи (типи) до першого належать обмежені функції з опуклим догори графіком (рис. 3.21, а), а до другого класу - обмежені функції з сигмоподібним графіком (рис. 3.21, б). Перший клас трофічних функцій характерний для безхребетних хижаків і багатьох видів хижих риб, другий клас - для популяції та

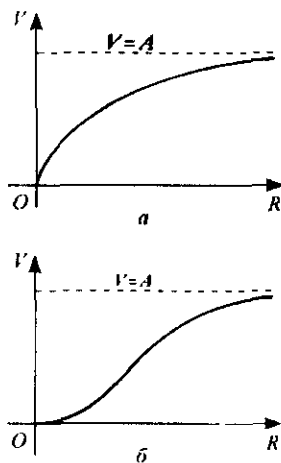


Рис. 3.21

організмів з досить складною поведінкою і здатних до навчання. Такою поведінкою відрізняються хребетні хижаки, яких умовно можна назвати «розумними» [143].

3.7. Моделювання трофічного ланцюга

3.7.1. Концептуальна модель трофічного ланцюга

У розглянутій вище математичній моделі «хижак – жертва» спостерігається два види популяції, одна з яких була споживачем («хижаком»), а інша – кормовим ресурсом («жертвою»). Насправді, в реально існуючих у природі екосистемах налічують десятки різних видів (популяцій, угруповань), що взаємодіють між собою. Формалізація цих складних екосистем і побудова математичних моделей взаємодії популяцій становлять певні математичні труднощі. І все ж таки досягнуто значних успіхів у питанні математичного моделювання популяцій (угруповань), які є ланками єдиного трофічного ланцюга [5- 7, 14, 24, 42, 44, 45, 85, 91, 96, 107, 108, 115, 137, 139, 143, 145, 147, 148, 152, 158, 169- 173, 187, 191].

Якщо розглянути деякий орієнтований граф (схему) озерної екосистеми, вершини якого відповідають видам, що включені до водної екосистеми, а орієнтовані дуги (відрізки) з'єднують ті види, одні з яких є кормом для інших (стрілки на дугах показують шлях руху речовини й енергії), то легко побачити, що в структурі цього графа виділяються трофічні рівні (рис. 3.22),

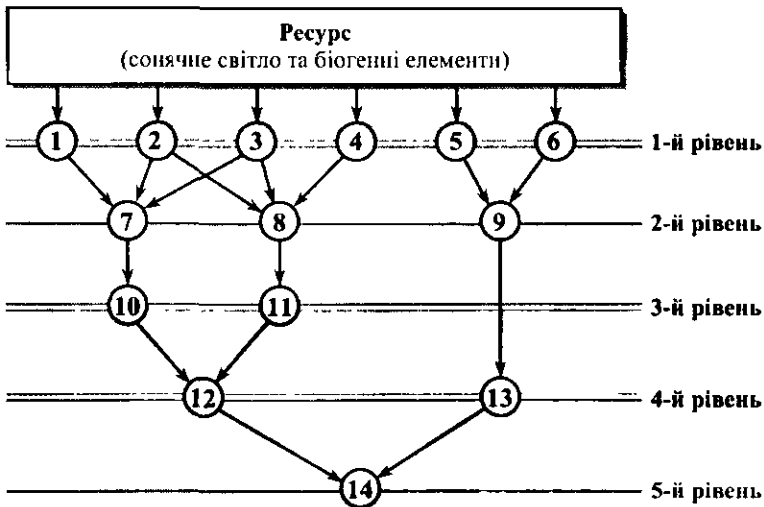


Рис. 3.22

зрештою можна виокремити такі з них: 1, 2, 3, 4 – зелені, синьо-зелені і діатомові водорості; 5, 6 – зелені водорості (1-й рівень); 7, 8, 9 – рослинний зоопланктон (2-й рівень); 10, 11 – хижий зоопланктон (3-й рівень); 12 – риби, що живляться хижим зоопланктоном, 13 – риби, що живляться рослинним зоопланктоном (4-й рівень); 14 – хижі риби (5-й рівень).

Види, що належать до одного й того самого трофічного рівня, перебувають або в стані конкуренції за кормові ресурси, або в коаліції при використанні цих ресурсів (симбіоз або коменсалізм). Тому представлена на рис. 3.22 трофічна сітка (мережа) відображає взаємозв'язки тільки між видами різних трофічних рівнів, тобто відтворює розглянутий раніше тип взаємовідносин «хижак – жертва» («паразит – хазяїн», «споживач – ресурс») і не дає уявлення про взаємодії між видами одного трофічного рівня. У зв'язку з викладеним випливає необхідність створення математичної моделі таких структур (систем), в яких види послідовно утворюють пари «хижак – жертва». Ці послідовні пари видів формують такі структури (системи), які називаються **трофічними ланцюгами**. Останніх в екосистемі може бути кілька, наприклад, на рис. 3.22 трофічні ланцюги утворюють послідовності видів 1–7–10–12–14, або 6–9–13–14, або 4–8–11–12–14 і т. д.

Можна об'єднати всі види, що належать до одного й того ж трофічного рівня, в один псевдовид або виділити з множини можливих ланцюгів один так званий домінуючий ланцюг, в якому потік речовини та енергії набагато перевищує потоки в інших ланцюгах. Інакше кажучи, можна трофічну сітку (мережу) згорнути в трофічний ланцюг. У даному випадку трофічна сітка агрегованого угруповання описуватиметься відповідним трофічним ланцюгом, в якому на кожному трофічному рівні буде розміщений один вид або псевдовид, причому сам ланцюг може бути або незамкненим, або замкненим (рис. 3.23). Наприклад, щодо сонячного світла (сонячної радіації) екосистема є незамкненою, а стосовно біогенних елементів (вуглець, азот, фосфор та ін.) екосистеми можуть частково замикатися за рахунок діяльності так званих деструкторів (мікроорганізми, гриби, черв'яки), які розкладають органіку до мінеральних компонентів, що стають кормом для первинного трофічного рівня (біогенні елементи).

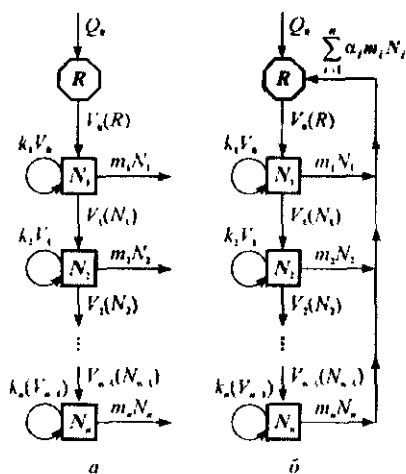


Рис. 3.23

3.7.2. Математична модель трофічного ланцюга

Використовуючи зображену на рис. 3.23 схему трофічного ланцюга та враховуючи описані раніше математичні моделі, можна записати систему диференціальних рівнянь відносно біомас різних видів або псевдовидів, що утворюють цей трофічний ланцюг, а саме:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= Q_0 - V_0 N_1 + \left[\sum_{i=1}^n a_i m_i N_i \right], \\ \frac{dN_1}{dt} &= k_1 V_0 N_1 - m_1 N_1 - V_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= k_2 V_1 N_2 - m_2 N_2 - V_2 N_3, \\ &\dots \\ \frac{dN_n}{dt} &= k_n V_{n-1} N_n - m_n N_n, \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

де Q_0 – зовнішній потік ресурсу (світло); R – первинний ресурс, що знаходиться в екосистемі; N_i – біомаса i -го виду, m_i – коефіцієнт природної смертності; k_i – коефіцієнт засвоєння i -м видом біомаси $(i-1)$ -го виду, $V_i(N_i)$ – трофічна функція, що показує інтенсивність взаємозв'язків типу «хижак – жертва», $a_i < 1$ – частка відновленого деструкторами ресурсу, що містився у відмерлій біомасі i -го виду (характеризує міру замкненості трофічного ланцюга).

У разі незамкненого трофічного ланцюга останній член, що стоїть у правій частині першого рівняння системи (3.7.1) і виражає масу біогенних елементів, які надходять внаслідок розкладання органічних речовин відмерлої біомаси, буде відсутнім (обведений пунктирною рамкою).

3.7.3. Математичні моделі спрощеного трофічного ланцюга водної екосистеми

Якщо розглядати окремих випадок, коли зовнішнім ресурсом є маса біогенних елементів (азот, фосфор та ін.) з потоком Q_0 , R – біомаса продуцентів, що використовуються для харчування організмів наступного трофічного рівня зі швидкістю $V_0 N_1$, де V_0 – трофічна функція, а N_1 – біомаса організмів другого трофічного рівня, наприклад, біомаса тварин-фітофагів (рослиноїдних), то з урахуванням третього трофічного рівня – хижаків, що мають біомасу N_2 , одержимо систему трьох диференціальних рівнянь у такому вигляді:

$$\frac{dR}{dt} = Q_1 - V_0 N_1, \quad (3.7.2)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = k_1 V_0 N_1 - m_1 N_1 - V_1 N_2, \quad (3.7.3)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = k_2 V_1 N_2 - m_2 N_2 - V_2 Q. \quad (3.7.4)$$

Система рівнянь (3.7.2)–(3.7.4) є спрощеною математичною моделлю, яка описує трофічний незамкнений ланцюг, що включає рослини, тварин-фітофагів і хижаків. Якщо в ролі хижаків розглядається риба, що систематично виловлюється, то в праву частину останнього рівняння системи (3.7.1) потрібно додати член $(-V_2 Q)$, який описує швидкість (інтенсивність) вилову.

Використовуючи одержані раніше розв'язки системи (3.6.2), (3.6.3) та звівши такі позначення

$$r_1 = k_1 V_0 - m_1, \quad r_2 = k_2 V_1 - m_2, \quad (3.7.5)$$

$$N_1 = B, \quad N_2 = P, \quad R(0) = R_0, \quad B(0) = B_0, \quad P(0) = P_0, \quad (3.7.6)$$

запишемо розв'язок даної системи в такому вигляді:

$$R(t) = R_0 + \frac{V_0 B_0}{r_1} - \frac{V_0 V_1 V_2 Q}{r_1^2 r_2} + \frac{V_0 V_1 (r_2 P_0 - V_2 Q)}{r_1 r_2^2} - \left(\frac{V_0 B_0}{r_1} - \frac{V_0 V_1 V_2 Q}{r_1^2 r_2} + \frac{V_0 V_1 (r_2 P_0 - V_2 Q)}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \right) e^{r_1 t} + \left(Q_0 - \frac{V_0 V_1 V_2 Q}{r_1 r_2} \right) t + \frac{V_0 V_1 (r_2 P_0 - V_2 Q)}{r_2^2 (r_2 - r_1)} e^{r_2 t}, \quad (3.7.7)$$

$$B(t) = \frac{V_1 V_2 Q}{r_1 r_2} + \left(B_0 + \frac{V_1 (r_1 P_0 - V_2 Q)}{r_1 (r_2 - r_1)} \right) e^{r_1 t} - \frac{V_1 (r_2 P_0 - V_2 Q)}{r_2 (r_2 - r_1)} e^{r_2 t}, \quad (3.7.8)$$

$$P(t) = \frac{V_2 Q}{r_2} + \left(P_0 - \frac{V_2 Q}{r_2} \right) e^{r_2 t}. \quad (3.7.9)$$

Як видно, одержані розв'язки (3.7.7)–(3.7.9) виражаються через показникові функції (експоненти), які можуть мати як додатні (рис. 3.24), так і від'ємні (рис. 3.25) показники залежно від значень коефіцієнтів k_1 , m_1 , k_2 , m_2 .

Для полегшення побудови графіків розв'язків системи рівнянь (3.7.2)–(3.7.4) доцільно знайти стаціонарні розв'язки, тобто розв'язки при усталеному (стаціонарному) режимі описуваного даною моделлю процесу взаємодії фітопланктону, зоопланктону і риби. Як відомо, при стаціонарному режимі біомаси гідробіонтів не змінюються, тобто швидкості їх зміни дорівнюють нулю. Отже, прирівнявши до нуля праві частини системи (3.7.2)–(3.7.4), одержимо модель стаціонарного процесу (якщо він існує):

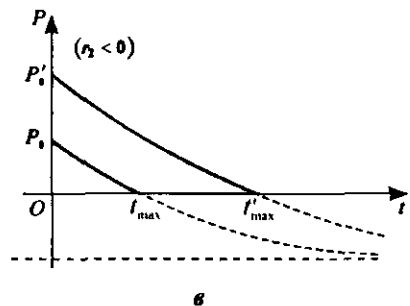
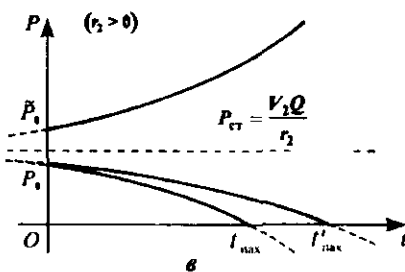
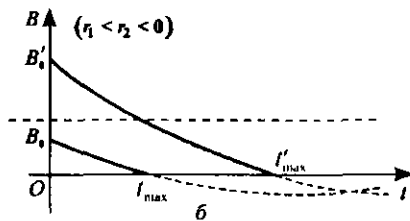
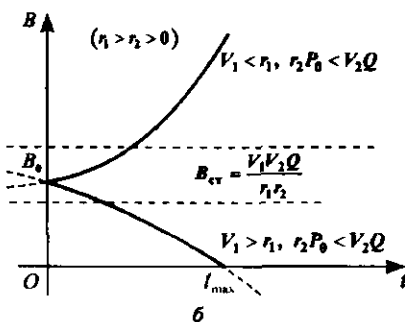
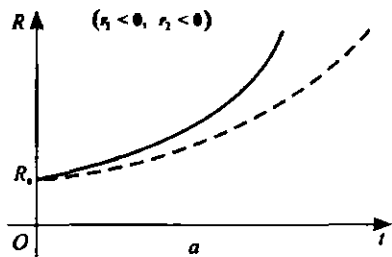
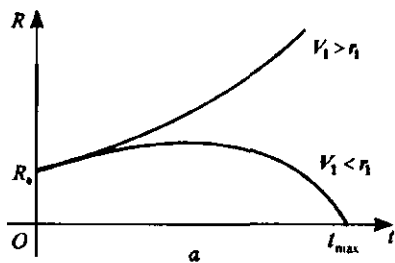


Рис. 3.24

Рис. 3.25

$$\begin{cases} Q_0 - V_0 B = 0, \\ r_1 B - V_1 P = 0, \quad (B = N_1, P = N_2) \\ r_2 P - V_2 Q = 0, \end{cases} \quad (3.7.10)$$

Розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь (3.7.10), одержимо

$$P_{cm} = \frac{V_2 Q_0}{r_2}, \quad B_{cm} = \frac{V_1 V_2 Q_0}{r_1 r_2}, \quad B_R = \frac{Q_0}{V_0} \quad (3.7.11)$$

Остання рівність може бути умовою стаціонарності тільки у випадку, коли

$$B_R = B_{cm}, \quad \frac{Q_0}{V_0} = \frac{V_1 V_2 Q}{r_1 r_2}, \quad r_1 = k_1 V_0 - m_1, \quad r_2 = k_2 V_1 - m_2 \quad (3.7.12)$$

Стационарні розв'язки на рис 3.24 і 3.25 зображені у вигляді горизонтальних пунктирних прямих, що є асимптотами нестационарних розв'язків.

Перейдемо до короткого аналізу зображених на рис 3.24 і 3.25 деяких випадків, які є графіками нестационарних розв'язків (3.7.7)–(3.7.9). Форма і розташування першої групи графіків, побудованих за формулами (3.7.5)–(3.7.9) за умови, що $r_1 > r_2 > 0$ (рис 3.24), показують динаміку біомас (чисельності) фітопланктону, зоопланктону і риби у випадку, коли народжуваність (швидкість розмноження популяції) перевищує природну смертність. Але і за таких ситуацій динаміка біомаси риб (рис 3.24, в) залежить також від співвідношення

$$L = \frac{r_2 P_0}{V_2 Q}, \quad (3.7.13)$$

що характеризує інтенсивність вилову риби.

Якщо $L < 1$ ($r_2 P_0 < V_2 Q$), то, як видно з графіка, функція $P(t)$ є монотонно спадною і в точці $t = t_{\max}$ перетинає вісь Ot , тобто при такому вилові риби через t_{\max} років риба у водоймищі зникне. Якщо величину вилову $V_2 Q$ зменшити, то рік t'_{\max} , коли риба у водоймищі буде повністю виловлена, настане пізніше (на рис 3.24, в точка перетину $t = t'_{\max}$ пунктирної лінії з віссю Ot).

Якщо народжуваність перевищує вилов ($L > 1$), то їхні маса (кількість риби) з кожним роком збільшуватиметься, що видно з графіка, розташованого на рис 3.24, в над асимптотою $P = P_{cm}$.

На рис 3.24, а, б зображено графіки динаміки фітопланктону та зоопланктону для випадків $r_1 < V_1$ та $r_1 > V_1$. Можуть бути й інші випадки (сценарії) розвитку популяцій ідробіонтів, що описуються рівняннями (3.7.2)–(3.7.4). Зокрема, на рис 3.25, а, б, в зображено графіки розв'язків даної системи рівнянь за умови, що народжуваність (розмноження) менша за смертність $r_1 < r_2 < 0$. Як видно з графіків, в останньому випадку біомаса (чисельність) зоопланктону і риб, що ним живляться, швидко зменшується, а біомаса фітопланктону у даному випадку різко зростає. З графіків також видно, що динаміка біомас ідробіонтів R, B і P залежить не тільки від параметрів Q_0, k_1, m_1, k_2, m_2 , а також і від початкових умов R_0, B_0 і P_0 .

3.8. Моделювання системи «паразит – хазяїн» в умовах токсичного забруднення водного середовища

3.8.1. Актуальність проблеми моделювання

Звичайні біологічні дослідження природних популяцій риб та їх паразитів не охоплюють найбільш екологічно важливих паразито-хазяїнських взаємовідносин, на які великий вплив справляє стан навколишнього водного середовища (довкілля). Ці дослідження, як правило, торкаються тільки окремих етапів їх життєвого циклу. Для наукового обґрунтування достовірності таких біологічних досліджень виникає необхідність застосування сучасних методів обробки інформації, які успішно використовуються в різних областях біології та екології і які частково були розглянуті в підрозділі 3.2. Проте для вивчення гідробіонтів на популяційному і біоценотичному рівнях, коли головна увага спрямовується на дослідження динаміки взаємовідносин між різними популяціями і на причинно-наслідкові зв'язки між цими популяціями, застосування тільки методів біометрії недостатнє. У даному випадку потрібно застосовувати методи математичного моделювання, суть яких викладено в попередніх розділах; при цьому необхідно враховувати, що життєвий цикл системи «паразит – хазяїн» істотно залежить від основних параметрів водного середовища, зокрема від якості води. Останнім часом у гідропаразитологічних дослідженнях велика увага приділяється тій обставині, що видовий склад паразитофауни риб, кількісні характеристики паразитарних інвазій, структура гідропаразитоценозів та інші показники популяцій паразитів істотно змінюються в умовах токсичного забруднення водного середовища. Цим питанням присвячені численні публікації, які свідчать про те, що в наукових дослідженнях на цю тему дедалі частіше застосовуються методи математичного моделювання [45, 169–173].

Емпіричний матеріал, що характеризує перебудову структурно-функціональних особливостей організації паразитоценозів риб в умовах токсичного забруднення води, досить бідний і неоднорідний, щоб забезпечити побудову достатньо достовірної і досить конкретної математичної моделі. Тому до цієї проблеми краще підійти з позиції викладеної раніше методології побудови математичних моделей при взаємовідносинах типу «хижак – жертва». При цьому потрібно врахувати, що система «паразит – хазяїн», як і система «хижак – жертва», досить динамічна, в якій шанси на виживання, збереження гомеостазу та репродукційні можливості постійно змінюються то на користь «хазяїна», то на користь «паразита». «Паразит» викликає у «хазяїна» певний патологічний стан, наслідком якого може бути зниження темпів росту (розмноження) та репродукційних можливостей. Якщо потенціал опору (резистентність) «хазяїна» досить великий, то продуктивність істотно не зміниться, тобто система може стабілізуватись. Якщо патогенна дія «парази-

та» перевищує резистентність «хазяїна», то останній або гине, або патологія переходить у стійку хронічну стадію, яка знову-таки закінчується смертю, часто разом з інвазуючими її паразитами. Нарешті, якщо життєздатність «хазяїна» підтримується зовнішніми засобами, наприклад, за допомогою лікувальних препаратів або з застосуванням профілактичних заходів, то динамічна рівновага зміщується у бік «хазяїна», а «паразит» гине або його патогенність різко знижується.

В умовах токсичного забруднення водного середовища «хазяїнно-паразитарні» відносини істотно змінюються. Токсичне забруднення може впливати на «хазяїна» і мало зачіпати «паразита» або істотно впливати на «паразита» і менше – на «хазяїна». Разом з тим, загибель частини популяції «хазяїна» може різко знизити інтенсивність розмноження популяції «паразитів», їх чисельність і видовий склад, а також призвести до зміни трофічних та антагоністичних зв'язків між «хазяїнами» і «паразитами». У цьому відношенні математичне моделювання дозволяє якоюсь мірою оцінити зміни в структурі і чисельності системи «паразит – хазяїн» у разі токсичного забруднення водного середовища, а в окремих випадках навіть з'являється можливість визначити умови стійкості даної динамічної системи.

3.8.2. Побудова простих моделей

Розроблені раніше математичні моделі системи «паразит – хазяїн», зокрема моделі Р. М. Андерсона [169–171], сприяли істотному розвитку досліджень у галузі екології паразитів на основі застосування математичного апарату і кількісних методів. За допомогою згаданих моделей були вивчені окремі аспекти функціонування системи «паразит – хазяїн» у водному середовищі. Але в цих моделях не враховувався вплив антропогенних факторів, зокрема токсикантів.

У даному підрозділі розглядаються деякі моделі системи «паразит – хазяїн», які можуть враховувати процеси народження, смертності, плодовитості, міграції і розподілу популяцій паразитів в умовах токсичного забруднення водного середовища. Розглянемо найпростіші лінійні моделі, які складаються з одного або двох диференціальних рівнянь. Якщо припустити, що популяція паразитів чисельністю P перебуває в досить сприятливих умовах усередині «хазяїна» (риби), то динаміку популяції паразитів можна описати рівнянням типу (3.4.3), а саме:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha E_0 - mP, \quad \alpha > 0, \quad (3.8.1)$$

де α – стала швидкості імміграції яєць паразитів в організм риби («хазяїна»), E_0 – кількість яєць паразитів у водному середовищі, m – коефіцієнт природної смертності паразита ($m > 0$).

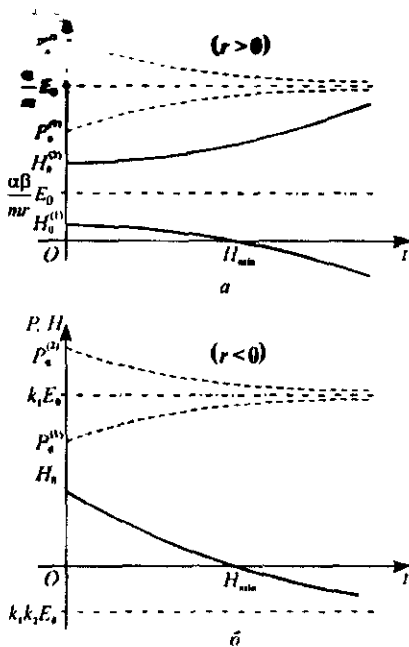


Рис. 3.26

Якщо ж популяція паразитів перебуває в несприятливих умовах, що спостерігається при виділенні токсинів в організмі «хазяїна» або при токсичному забрудненні зовнішнього середовища (води), то її розмноження буде уповільнюватись, а в деяких випадках і зовсім зупиниться. У першому випадку, коли виділяються токсини всередині організму «хазяїна», збільшиться природна смертність паразитів, тобто новий коефіцієнт смертності m^* буде більший, ніж попередній m ($m^* > m$). У другому випадку, коли спостерігається токсичне забруднення водного середовища, зменшиться число імітуючих яєць паразита, оскільки в токсичному водному середовищі частина яєць загине. Отже, в останньому випадку зменшиться стала швидкості іміграції α ($\alpha^* < \alpha$).

Нехай у певний час $t = t_0 = 0$ спостерігалась чисельність паразитів P_0 . Тоді, розв'язавши рівняння (3.8.1) з урахуванням додаткової умови

$$P(t_0) = P(0) = P_0, \quad (3.8.2)$$

для знаходження чисельності популяції паразитів за сприятливих умов у будь-який час одержимо таку формулу:

$$P(t) = \frac{\alpha E_0}{m} + \left(P_0 - \frac{\alpha E_0}{m} \right) e^{-mt}. \quad (3.8.3)$$

У випадку несприятливого навколишнього середовища чисельність паразитів визначатиметься такою рівністю:

$$P^*(t) = \frac{\alpha^* E_0}{m^*} + \left(P_0 - \frac{\alpha^* E_0}{m^*} \right) e^{-m^* t}. \quad (3.8.4)$$

Із співвідношень (3.8.3) або (3.8.4) випливає, що з проходженням досить великого відрізка часу ($t \rightarrow \infty$) чисельність паразитів як за умов чистого водного середовища, так і у разі його токсичного забруднення, прямує до стійкого (рівноважного) стану і визначається відповідно такими

$$P_{cr} = \frac{\alpha E_0}{m}, \quad P_{cr}^* = \frac{\alpha^*}{m^*} E_0, \quad (3.8.5)$$

причому

$$\frac{\alpha^*}{m^*} \ll \frac{\alpha}{m}, \quad P_{cr}^* \ll P_{cr}.$$

Отже, з наведеної вище моделі випливає, що при токсичному забрудненні чисельність паразитів зменшується і прямує до величини $\frac{\alpha^* E_0}{m^*}$

рис. 3.26, а).

Проте з цієї моделі не видно, як зменшення чисельності паразитів позначається на динаміці чисельності популяції «хазяїна». Тому необхідно розглянути модель, що враховує взаємодію між популяціями паразита і «хазяїна». Якщо позначити чисельність або біомасу паразита через P , а чисельність «хазяїна» – через H , то найпростіша модель системи «паразит – хазяїн» запишеться у такому вигляді:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha E_0 - mP, \quad (3.8.6)$$

$$\frac{dH}{dt} = rH - \beta P, \quad r = b - d, \quad (3.8.7)$$

де r – коефіцієнт розмноження популяції «хазяїна», b – коефіцієнт народжуваності ($b > 0$), d – коефіцієнт смертності ($d > 0$), β – коефіцієнт шкідливої дії (пригнічення) паразита щодо «хазяїна».

Стационарний (стійкий або рівноважний) розв'язок системи (3.8.6)–(3.8.7) має вигляд:

$$P_{cr} = \frac{\alpha}{m} E_0, \quad H_{cr} = \frac{\alpha\beta}{mr} E_0. \quad (3.8.8)$$

Нестационарні розв'язки системи (3.8.6)–(3.8.7) знаходяться так само, як і розв'язки системи (3.6.15)–(3.6.16), і мають такий вигляд:

$$P(t) = k_1 E_0 + (P_0 - k_1 E_0) e^{-mt}, \quad (3.8.9)$$

$$H(t) = k_1 k_2 E_0 + k_2 \frac{P_0 - k_1 E_0}{1 + k_3} e^{-mt} + \left(H_0 - k_1 k_2 E_0 - k_2 \frac{P_0 - k_1 E_0}{1 + k_3} \right) e^{rt}, \quad (3.8.10)$$

де введені такі позначення:

$$k_1 = \frac{\alpha}{m}, \quad k_2 = \frac{\beta}{r}, \quad k_3 = \frac{m}{r}. \quad (3.8.11)$$

Як видно з одержаних розв'язків, поведінка популяції паразитів і риб («хазяїна») залежить від їх початкової чисельності P_0 і H_0 , а також від значень трьох параметрів: k_1 , k_2 , k_3 . Залежно від цих параметрів, які визначаються коефіцієнтами швидкості імміграції, народжуваності, смертності і пригніченості, можлива різна динаміка популяцій риб та їх паразитів.

На рис 3.26 зображені графіки деяких сценаріїв розвитку популяцій системи «паразит – хазяїн» при додатних і від'ємних значеннях параметра r . Як бачимо, навіть порівняно проста математична модель описує досить різні й цікаві випадки (сценарії) динаміки чисельності популяцій риб та їх паразитів за умов токсичного забруднення водного середовища, яке викликає зміну параметрів k_1 , k_2 , k_3 .

3.8.3. Побудова складних моделей

Зазначимо, що наведена вище математична модель (3.8.6)–(3.8.7) є досить-таки простою, оскільки вона описує односторонній вплив паразита на «хазяїна». Тому доцільно розглянути моделі зі зворотними зв'язками, які можуть описувати процеси саморегулювання. Крім того, в простих моделях було обумовлено, що чисельність яєць паразитів є стала величина ($E_0 = \text{const}$). Проте кількість яєць, що знаходяться у водному середовищі, істотно залежить від кількості дорослих паразитів, які розвиваються всередині організму «хазяїна», а також від кількості яєць, що гинуть внаслідок їх поїдання та природної смертності, яка підвищується зі збільшенням інтенсивності токсичного забруднення. Динаміка чисельності яєць паразитів була вперше описана моделлю системи «паразит – хазяїн» за Р. М. Андерсоном, де враховується зворотний зв'язок при імміграції личинок паразитів [170]. Зважаючи на викладене, запишемо лінійну модель системи «паразит – хазяїн» з рівнянням динаміки яєць у водному середовищі:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha E - mP, \quad (3.8.12)$$

$$\frac{dH}{dt} = rH - \beta P, \quad r = b - d, \quad (3.8.13)$$

$$\frac{dE}{dt} = aP - \alpha_1 E - \gamma H^*, \quad \alpha_1 = \alpha + m_1, \quad (3.8.14)$$

де введено такі додаткові позначення: a – коефіцієнт інтенсивності появи яєць паразитів у водному середовищі, γ – коефіцієнт поїдання яєць, H^* – кількість водних організмів, що знищують яйця паразитів $H^* = B + \gamma_0 H$ (B – кількість водних організмів, які не досліджуються); m_1 – коефіцієнт

природної смертності яєць паразитів; α_1 – коефіцієнт смертності яєць паразитів з урахуванням імміграції в організм «хазяїна».

Значимо, що при підвищенні інтенсивності забруднення водного середовища токсикантами значно збільшаються коефіцієнти α_1 і γ та зменшуються коефіцієнти α і r .

Модель (3.8.12)–(3.8.14) уже враховує взаємний вплив дорослих паразитів та їх яєць (личинок), але не враховує вплив чисельності популяцій «хазяїна» на чисельність паразитів. Тому, крім наведених вище моделей, доцільно розглянути кілька модифікованих лінійних моделей з додатковими зворотними зв'язками. Якщо враховувати взаємний вплив паразита і «хазяїна» у випадку постійної кількості яєць E_0 , то одержимо таку модель із саморегуляцією:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha E_0 - mP + \beta_1 H, \quad (3.8.15)$$

$$\frac{dH}{dt} = rH - \beta_2 P, \quad (3.8.16)$$

де β_1 і β_2 – сталі взаємного впливу «хазяїна» на паразита і навпаки, – паразита на «хазяїна».

Якщо, крім того, припустити, що вплив токсичного середовища змінюється в часі від найменшої інтенсивності K_{\min} до найбільшої K_{\max} для паразита і від K_{\min}^* до K_{\max}^* для «хазяїна», то відповідна математична модель запишеться у вигляді такої системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами (неавтономна система):

$$\frac{dP}{dt} = \alpha E_0 - mP + \beta_1 \left[K_{\max} + (K_{\min} - K_{\max}) e^{-\frac{kt}{\beta_c}} \right] H, \quad (3.8.17)$$

$$\frac{dH}{dt} = rH - \beta_2 \left[K_{\max}^* + (K_{\min}^* - K_{\max}^*) e^{-\frac{k^*t}{\beta_c}} \right] P, \quad (3.8.18)$$

де k і k^* – сталі верифікації, $\beta_c = \frac{c_{кр}}{c}$ – стала інтенсивності дії токсиканта, $c_{кр}$ – гранична (критична) концентрація токсиканта у воді, за якої гине понад 50 % паразитів і «хазяїв», β_1 і β_2 – коефіцієнт інтенсивності взаємодії між «хазяїном» і паразитом.

Узагальнюючи лінійну модель (3.8.17)–(3.8.18), легко побудувати нелінійну модель, яку можна записати в такому вигляді:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha E - mP^2 + \beta_1 \left[K_{\max} + (K_{\min} - K_{\max}) e^{-\frac{kt}{\beta_c}} \right] PH, \quad (3.8.19)$$

$$\frac{dH}{dt} = bH - dH - \beta_2 \left[K_{\max}^* + (K_{\min}^* - K_{\max}^*) e^{-\frac{k^* t}{\beta_2}} \right] HP \quad (3.8.20)$$

Щоб урахувати умови розвитку яєць паразитів та їх вплив на динаміку системи «паразит – хазяїн», досить до систем двох рівнянь (3.8.15) (3.8.16), (3.8.17)–(3.8.18) або (3.8.19)–(3.8.20) додати лінійне рівняння (3.8.14) або таке нелінійне рівняння

$$\frac{dE}{dt} = aPH - \alpha E - m_1 E^2 - \gamma H^* \quad (3.8.21)$$

Система рівнянь (3.8.19) (3.8.21) є достатньо повною, що враховує всі основні фактори, які впливають на динаміку «хазяїн» (риб), паразитів та їх яєць (личинок) у водному середовищі

Як бачимо, врахування навіть досить простих взаємовідносин між популяціями «хазяїн» (риб), популяціями паразитів (гельмінтів, цестодозів та ін.) та їхніми яйцями (личинками) при застосуванні математичних методів призводить до складних, в тому числі нелінійних, моделей, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Разом з тим, використовуючи як прості, так і складні математичні моделі для проведення імітаційного експерименту, можна вибрати досить ефективну в практичному відношенні модель, яка після її верифікації дозволить розв'язати ряд важливих екологічних питань під час дослідження системи «паразит – хазяїн»

ПРОБЛЕМА МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ФУНКЦІОНУВАННЯ ВОДНИХ ЕКОСИСТЕМ

Не розглядаючи інші цікаві приклади побудови математичних моделей уже з наведеного очевидно, що сьогодні існує досить широкий діапазон застосування математичного моделювання до розв'язання багатьох екологічних, в тому числі й гідроекологічних, проблем. Більше того, досвід застосування математичного та імітаційного моделювання не викликає жодних сумнівів щодо ефективності цього методу при дослідженні та прогнозуванні стану водних екосистем та якості води в умовах антропогенного впливу.

4.1. Основні принципи та особливості математичного моделювання гідроекологічних процесів

4.1.1. Характерні особливості водних екосистем

Якщо на перших етапах розвитку гідробіології найбільше уваги приділялось вивченню структурних і функціональних характеристик окремих організмів (особин) різних видів гідробіонтів, то останнім часом такий аутоєкологічний напрям посідає підпорядковане положення, а на перший план виходять популяційні та біоценологічні дослідження, що розглядають надорганізменні форми існування життя зі своїми структурними і функціональними особливостями. Інакше кажучи, на перший план висуваються гідроекологічні проблеми, які не можна вивчити виходячи тільки із знань про розвиток окремих організмів рослинного і тваринного світу. Краще за все визначити зміст сучасної екології, а отже, і гідроекології, виходячи з концепції ієрархії рівнів біологічної організації (структури), які складають своєрідний «біологічний спектр» угруповання, популяція, орган, клітина і ген – основні рівні організації життя на Землі. Теоретично цей спектр рівнів можна продовжити до нескінченності в обидві сторони. На кожному рівні внаслідок взаємодії з навколишнім середовищем виникають функціональні системи – упорядковані взаємодіючі та взаємозалежні компоненти, що утворюють єдине ціле. Системи, що містять живі компоненти (біосистеми), також мають відповідні ієрархічні рівні. Екологія (гідроекологія) включає, головним чином, системи, розміщені в тій частині спектра рівнів, яка вище за рівень організму.

Важливим наслідком такої ієрархічної організації є те, що по мірі об'єднання елементів (компонентів) біосистеми в узагальнені функціональні одиниці у цих нових одиницях (системах) виникають властивості, яких не було в елементах попереднього рівня. Такі якісно нові (емерджентні) властивості екологічного рівня або екологічної одиниці не можна передбачити, виходячи тільки з властивостей компонентів, що складають даний екологічний рівень або екологічну одиницю. Саме такі емерджентні властивості гідроекосистем повинні враховуватись при математичному моделюванні гідроекологічних процесів [48, 49, 52, 117, 118, 129, 165].

Вивчення і прогнозування стану водних екосистем є одним з найважливіших завдань сучасних гідроекологічних досліджень, особливо в зв'язку з значним впливом господарської діяльності людей на навколишнє природне середовище, що змінює стан ландшафтів, забруднює атмосферу і гідросферу, порушує екологічну рівновагу природних систем. Сьогодні цілком зрозуміло, що основний шлях до управління живою природою лежить через пізнання закономірностей функціонування і розвитку надорганізмних систем (популяції, угруповань, біоценозів, екосистем). Разом з тим пізнання цих закономірностей, вивчення законів розвитку популяцій, угруповань, біоценозів, екосистем і біосфери в умовах впливу різноманітних



Рис. 4.1

антропогенних і техногенних факторів неможливе без кількісного аналізу, кількісних оцінок, методів математичного та імітаційного моделювання. Без них, а також без прогнозування наслідків впливу на екосистеми і балансу різноманітних факторів (рис 4.1) неможливо розв'язати основну проблему сучасної гідроекології – знайти ті форми взаємовідносин між людиною і природою, за яких користь від водних об'єктів була б найбільшою, а шкода, що завдається водним екосистемам, – найменшою.

4.1.2. Основні задачі гідроекології

Зупинимось коротко на найважливіших практичних задачах, що виникають при математичному та імітаційному моделюванні у водній екології (гідроекології), а також на загальних прийомах, способах і методах, що використовуються в практиці математичного моделювання основних гідроекологічних процесів і явищ.

Для успішного розв'язання складних практичних питань сучасної гідроекології, особливо тих, що пов'язані з оцінкою та прогнозуванням якості природних вод і стану водних екосистем, необхідно насамперед мати такі імітаційні математичні моделі:

- *модель водного режиму* ріки, водосховища, озера або іншого водного об'єкта з урахуванням їх водності, водообміну та водоспоживання на окремих ділянках водоймища, величини підземного стоку, випаровування з поверхні водного дзеркала,

- *модель водно-сольового режиму*, що враховує водність, водообмін і водоспоживання водного об'єкта, а також надходження солей зі стічними водами та підземними мінералізованими водами;

- *модель розповсюдження та накопичення різних токсичних і радіоактивних речовин* за різними компонентами водної екосистеми (вода, дно, біота) з урахуванням процесів фізичної, хімічної та біологічної трансформації цих забруднювачів,

- *модель динаміки розчинених у воді кисню та органічних речовин*, що легко окислюються (розкладаються) мікроорганізмами: модель РК-БСК;

- *модель динаміки біогенних елементів*, яка враховує вплив азоту і фосфору на інтенсивність процесів первинної продукції органічної речовини (фотосинтезу) та на процеси евтрофікації і гіперевтрофікації («цвітіння» води) у водосховищах, озерах і лиманах в різні сезони року.

Потрібно також відзначити, що розробка математичних моделей різних гідрофізичних, гідрохімічних і гідробіологічних процесів, як правило, має на меті розв'язування складнішої задачі – побудову досить ефективних універсальних імітаційних математичних моделей, за допомогою яких у діалоговому режимі з ЕОМ можна здійснювати чисельні (комп'ютерні) експерименти з метою вивчення, оцінки і прогнозування різних можливих

ситуацій і умов функціонування водних екосистем та їх впливу на якість природних вод. За допомогою таких імітаційних експериментів (сценаріїв) можна не тільки аналізувати і прогнозувати стан і динаміку досліджуваних явищ, а також здійснювати екологічне та еколого-економічне обґрунтування альтернативних варіантів будівництва та експлуатації різних великих народногосподарських комплексів, насамперед ГЕС, ТЕС і АЕС.

Перш ніж приступати до побудови тієї чи іншої математичної моделі для опису гідроекологічних процесів необхідно впевнитися в доцільності застосування математичного моделювання при розв'язанні поставленої конкретної задачі. Для цього повинна бути визначена ціль і сформульовані основні задачі, необхідність розв'язання яких зумовлює застосування математичного моделювання. На жаль, неможливо побудувати універсальну математичну модель, за допомогою якої можна було б розв'язати всі або принаймні більшість задач, що виникають у тій чи іншій галузі знань, зокрема в гідроекології. Тому доцільно будувати (розробляти) математичну або імітаційну модель таким чином, щоб її окремі блоки (компоненти) мали більш-менш універсальну структуру і могли змінювати свій вигляд залежно від конкретної задачі або конкретного типу задачі. Для побудови таких, хоча і неуніверсальних, але досить застосовуваних імітаційних математичних моделей найприйнятнішою у даний час є методологія, що базується на побудові багатокамерних багатокомпонентних математичних моделей [4, 7, 25, 68, 70, 72–86, 90, 91, 106, 108, 113–116, 136, 138, 143, 147, 152]. У цьому випадку просторова неоднорідність реальних процесів і водного середовища моделюється за допомогою окремих ділянок (камер, компарментів), причому на кожній ділянці (у камері) характеристики середовища і процесів, які відбуваються в цьому середовищі, як правило, усереднюються, тобто основні характеристики вважаються рівномірно розподіленими в просторі в межах ділянки (камери). Залежно від складності задачі таких камер може бути дві, три, п'ять і більше. Для математичного опису динаміки (зміни в часі) j -го показника в i -й камері використовується апарат теорії звичайних диференціальних рівнянь, алгебраїчні рівняння та інші математичні методи [11–13, 16, 34, 35, 38, 39, 44, 83, 84, 87, 105, 106, 112, 121, 141]. Якщо необхідно врахувати неоднорідність процесу всередині камери, то залучається також апарат теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних [23, 50, 54, 57, 92, 93, 98, 110, 151, 153].

Сукупність процесів, що визначають стан досліджуваної водної екологічної системи, характеризується певними кількісними показниками, які при моделюванні цих процесів приймаються як змінні або сталі величини. Вибрані змінні і сталі величини (константи) повинні кількісно характеризувати стан і взаємозв'язки різних компонент водної екосистеми (сталі величини у даному разі називаються параметрами моделі). Для кількісної характеристики абіотичних (неживих) процесів часто використовують

концентрації c_{ij} j -ї речовини в i -й камері, а для описання біотичних (біологічних) процесів користуються біомасою B_{ij} або кількістю особин N_{ij} j -го виду гідробіонту в i -й камері. Потім на основі фундаментальних законів фізики, законів збереження речовини, енергії та інших, а також враховуючи основні закони фізико-хімічної кінетики [111, 135, 138], складається баланс масообміну речовин та енергії в даній водній системі [17, 25, 49, 53, 55, 88, 96, 98, 100, 110, 112–116, 134, 145, 147, 151, 169–173]. Сукупність (множина) збалансованих балансових і кінетичних співвідношень між змінними c_{ij} , B_{ij} ($i = 1, 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, 3, \dots, m$) і різними сталими (параметрами), як правило, записується у вигляді алгебраїчних, трансцендентних та диференціальних рівнянь. Ці рівняння є основою імітаційної математичної моделі, яка за допомогою програмного забезпечення для ЕОМ дозволяє в діалоговому режимі визначати (обчислювати), прогнозувати, оцінювати, аналізувати і програвати різні варіанти (сценарії) зміни в просторі й часі основних показників (характеристик) стану водних екосистем і якості води залежно від зовнішніх і внутрішніх факторів, що впливають на протікання різноманітних гідрофізичних, гідрохімічних і гідробіологічних процесів.

Можливості математичного та імітаційного моделювання практично необмежені. Проте в сфері гідроекологічних досліджень застосування імітаційного математичного моделювання поки що не набуло поширення, хоча в цій галузі в останні роки опубліковано значну кількість як теоретичних, так і прикладних наукових праць [4–7, 17, 22, 25, 45, 52, 68, 72–86, 90, 108, 148, 169–173, 183–185]. Минуло порівняно небагато часу після того, як в 30-х роках з'явилися піонерські роботи відомого математика Віто Вольтерри [24] та його учасників А. Лотки [187, 188] і В. А. Костичина [53], проте математичне моделювання завойовує все нові й нові розділи в екології, і гідроекології зокрема.

4.2. Моделювання абіотичних процесів: математичні моделі водного та гідрохімічного режимів

4.2.1. Концептуальна модель гідрохімічного режиму

Якість води і стан прісноводних екосистем різних водних об'єктів (річок, водосховищ, лиманів, каналів та ін.) визначаються різними гідрохімічними, гідробіологічними та гідрофізичними показниками. На динаміку цих показників впливають численні абіотичні і біотичні процеси, що відбуваються внаслідок взаємодії різних компонентів екосистем із зовнішніми природними факторами і факторами антропогенного походження [1]. Крім цього, на динаміку водного і гідрохімічного режимів впливають внутрішньоводоймні процеси. Зокрема, перевага у водних екосистемах тих чи інших

гідробіологія (водних організмів) визначає напрямки розвитку гідробіологічних процесів, які істотно впливають на формування якості води в водних об'єктах. Тому математичні та імітаційні моделі формування якості води в водоймищах за умов антропогенного впливу повинні будуватися (розроблятися) з урахуванням взаємодії всіх основних факторів і процесів, що впливають на динаміку показників якості води, зокрема показників гідрохімічного режиму (рис. 4.1)

У даному параграфі розглядаються основні математичні моделі, за допомогою яких можна визначати або прогнозувати динаміку кількісних показників (концентрацій) різних речовин (домішок, інгредієнтів), що впливають на водний і гідрохімічний режими водоймищ, на забруднення води токсичними і радіоактивними речовинами

Під час аналізу умов формування водного і гідрохімічного режимів водоймищ визначаються основні фактори, що істотно впливають на зміну концентрації того чи іншого інгредієнта. До таких факторів належать (рис. 4.2)

- зміна річкового стоку або попусків води через греблю ГЕС для водосховищ,
- вплив підземного стоку,
- надходження дренажних вод з ідромеліоративних систем,
- надходження води і забруднюючих речовин з площі водозбору у вигляді промислових і побутових стоків,
- седиментація завислих у воді частинок,
- скаламучування донних відкладів,
- безповоротне водоспоживання,
- трансформація речовин (інгредієнтів) внаслідок фізико-хімічних, радіоактивних і біологічних перетворень,
- випаровування води з поверхні водоймищ

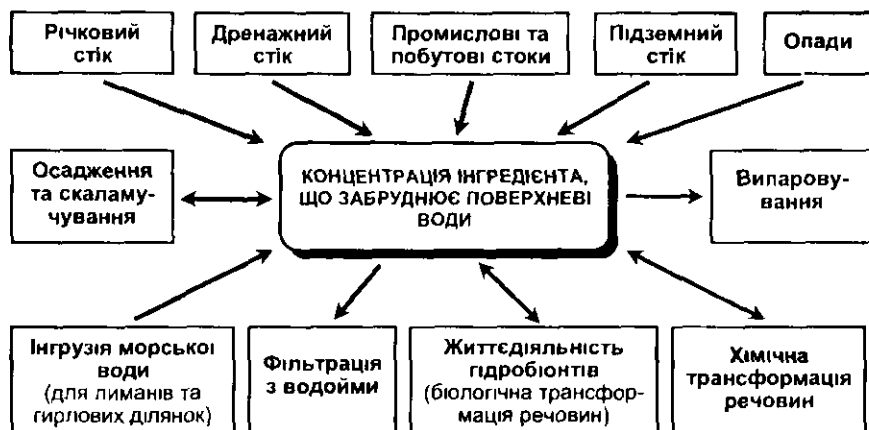


Рис. 4.2

Для вивчення впливу кожного з перелічених факторів на водно-зольовий і гідрохімічний режими водних об'єктів необхідно використати основні фізичні, хімічні і біологічні закони, які зумовлюють розповсюдження у воді різних домішок (речовин), і побудувати математичну модель міграції, трансформації та накопичення в окремих компонентах водної екосистеми речовин, що потрапляють у поверхневі води суші з льоду водозбору та з атмосферними опадами

У теоретичному плані процеси перенесення речовин і тепла (енергії) описуються так званими рівняннями конвективної дифузії (гідравлічної дисперсії або турбулентної дифузії) Вперше такого типу рівняння було одержано на початку 30-х років XIX ст відомим українським математиком М О Остроградським [122] Пізніше його було опубліковано в лекціях німецького математика Римана, виданих в 1900 р Г Вебером і перевиданих в 1927 р В останні роки це рівняння разом з рівняннями гідродинаміки та різними кінетичними рівняннями широко використовується при побудові конкретних математичних моделей процесів перенесення речовин та енергії в атмосфері та гідросфері [3, 9, 18, 20, 23, 26–28, 41, 54, 58, 67, 71, 84, 88, 92, 98, 109, 110, 124, 126, 127, 134, 142, 153, 159, 160, 163]

Основними механізмами розповсюдження речовини в рухомому середовищі, зокрема у потоці поверхневих вод, є 1) розчинення і перемішування речовини в потоці води і на його границі, 2) захоплення потоком води частинок речовини, що розчинились або перемішались в цьому потоці, 3) молекулярна або турбулентна дифузія речовин, спрямована на вирівнювання концентрації даної речовини в стоячій або рухомій воді Інакше кажучи, при потраплянні частинок речовини у водоіму вони розсіюються в товщі води внаслідок молекулярної і турбулентної дифузії, як у напрямку руху течії, так і в перпендикулярному до руху напрямку Крім цього, частинки речовини захоплюються течією і розповсюджуються вздовж потоку зі швидкістю, що дорівнює середній швидкості руху течії Тому для точного математичного опису цього процесу необхідно знати швидкість руху течії та інтенсивність (коефіцієнт) турбулентної, а в стоячій воді – молекулярної дифузії Знаходження середньої швидкості руху течії не становить серйозної проблеми, оскільки ця задача може бути розв'язана або на базі безпосередніх натурних вимірювань, або за допомогою методів гідродинаміки Значно складнішою є задача визначення або оцінки коефіцієнта турбулентної (конвективної) дифузії Проте і ця задача у разі гідроекологічних досліджень може бути розв'язана, якщо врахувати, що зміна значення коефіцієнта турбулентної дифузії в досить широкому діапазоні (від 10^3 до 10^2) мало позначається на кінцевих розрахунках розповсюдження забруднень у водних об'єктах, особливо в тих випадках, коли розглядається перенесення речовини у воді на великі відстані (сотні й тисячі метрів)

4.2.2. Побудова просторової і багатоканальної моделей

Спочатку розглянемо математичні моделі з розподіленими параметрами, а потім перейдемо до простіших моделей, які складатимуть основу імітаційного моделювання. Позначимо компоненти (складові) вектора V середньої швидкості течії через V_x , V_y , V_z , а коефіцієнти турбулентної дифузії в поздовжньому напрямку, що збігається з напрямком координатної осі абсцис Ox , в поперечному напрямку, що збігається з напрямком осі ординат Oy , та у вертикальному напрямку, що збігається з напрямком осі аплікват Oz , позначимо відповідно через D_x , D_y і D_z . Отже, відповідно до закону Фіка поздовжній потік речовини з концентрацією $c(x, y, z, t)$ виражатиметься виразом $V_x c - D_x \frac{dc}{dx}$, поперечний потік – виразом $V_y c - D_y \frac{dc}{dy}$, а вертикальний потік – виразом $V_z c - D_z \frac{dc}{dz}$. Скориставшись законом збереження маси речовини, одержимо рівняння розповсюдження неконсервативних речовин у потоці рідини [15, 16, 27, 40]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} - V_x c \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial c}{\partial y} - V_y c \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} - V_z c \right) - \alpha^* c + f(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

де α^* – стала (коефіцієнт) швидкості седиментації, $f(x, y, z, t)$ – член, що описує внутрішні джерела і стоки (неконсервативність, самоочисна здатність, трансформація, сорбція, десорбція та інші кінетичні процеси).

Для знаходження розв'язку рівняння (4.2.1) необхідно ще знати початкові й граничні умови, які можна задати в такому вигляді:

$$c(x, y, z, t_0) = c_0(x, y, z), \quad (4.2.2)$$

$$c(x, y, z, t) \Big|_{x=x_1} = c_1(y, z, t), \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=x_2} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial n} = 0, \quad (4.2.3)$$

де $x = x_1$ – абсциса вхідного поперечного перерізу потоку (верхній створ), $x = x_2$ – абсциса вихідного поперечного перерізу потоку (нижній або замикаючий створ), n – зовнішня нормаль (перпендикуляр) до горизонтальної поверхні ложа і дзеркала потоку (водосховища, ріки, лиману та ін.).

Якщо на поверхню потоку (дзеркало водоймища) разом з опадами потрапляє досліджувана речовина, то приймається така умова:

$$\left[V_z c - D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right]_{z=0} = c_{\text{оп}} q_{\text{оп}}, \quad (4.2.4)$$

$q_{\text{он}}$ – кількість атмосферних опадів, що випадає на одиницю площі дзеркала водної поверхні; $c_{\text{он}}$ – концентрація речовини, що міститься в атмосферних опадах.

Якщо забруднююча речовина (сіль) надходить з дна водоймища, зокрема при інфільтрації підземних вод, то на межі з дном можемо взяти одну з таких умов:

$$c(x, y, h_b, t) = c_{\phi}; \left[V_z c - D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right]_{z=h_b} = c_{\phi} v_{\phi}, \quad (4.2.5)$$

де c_{ϕ} – концентрація солей у підземних водах, v_{ϕ} – вертикальна складова швидкості фільтрації підземних вод, h_b – глибина водоймища.

Таким чином, при відомих величинах $V_x, V_y, V_z, D_x, D_y, D_z, \alpha^*$, $f(x, y, z, t)$ питання про розподіл у просторі й часі речовини, що мігрує у водному середовищі, зводиться до розв'язку рівняння (4.2.1) з початковими і граничними умовами (4.2.2)–(4.2.5). Існує багато різних аналітичних, чисельно-аналітичних і чисельних методів розв'язування крайових задач типу (4.2.1)–(4.2.5), що описують процес масопереносу. У кінці цього параграфу наведемо розв'язки окремих випадків цієї задачі масоперенесення, які описують міграцію речовин у фільтраційних підземних потоках (міграції) речовин у відкритих потоках (поверхневих водах) за допомогою наведених диференціальних рівнянь не досить ефективно. Хоча на базі цієї моделі і можна створити імітаційну модель формування гідрохімічного режиму в різних водоймах, але створення такої моделі пов'язано зі значними математичними (обчислювальними) труднощами. Необхідно також звернути увагу на той факт, що для інженерних екологічних розрахунків не має необхідності одержувати детальну інформацію про розподіл концентрацій забруднень у кожній точці водоймища. Крім цього, точність такої інформації була б невеликою, бо неможливо визначити з великою точністю локальні швидкості течії, значення коефіцієнтів турбулентної дифузії та інші величини, що входять в рівняння і граничні умови (4.2.1)–(4.2.5).

При побудові імітаційної математичної моделі гідрохімічного і водного режимів, як правило, використовуються досить прості математичні методи. Зокрема, для спрощення рівняння (4.2.1) вдаються до зменшення його вимірності шляхом осереднення шуканих величин (концентрацій, швидкостей тощо) по одному або двом просторовим координатам, а інколи і по всьому досліджуваному просторі (по всій ділянці). Вертикальне осереднення по координаті z зводить дане рівняння до двовимірної «планової» моделі, яка застосовується для дослідження широких, але неглибоких водоймищ (наприклад, водосховища і лимани). Осереднення в поперечному напрямку,

тобто по координаті u , зводить дане рівняння до двомірної профільної моделі, яка застосовується для вивчення вузьких і глибоких водоймищ (стратифіковані глибокі і неширокі озера та естуарії тощо). Осереднення величин у вертикальному і поперечному горизонтальному напрямках зводить просторову модель до одномірної нестационарної математичної моделі, яка найчастіше застосовується для визначення характеристик річок і вузьких водосховищ та озер, де відбувається ретельне перемішування речовин (домішок) як по глибини, так і в поперечному горизонтальному напрямку до руху течії. У випадку, коли осереднюються шукані характеристики в часі, одержуємо стационарні моделі, які можна застосовувати на невеликих проміжках часу (порівняно зі швидкістю протікання досліджуваних процесів). Нарешті, якщо осереднення відомих і невідомих величин (характеристик) відбувається по всьому просторі (по всій площині водного об'єкта), то в цьому випадку ми приходимо до побудови нульвимірної або, як уже зазначалось, камерної математичної (імітаційної) моделі. Саме на останньому ми і зупинимось.

Розробку імітаційної математичної моделі здійснюватимемо шляхом безпосередньої побудови камерної (нульвимірної) моделі на основі просторового осереднення процесів і складання балансових рівнянь у деякій виділеній області G . Якщо область G досить велика порівняно з масштабами тих процесів, що в ній відбуваються, і в області G спостерігається значна неоднорідність розподілу значень досліджуваних показників (наприклад, концентрація радіонуклідів), то в даному випадку вся область (ділянка) G розбивається на підобласті G^i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) і кожна підобласть G^i приймається за окрему «камеру» (реактор). Зв'язок між цими камерами, як правило, описується через водообмін та масообмін. Внаслідок побудови таких багатокамерних моделей з достатньою для практики точністю можна математично описувати процес розповсюдження і трансформації речовин у просторі й часі, причому в просторі – дискретно, а в часі – неперервно.

Для складання балансових рівнянь і побудови імітаційної математичної моделі гідрохімічного і водного режимів розіб'ємо водний об'єкт на n камер і введемо для кожної i -ї камери ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) такі змінні й сталі величини:

1) q^i, c^i – загальна витрата або потік води з i -ї камери в $(i+1)$ -шу камеру і концентрація j -ї речовини (солей, радіонуклідів, токсикантів, біогенів) в i -ї камері;

2) $q^{i-1}, c^{i-1,j}$ – потік (витрата) води з $(i-1)$ -ї в i -ту камеру і концентрація в $(i-1)$ -ї камері j -ї речовини;

3) q_k^i, c_k^i – потік (витрата) води з k -ї притоки (каналу) в i -ту камеру і концентрація в ній j -ї речовини, причому $k = 1, 2, 3, \dots, n_i$;

4) q_ϕ^i, c_ϕ^i – фільтраційна витрата підземних вод і концентрація в них j -ї речовини (солей);

5) $q'_{\text{он}}, c''_{\text{он}}$ – кількість (потік) опадів, що випадають на водне дзеркало i -ї камери (ділянки) і концентрація в ній j -ї речовини;

6) $q'_{\text{бв}}$ – величина (витрата) беззворотного водоспоживання,

7) $q'_{\text{вип}}$ – величина (потік) випаровування з поверхні водного дзеркала i -ї камери;

8) $m''_{\text{дн}}(c''^j, c''_{\text{дн}}, t)$ – кількість (потік) j -ї речовини, що надходить у i -ту камеру з дна, в якому міститься дана речовина (сіль) з концентрацією $c''_{\text{дн}}$;

9) α''^j, λ''^j – стала (константа) швидкості седиментації і стала (коєфіцієнт) хімічного, біологічного або радіоактивного розпаду;

10) $W'(t), W'_0$ – об'єм i -ї камери (водної товщі i -ї ділянки водоймища) в момент часу t і початковий момент $t = t_0$;

11) $F''(c''^j, c''_{\text{гб}}, t)$ – величина (функція), що враховує масообмін j -ї речовини з водним середовищем та гідробіонтами i -ї камери;

12) t – час у добах (або в місяцях, сезонах)

Відповідно до законів збереження маси j -ї речовини та враховуючи закони кінетики перетворення (трансформації) j -ї речовини, запишемо диференціальне рівняння в такому вигляді:

$$\frac{dM''^j}{dt} = q'^{-1} c'^{-1,j} + \sum_{k=1}^{n_j} q'_k c''_k + q'_\phi c''_\phi + q'_{\text{он}} c''_{\text{он}} + m''_{\text{дн}}(c''^j, c''_{\text{дн}}, t) - (q' + q'_{\text{бв}}) c''^j - (\alpha''^j + \lambda''^j) W' c''^j - F''(c''^j, c''_{\text{гб}}, t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (4.2.6)$$

де масу j -ї речовини можна виразити через об'єм води і концентрацію в ній цієї речовини:

$$M''^j(t) = c''^j(t) W'(t) = c''^j(t) \left(W'_0 + \left(q'^{-1} + \sum_{k=1}^{n_j} q'_k + q'_\phi + q'_{\text{ос}} - q' - q'_{\text{бв}} - q'_{\text{вип}} \right) t \right). \quad (4.2.7)$$

Враховуючи останнє співвідношення, рівняння (4.2.6) запишемо відносно невідомої концентрації c''^j речовини, що забруднює воду i -го водного об'єкта:

$$\frac{dc''^j}{dt} = \frac{1}{W'} \left(q'^{-1} c'^{-1,j} + \sum_{k=1}^{n_j} q'_k c''_k + q'_\phi c''_\phi + q'_{\text{он}} c''_{\text{он}} + m''_{\text{дн}}(c''^j, c''_{\text{дн}}, t) - \left(q' + q'_{\text{бв}} + \frac{dW'}{dt} \right) c''^j - (\alpha''^j + \lambda''^j) c''^j - f''(c''^j, c''_{\text{гб}}, t) \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4.2.8)$$

До рівняння (4.2.8) необхідно додати рівняння водного балансу відносно i -ї камери:

$$\frac{dq^i}{dt} = q^{i-1} + q_\phi^i + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i + q_{\text{оп}}^i - q^i - q_{\text{бв}}^i - q_{\text{вип}}^i. \quad (4.2.9)$$

При сталих величинах q^{i-1} , q_ϕ^i , q_k^i , $q_{\text{оп}}^i$, q^i , $q_{\text{бв}}^i$ та $q_{\text{вип}}^i$ після інтегрування (4.2.9) одержимо таке рівняння водного балансу:

$$W^i = W_0^i + \left(q^{i-1} + q_\phi^i + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i + q_{\text{оп}}^i - q^i - q_{\text{бв}}^i - q_{\text{вип}}^i \right) t. \quad (4.2.10)$$

Якщо величини $c^{i-1,j}$, c_ϕ^y , c_k^y , $c_{\text{оп}}^y$ також сталі або кусково-сталі, а $m_{\text{дн}}^y = f^y = \alpha^y = \lambda^y = 0$, то після інтегрування рівняння (4.2.8) одержимо формулу для визначення концентрації c^y забруднень у такому вигляді:

$$c^y(t) = c^{y*} + (c_0^y - c^{y*}) \left(\frac{W_0^i}{W^i(t) \right)^{\frac{q_{\text{вх}}^i}{q_{\text{вх}}^i - q_{\text{вих}}^i}}, \quad (4.2.11)$$

де $q_{\text{вх}}^i = q^{i-1} + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i + q_\phi^i + q_{\text{оп}}^i$; $q_{\text{вих}}^i = q^i + q_{\text{бв}}^i + q_{\text{вип}}^i$; c^{y*} - значення рівноважної (рівноважна величина) концентрації, що визначається рівністю

$$c^{y*} = \frac{q^{i-1} c^{i-1,j} + q_\phi^i c_\phi^y + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i c_k^y + q_{\text{оп}}^i c_{\text{оп}}^y + m_{\text{дн}}^y}{q^{i-1} + q_\phi^i + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i + q_{\text{оп}}^i - q_{\text{вип}}^i}. \quad (4.2.12)$$

Якщо рівень води в i -й камері (річці, волоховищі або озері) не змінюється або змінюється мало і цією зміною можна знехтувати, то формула визначення концентрації забруднень стає особливо простою і записується у випадку неконсервативної речовини ($\alpha^y \neq 0$, $\lambda^y \neq 0$) при $f^y(c^y, c_{\text{р0}}^y, t) = 0$ в такому вигляді:

$$c^y(t) = c_\gamma^* + (c_0^y - c_\gamma^*) \exp\left(-\frac{1 + \gamma^y \tau_0^i}{\tau_0^i} t\right), \quad (4.2.13)$$

де

$$c_\gamma^* = \frac{q^{i-1} c^{i-1,j} + q_\phi^i c_\phi^y + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i c_k^y + q_{\text{оп}}^i c_{\text{оп}}^y + m_{\text{дн}}^y}{(1 + \beta^y \tau_0^i) \left(q^{i-1} + q_\phi^i + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i + q_{\text{оп}}^i - q_{\text{вип}}^i \right)}, \quad (4.2.14)$$

$$\tau_0^i = \frac{W_0^i}{q^{i-1} + q_\phi^i + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i + q_{\text{оп}}^i - q_{\text{вип}}^i}, \quad \gamma^y = \alpha^y + \lambda^y. \quad (4.2.15)$$

4.2.3. Приклади чисельних розрахунків

Останні формули мають велике практичне застосування і їх доцільно використовувати для розрахунку концентрації речовини, що забруднює водний об'єкт протягом такого відрізка часу, коли зовнішні значення витрат води, концентрацій та інших допоміжних величин можна вважати сталими.

Розглянемо басейн стічних вод, що має об'єм $W_0 = Q$ (м³), в який поступають стоки з витратою q_1 (м³/год) і концентрацією в них солей c_1 (г/л). Визначити динаміку концентрації $c_6(t)$ солей в басейні, якщо початкова концентрація солей в басейні була c_0 , а рівень води в ньому не змінюється ($= q_2$). Скористасмося формулою (4.2.13), яка в нашому випадку запишеться в такому вигляді:

$$c_6(t) = c_1 + (c_0 - c_1) \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right), \quad \tau_0 = \frac{Q_0}{q_1}, \quad (4.2.16)$$

яку можна переписати так:

$$c_6^*(t) = c_1^* + (1 - c_1^*) \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right), \quad (4.2.17)$$

де $c_6^* = \frac{c_6}{c_0}$, $c_1^* = \frac{c_1}{c_0} = k$ - безрозмірні (зведені) величини, що визначають концентрацію солей у басейні і в стічних водах через початкову концентрацію c_0 ; $\tau_0 = \frac{Q_0}{q_1}$ - час повного оновлення води в басейні, що характеризує водообмін за умови неперемішування води в басейні. Величину $k = \frac{c_1}{c_0}$ називають коефіцієнтом (кратністю) розбавлення або змішування.

Побудуємо графік зміни концентрації солей у басейні стічних вод, урахувавши: 1) при $t \rightarrow \infty$ функція прямує до сталої величини $c_1^* = k$, $c_6^*(t) \rightarrow k$, графік має асимптоту $c_6^* = c_1^* = k$; 2) при $k = c_1 > 1$ ($c_1 > c_0$) функція зростає $\left(\frac{dc_6^*}{dt} > 0\right)$ і опукла вгору $\left(\frac{d^2c_6^*}{dt^2} < 0\right)$, а при $k = c_1 < 1$ ($c_1 < c_0$) функція спадає $\left(\frac{dc_6^*}{dt} < 0\right)$ і стає вгнutoю (опукла вниз) $\left(\frac{d^2c_6^*}{dt^2} > 0\right)$.

Для побудови графіка знайдемо координати деяких найхарактерніших для графіка точок кривої, які запишемо в табл. 4.1.

Таблиця 4 1

t	0	$\frac{1}{2}\tau_0$	τ_0	$2\tau_0$	$3\tau_0$
c_6^*	1	$e^{-\frac{1}{2}} + (1 - e^{-\frac{1}{2}})k$	$e^{-1} + (1 - e^{-1})k$	$e^{-2} + (1 - e^{-2})k$	$e^{-3} + (1 - e^{-3})k$
		$e^{-\frac{1}{2}} = 0,6065$	$e^{-1} = 0,3679$	$e^{-2} = 0,1353$	$e^{-3} = 0,0497$

Для кожного даного в умові задачі значення коефіцієнта змішування $k = c_1^*$ і для кожного значення періоду повного оновлення (заміщення) τ_0 басейну стічними водами за формулою (4 2 17) легко знайти числові значення координат для п'яти (і більше) точок, що наведені в табл 4 1. Наприклад, при $k = 10$, розглянемо три випадки, які визначаються такими значеннями параметра τ_0

$$I - \tau_0 = 2,5 \text{ год}, \quad II - \tau_0 = 5 \text{ год}, \quad III - \tau_0 = 10 \text{ год}.$$

Числові значення координат п'яти точок графіка для трьох випадків наведені в табл 4 2

Таблиця 4 2

I	t	0	$\frac{1}{2}\tau_0 = 1,25$	$\tau_0 = 2,5$	$2\tau_0 = 5,0$	$3\tau_0 = 7,5$
	c_6^*	1	4,5	6,7	8,7	9,6
II	t	0	$\frac{1}{2}\tau_0 = 2,5$	$\tau_0 = 5,0$	$2\tau_0 = 10,0$	$3\tau_0 = 15,0$
	c_6^*	1	4,5	6,7	8,7	9,6
III	t	0	$\frac{1}{2}\tau_0 = 5,0$	$\tau_0 = 10,0$	$2\tau_0 = 20,0$	$3\tau_0 = 30,0$
	c_6^*	1	4,5	6,7	8,7	9,6

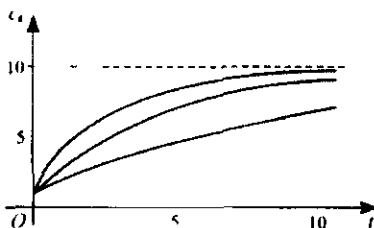


Рис. 4.3

Враховуючи одержані числові дані (табл 4 2), легко побудувати графіки зміни концентрації забруднень для трьох випадків (рис 4 3)

При розв'язуванні задачі про розбавлення стоків, що містяться у басейні стічних вод, графік зміни концентрації забруднень будується таким же способом, але в даному разі параметр $k = c_1$

буде меншим за одиницю ($0 < k < 1$)
 Наприклад, для $k = 0,1$ числові значення координат точок кривої, що легко обчислюються за тією ж формулою 4 2 17), наведені в табл 4 3

Графік динаміки забруднень у вигляді кривої, коли відбувається розбавлення стічних вод, зображений на рис 4 4

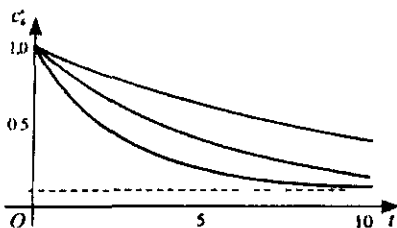


Рис. 4.4

Таблиця 4 3

I	t	0	$\frac{1}{2}\tau_0 = 1,25$	$\tau_0 = 2,5$	$2\tau_0 = 5,0$	$3\tau_0 = 7,5$
	c_6^*	1	0,64	0,43	0,23	0,14
II	t	0	$\frac{1}{2}\tau_0 = 2,5$	$\tau_0 = 5,0$	$2\tau_0 = 10,0$	$3\tau_0 = 15,0$
	c_6^*	1	0,64	0,43	0,23	0,14
III	t	0	$\frac{1}{2}\tau_0 = 5,0$	$\tau_0 = 10,0$	$2\tau_0 = 20,0$	$3\tau_0 = 30,0$
	c_6^*	1	0,64	0,43	0,23	0,14

Якщо відомі початкові умови об'єм Q_0 , концентрація c_0 , концентрація забруднень c_1 в стічних водах і їх швидкість надходження в басейн q_1 при тій же швидкості витікання стоків з басейну, то за допомогою графіків (рис 4 3 і рис 4 4) легко визначити значення концентрації c_6 забруднень в басейні в будь-який момент часу t , а також час, протягом якого концентрація забруднень в басейні досягне заданого значення, наприклад, гранично допустимого концентрації (ГДК) $c_{гдк}$. Після досягнення такої концентрації $c_{гдк}$ необхідно подачу стічних вод припинити і відновити її тільки після певного проміжку часу, протягом якого в басейні внаслідок різних процесів самоочищення концентрація забруднень знизиться до величини c_0 .

4.2.4. Побудова трикомпонентної імітаційної моделі

Одержана система звичайних диференціальних рівнянь (4 2 8)–(4 2 9) вигідно відрізняється від рівняння в частинних похідних (4 2 1) у багатьох аспектах. По-перше, система (4 2 8)–(4 2 9) досить проста і методи її розв'язування добре розроблені, а в окремих випадках, як було показано вище, вона має аналітичні розв'язки, які досить зручні для інженерних розрахунків.

По-друге, ця система рівнянь інформативніша, ніж рівняння (4.2.1) з граничними умовами (4.2.2)–(4.2.5), що робить її достатньо ефективною для практичного використання при побудові імітаційних математичних моделей, які описують гідрохімічний режим консервативних і неконсервативних речовин, забруднюючих ріки, озера, водосховища та інші водні об'єкти. Зауважимо, що під **інформативністю** тієї чи іншої математичної моделі слід розуміти її здатність максимально використовувати дані натурних і експериментальних (лабораторних) спостережень. Іншими словами, чим більше можна закласти в математичну модель даних натурних і лабораторних спостережень, тим вона більш інформативна. Саме такі математичні моделі можна використовувати для побудови імітаційних моделей. Потрібно також відзначити, що за рахунок розширення інформативності математичної моделі зменшується її точність відносно математичного описування кожного окремого процесу чи явища, проте збільшується точність математичного описування сукупності процесів і явищ, тобто досліджуваної системи в цілому. Отже, в тих випадках, коли не можна досягнути великої точності математичного описування всіх елементів системи або явища через об'єктивні причини, або такої точності не потребують поставлені практичні задачі й цілі, завжди звертаються до простіших, але достатньо інформативних, математичних моделей. Такі моделі насамперед використовуються при описі та вивченні досить складних систем, до яких належать і водні екосистеми.

Введені при побудові математичної моделі невідомі змінні величини (функції), за допомогою яких визначається стан водного об'єкта, називаються компонентами даної математичної або імітаційної моделі. В описаній вище імітаційній моделі (4.2.8)–(4.2.9) шуканими невідомими величинами є концентрація $c^j(t)$ та об'єм водного об'єкта $W^i(t)$. Тому цю модель будемо називати **двокомпонентною**. Якщо водний об'єкт ділиться на n камер (ділянок), то відповідна система рівнянь (4.2.8)–(4.2.9), де $i=1, 2, 3, \dots, n$, називається **двокомпонентною n -камерною** імітаційною моделлю. Система диференціальних рівнянь (4.2.8) і (4.2.9) є незалежною в тому розумінні, що друга система не залежить від першої. Тому числова реалізація їх на ЕОМ може відбуватися теж незалежно: спочатку розв'язується система (4.2.9), а потім система (4.2.8). Такі незалежності системи рівнянь або алгоритми їх чисельної реалізації на ЕОМ називатимемо **блоками**. Отже, моделювання водного і гідрохімічного режимів водних об'єктів здійснюється за допомогою двох блоків: блоку, що моделює водний режим, і блоку, що моделює зміну концентрації в поверхневих водах j -ї речовини (інгредієнта).

При вивченні гідрохімічного режиму різних водоймищ, особливо водосховищ, великий інтерес становить визначення концентрації j -ї речовини в донних відкладах. Позначивши через $c_{\text{дн}}^j$ (г/дм^3) концентрацію j -ї речовини в дні i -ї камери (ділянки) водного об'єкта, що вимірюється кількістю (масою)

речовини на одиницю площі верхнього (активного) шару поверхні (покрівлі)
 рівняння динамічного балансу j -ї речовини запишемо в такому вигляді:

$$\frac{dM_{\text{дн}}^{ij}}{dt} = \alpha^{ij} W^i c^{ij} - (\beta^{ij} + \lambda^j) S_{\text{дн}}^i c_{\text{дн}}^{ij}, \quad (4.2.18)$$

β^{ij} – стала інтенсивності скаламучування.

Враховуючи, що

$$M_{\text{дн}}^{ij} = S_{\text{дн}}^i c_{\text{дн}}^{ij}, \quad W^i = S_{\text{дн}}^i h_{\text{ср}}^i, \quad (4.2.19)$$

$S_{\text{дн}}^i$ – площа дна i -ї камери (ділянки водоймища), $h_{\text{ср}}^i$ – середня глибина ділянки водоймища з об'ємом W^i , рівняння (4.2.18) перепишемо таким чином:

$$\frac{dc_{\text{дн}}^{ij}}{dt} = \alpha^{ij} h^i c^{ij} - \left(\beta^{ij} + \lambda^j + \frac{dS_{\text{дн}}^i}{S_{\text{дн}}^i dt} \right) c_{\text{дн}}^{ij}. \quad (4.2.20)$$

Система рівнянь (4.2.8), (4.2.20) і (4.2.9) називається трикомпонентною n -камерною імітаційною моделлю гідрохімічного і водного режимів, а система (4.2.8), (4.2.20) – двокомпонентною n -мірною імітаційною моделлю гідрохімічного режиму водного об'єкта, де c^{ij} і $c_{\text{дн}}^{ij}$ – компоненти гідрохімічного режиму.

На процеси седиментації завислих або адсорбованих на зависях частинок j -ї речовини та на інтенсивність скаламучування донних відкладів великий вплив справляє глибина водного об'єкта або його окремих ділянок. Тому для визначення концентрації домішок у водній товщі і донних відкладах можна побудувати точнішу трикомпонентну модель гідрохімічного режиму.

Для цього поділимо кожну камеру (ділянку) на дві підобласті (частини), одну з яких займають глибоководні ділянки, а другу – мілководні. Якщо концентрацію домішок (інгредієнта) в донних відкладах на глибоководній частині камери з площею $S_{\text{гн}}^i$ позначимо через $c_{\text{гн}}^{ij}$ ($\text{г}/\text{дм}^2$), а концентрацію домішок у донних відкладах на мілководній частині камери з площею $S_{\text{міл}}^i$ – через $c_{\text{міл}}^{ij}$ ($\text{г}/\text{дм}^2$), то рівняння динамічного балансу маси j -ї домішки у водній товщі та донних відкладах мілководної і глибоководної частин i -ї ділянки водного об'єкта запишуться в такому вигляді:

$$\frac{dM^{ij}}{dt} = q^{i-1} c^{i-1,j} + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i c_k^{ij} + q_{\text{ф}}^i c_{\text{ф}}^{ij} + q_{\text{оп}}^i c_{\text{оп}}^{ij} - (q^i + q_{\text{бв}}^i + \alpha_{\text{гн}}^{ij} S_{\text{гн}}^i h_{\text{гн}}^i + \alpha_{\text{міл}}^{ij} S_{\text{міл}}^i h_{\text{міл}}^i + \lambda^j W^i) c^{ij} + \beta_{\text{гн}}^{ij} S_{\text{гн}}^i c_{\text{гн}}^{ij} + \beta_{\text{міл}}^{ij} S_{\text{міл}}^i c_{\text{міл}}^{ij} - F^{ij}(c^{ij}, c_{\text{гн}}^{ij}, t), \quad (4.2.21)$$

$$\frac{dM_{\text{гн}}^{ij}}{dt} = \alpha_{\text{гн}}^{ij} S_{\text{гн}}^i h_{\text{гн}}^i - (\beta_{\text{гн}}^{ij} + \lambda^j) S_{\text{гн}}^i c_{\text{гн}}^{ij}, \quad (4.2.22)$$

$$\frac{dM_{\text{міл}}^{ij}}{dt} = \alpha_{\text{міл}}^{ij} S_{\text{міл}}^i h_{\text{міл}}^i - (\beta_{\text{міл}}^{ij} + \lambda^j) S_{\text{міл}}^i c_{\text{міл}}^{ij}. \quad (4.2.23)$$

Враховуючи співвідношення

$$M^y = W^i c^y, \quad M_{гг}^y = S_{гг}^i c_{гг}^y, \quad M_{мл}^y = S_{мл}^i c_{мл}^y, \quad (4.2.24)$$

система рівнянь (4.2.21)–(4.2.23) перепишеться у вигляді [27, 28, 30]:

$$\begin{aligned} \frac{dc^y}{dt} = & \frac{1}{W^i} q^{i-1} c^{i-1,j} + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i c_k^y + q_{\phi}^i c_{\phi}^y + q_{он}^i c_{он}^y - \\ & - \left(q^i + q_{бв}^i + \frac{dW^i}{dt} + \alpha_{гг}^y S_{гг}^i h_{гг}^i + \alpha_{мл}^y S_{мл}^i h_{мл}^i + \lambda^i W^i \right) c^y + \\ & + \beta_{гг}^y S_{гг}^i c_{гг}^i + \beta_{мл}^y S_{мл}^i c_{мл}^i - f^y(c^y, c_{бв}^y, t), \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

$$\frac{dc_{гг}^y}{dt} = \alpha_{гг}^y h_{гг}^i c^y - \left(\beta_{гг}^y + \lambda^i + \frac{1}{S_{гг}^i} \frac{dS_{гг}^i}{dt} \right) c_{гг}^i, \quad (4.2.26)$$

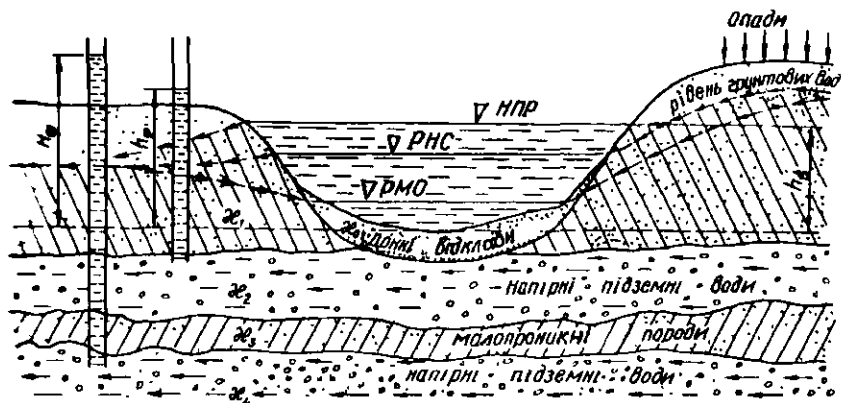
$$\frac{dc_{мл}^y}{dt} = \alpha_{мл}^y h_{мл}^i c^y - \left(\beta_{мл}^y + \lambda^i + \frac{1}{S_{мл}^i} \frac{dS_{мл}^i}{dt} \right) c_{мл}^i. \quad (4.2.27)$$

За допомогою трикомпонентної n -камерної імітаційної математичної моделі (4.2.25)–(4.2.27) можна оцінювати і прогнозувати вплив донних відкладів на забруднення та самоочищення водних мас

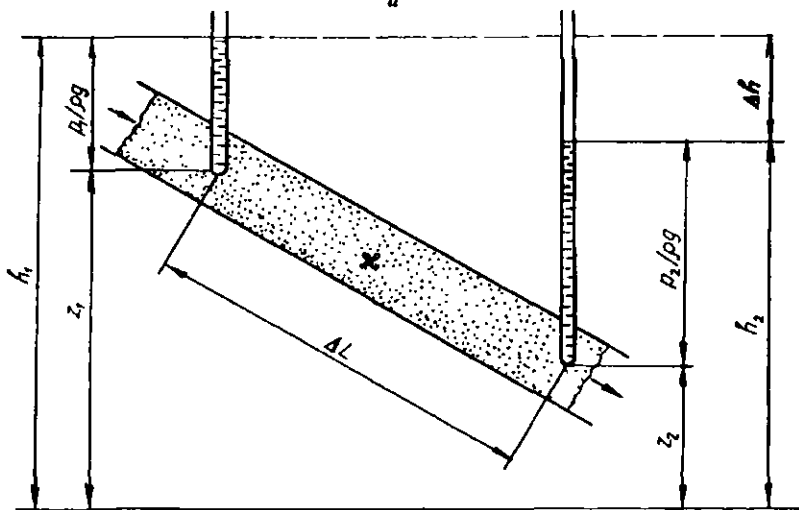
4.2.5. Моделювання процесів забруднення підземних вод

При використанні системи рівнянь (4.2.8)–(4.2.9) або (4.2.25)–(4.2.27) для імітаційного моделювання і прогнозування гідрохімічного, зокрема сольового, режиму водних об'єктів величини q_k^i , c_k^y , $q_{он}^i$, $c_{он}^y$, $q_{вип}^i$, $q_{бв}^i$, α^y , β^y , λ^i , W_0^i , n і n_i , як правило, визначають з даних натурних досліджень, а величини q_{ϕ}^i , c_{ϕ}^y , $m_{дн}^y$ і f^y знаходять або за допомогою математичних розрахунків (математичного моделювання), або теж з даних натурних спостережень. Зокрема, величину потоку i -ї речовини, що надходить з підземним стоком (інфільтрацією), як правило, визначають за допомогою математичного моделювання. Для цього наведемо деякі способи визначення фільтраційної витрати q_{ϕ}^i , підземних вод, що потрапляють в i -ту камеру (рис. 4.5, а). В інженерних розрахунках фільтраційна витрата q_{ϕ}^i визначається на основі закону Дарсі, який можна записати в такому вигляді [10, 71, 84, 94, 99, 123, 125, 126, 156]:

$$q_{\phi}^i = -\alpha^i S^i \frac{h_b^i - h_{\phi}^i}{T_{\phi}^i}, \quad (4.2.28)$$



а



б

Рис. 4.5

де α' – коефіцієнт фільтрації донних відкладів або порід площею S' , $h'_a = h_2$ – глибина водного об'єкта або i -ї ділянки водного об'єкта, $h'_\phi = h_1$ – фільтраційний напір ґрунтових вод на глибині T'_ϕ (рис. 4.5, б).

Відповідно до закону Дарсі вектор швидкості фільтрації $\vec{V}_i (V'_x, V'_y, V'_z)$ задовольняє такому співвідношенню:

$$\vec{V}_i = \text{grad } \phi', \phi' = -\alpha' h'_\phi = -\alpha' \left(\frac{p'}{\rho g} - z \right), \quad (4.2.29)$$

або в координатній формі маємо такі рівності

$$V'_x = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x}, \quad V'_y = \frac{\partial \varphi^i}{\partial y}, \quad V'_z = \frac{\partial \varphi^i}{\partial z}, \quad (4.2.30)$$

де φ^i – потенціал швидкості фільтрації для i -ї ділянки області фільтрації, p – тиск, ρ – густина води, g – прискорення сили тяжіння, вісь Oz спрямована вертикально вниз

У рівняння (4.2.30) входять чотири невідомих змінних (функцій) $V'_x, V'_y, V'_z, \varphi^i$, для визначення яких необхідно дані трьох рівнянь доповнити четвертим. Таким рівнянням є рівняння нерозривності підземного потоку, яке у випадку стаціонарного (усталеного) руху записується у такому вигляді

$$\frac{\partial V'_x}{\partial x} + \frac{\partial V'_y}{\partial y} + \frac{\partial V'_z}{\partial z} = 0 \quad (4.2.31)$$

Система (4.2.30)–(4.2.31) є повною системою рівнянь, що описують рух підземних вод в однорідних ґрунтах

Підставивши в (4.2.31) вирази для компонент швидкості фільтрації, що визначаються (4.2.30), одержимо

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.2.32)$$

Рівняння (4.2.32) називається **рівнянням Лапласа**, яке добре відомо в гідродинаміці і механіці суцільного середовища

При визначенні фільтраційної витрати в конкретних гідрологічних умовах, як правило, розглядають найпростіші схеми, для яких рух підземних вод описується двовірним або навіть одновірним рівнянням Лапласа. Так, у випадку профільної фільтрації рівняння руху підземних вод описується рівнянням

$$\frac{\partial V'_y}{\partial y} + \frac{\partial V'_z}{\partial z} = 0, \quad V'_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad V'_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (4.2.33)$$

або

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \varphi = -\alpha h, \quad h = \frac{P}{\rho g} - z \quad (4.2.34)$$

У випадку планової напірної фільтрації і планової безнапірної фільтрації рівняння руху підземних вод запишуться відповідно таким чином

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0, \quad q_x = \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}, \quad q_y = \frac{\partial \varphi^*}{\partial y}, \quad (4.2.35)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial y^2} = 0, \quad \varphi^* = -\alpha T_\phi h, \quad (4.2.36)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0, \quad q_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (4.2.37)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \Phi = -\frac{\alpha h^2}{2} \quad (4.2.38)$$

ж через q_x і q_y позначені складові вектора питомої фільтраційної витрати q

Вектор питомої фільтраційної витрати пов'язаний з вектором швидкості фільтрації при плановій напірній і безнапірній фільтрації відповідно такими співвідношеннями

$$q = T_\Phi \vec{V}, \quad \vec{q} = h \vec{V} \quad (4.2.39)$$

Для визначення фільтраційної витрати води через границю поверхневих вод з донними відкладами і ґрунтами, як правило, розв'язується задача профільної фільтрації, коли рух підземних вод розглядається у вертикальних площинах, що перпендикулярна береговій лінії водного об'єкта (рис. 4.5, а). У такому разі виникає необхідність у розв'язуванні крайової задачі для диференціального рівняння Лапласа (4.2.36) або (4.2.38) з відповідними граничними умовами.

Якщо розглядати рівномірний рух підземних вод у неоднорідному пласті (шарі), що утворений з m паралельних прошарків потужності (товщини)

$T_1^i, T_2^i, T_3^i, \dots, T_m^i$ з відповідними коефіцієнтами фільтрації $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i, \dots, \alpha_m^i$,

то величина питомої фільтраційної витрати q_m^i (на одиницю довжини водоймища або його окремої ділянки) визначається формулою

$$q_m^i = \alpha_{\text{ср}}^i \frac{h_0^i - h_\Phi^i}{L^i}, \quad (4.2.40)$$

де величина $\alpha_{\text{ср}}^i$ що визначається рівністю

$$\alpha_{\text{ср}}^i = \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_k^i T_k^i}{\sum_{k=1}^m T_k^i}, \quad (4.2.41)$$

називається середнім зваженим коефіцієнтом фільтрації неоднорідного пласта (шару) ґрунту, h_0^i і h_Φ^i напори в гочці виклинування пласта в водоймище та на віддалі L^i від водоймища (довжина шляху фільтрації),

$T_k^i = \sum_{k=1}^{m_i} T_k^i$ – потужність (товщина) пласта

Питання про розповсюдження домішок (токсичних речовин, солей і т. ін.) в підземних водах, як і у випадку розповсюдження речовин у поверхневих водах, зводиться до розв'язування крайової (граничної) задачі для рівняння

конвективної дифузії. Для усталеної профільної фільтрації підземних вод процес масопереносу і масообміну описується такими диференціальними рівняннями в частинних похідних (методи побудови просторових математичних моделей розглядаються в розділі 6):

$$\sigma' \frac{\partial c_{\Phi}^y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y^y \frac{\partial c_{\Phi}^y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z^y \frac{\partial c_{\Phi}^y}{\partial z} \right) - V_y' \frac{\partial c_{\Phi}^y}{\partial y} - V_z' \frac{\partial c_{\Phi}^y}{\partial z} - \frac{\partial N^y}{\partial t} + f^y(y, z, t), \quad (4.2.42)$$

$$\frac{\partial N^y}{\partial t} = f_0^y \left(c_{\Phi}^y, N^y, c_n^y, N_n^y, \alpha_{\Phi}^y, \beta_{\Phi}^y, t \right), \quad (4.2.43)$$

де D_y^y і D_z^y – коефіцієнти конвективної дифузії (фільтраційної дисперсії); V_y' і V_z' – компоненти вектора швидкості фільтрації V_i (V_y' , V_z'); c_n^y і N_n^y – концентрації граничного насичення j -ї речовини в рідкій та твердій фазах, функція $f^y(y, z, t)$ – джерела і стоки j -ї речовини.

Рівняння (4.2.43) описує кінетику масообміну між рідкою і твердою фазами, а також процеси сорбції і десорбції. Його вигляд залежить від природи j -ї речовини та від структури пористого середовища (грунтів і пород).

У багатьох практичних задачах рівняння кінетики масообміну речовини, що міститься в рідкій фазі з концентрацією c_{Φ}^y і в твердій фазі з концентрацією N^y , записується в одному з таких виглядів:

при кристалізації і розчиненні речовини в підземному потоці і зворотному процесі взаємодії з пористим середовищем

$$\frac{\partial N^y}{\partial t} = \gamma^y (c_{\Phi}^y - c_{\Phi}^*), \quad \gamma^y = \gamma_0^y \sigma', \quad (4.2.44)$$

де c_{Φ}^* – концентрація граничного насичення, σ' – пористість ґрунту або породи, γ_0^y – коефіцієнт розподілу речовини між рідкою і твердою фазами;

при нерівноважній незворотній сорбції або десорбції відповідно:

$$\frac{\partial N^y}{\partial t} = \gamma_1^y c_{\Phi}^y, \quad \frac{\partial N^y}{\partial t} = -\gamma_2^y c_{\Phi}^y, \quad (4.2.45)$$

де γ_1^y і γ_2^y – коефіцієнти розподілу речовини між фазами при сорбції і десорбції;

при рівноважній миттєвій сорбції і десорбції речовин відповідно:

$$\frac{\partial N^y}{\partial t} = \sigma' \Gamma^y \frac{\partial c_{\Phi}^y}{\partial t}, \quad \frac{\partial N^y}{\partial t} = -\sigma' \Gamma^y \frac{\partial c_{\Phi}^y}{\partial t}, \quad (4.2.46)$$

де Γ – коефіцієнт Генрі в рівнянні лінійної ізотерми $N^j = \Gamma^j c_{\phi}^j$, N^j і c_{ϕ}^j – рівноважні концентрації j -ї речовини.

За допомогою рівнянь (4.2.42)–(4.2.46) можна будувати математичні моделі для визначення динаміки концентрації j -ї речовини в підземних водах, що взаємодіють з поверхневими водами, впливаючи на їх якість. Зупинимось на одній практичній задачі, що виникає при визначенні масового потоку речовини $m_{\text{дн}}^j$, яка надходить до водного об'єкта з дна.

Для побудови математичної моделі розглянемо область, яку займають донні відклади та водонасичені ґрунти і породи, що знаходяться під ними. Якщо розглядати вертикальну площину, проведену перпендикулярно водному дзеркалу водоймища, то кожна однорідна ділянка ґрунту під дном i -ї камери в цій площині знаходиться приблизно в однакових гідрологічних умовах. Процес надходження речовини в водоймище, який відбувається як за рахунок виникнення градієнта концентрації, так і за рахунок переміщення речовини разом з фільтраційним потоком, у даному випадку можна вважати одномірним. Якщо не враховувати рух підземних вод до водоймища, то процес масопереносу відбувається тільки за рахунок молекулярної дифузії і описується такою крайовою задачею:

$$D_0^j \frac{\partial^2 c_{\phi}^j}{\partial z^2} = \sigma^j \frac{\partial c_{\phi}^j}{\partial t}, \quad (4.2.47)$$

$$c_{\phi}^j(z, t_0) = c_{\phi 0}^j, \quad c_{\phi}^j(0, t) = c(t), \quad c_{\phi}^j(T^j, t) = c_T^j(t), \quad (4.2.48)$$

де D_0^j – коефіцієнт молекулярної дифузії, σ^j – пористість донних відкладів і ґрунтів, $c_{\phi 0}^j$ – початкова концентрація речовини в підземних водах, c_T^j – концентрація j -ї речовини в підземних водах на глибині T^j від поверхні дна водоймища.

Якщо на глибині T^j напір $H_0^j = h^j$ перевищує рівень води у водоймі $h_0^j = H^j$ (рис. 4.5, а), то внаслідок утворення градієнту напору відбуватиметься фільтрація підземних вод через дно до водоймища зі швидкістю, що визначається законом Дарсі:

$$V_z^j = -\alpha^j \frac{\Delta h^j}{\Delta z} = -\alpha^j \frac{H_0^j - H^j}{T^j}. \quad (4.2.49)$$

У цьому випадку процес переміщення розчинених у підземних водах речовин (солей) і їх надходження у водоймище можна описати такою крайовою задачею конвективної дифузії:

$$D_z^j \frac{\partial^2 c_\phi^{ij}}{\partial z^2} - V_z^i \frac{\partial c_\phi^{ij}}{\partial z} = \sigma^i \frac{\partial c_\phi^{ij}}{\partial t}, \quad (4.2.50)$$

$$c_\phi^{ij}(z, t_0) = c_{\phi 0}^{ij}, \quad c_\phi^{ij}(0, t) = c(t), \quad c_\phi^{ij}(T^i, t) = c_T^{ij}(t). \quad (4.2.51)$$

Відзначимо, що в загальному випадку граничні значення $c_{\phi 0}^{ij}$ і c_T^{ij} є функції часу. Але в окремих випадках, коли зміна величин c^{ij} і c_T^{ij} відбувається повільно, тобто коли ці величини одержують малий приріст Δc^{ij} і Δc_T^{ij} порівняно з величиною модуля їх різниці $(c^{ij} - c_T^{ij})$, розв'язок крайових задач (4.2.47)–(4.2.48) і (4.2.50)–(4.2.51) можна шукати при сталих граничних умовах, що дорівнюють значенням функцій $c^{ij}(t)$ і $c_T^{ij}(t)$ при $t = t_0$.

При сталих крайових умовах розв'язок задачі (4.2.47)–(4.2.48) одержується у вигляді такого ряду Фур'є [23, 50, 54, 84]:

$$c_\phi^{ij}(z, t) = c^{ij} + \frac{c_T^{ij} - c^{ij}}{T^i} z + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{\phi 0}^{ij} - c^{ij} + (-1)^n (c_T^{ij} - c_{\phi 0}^{ij})}{n\pi} \times \\ \times \sin \frac{n\pi}{T^i} z \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{T^i} \right)^2 2 \frac{D_0^i}{\sigma^i} t \right]. \quad (4.2.52)$$

Скориставшись одержаним розв'язком і законом Фіка, знайдемо питомий масовий потік j -ї речовини або густину масового потоку $(m_z^j)_{num}$, що дорівнює кількості речовини, яка надходить через одиничну площу дна за одиницю часу, в такому вигляді:

$$(m_z^j)_{num} = D_0^j \frac{dc^{ij}}{dz} = - \frac{D_0^j}{T^i} (c_T^{ij} - c^{ij} + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (c_{\phi 0}^{ij} - c^{ij} + (c_T^{ij} - c_{\phi 0}^{ij}) (-1)^n) \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{T^i} \right)^2 2 \frac{D_0^i}{\sigma^i} t \right]). \quad (4.2.53)$$

Отже, загальний потік j -ї речовини, що надходить до i -ї камери (ділянки водоймища) в момент часу t через дно ($z = 0$) з площею S^i , визначається рівністю

$$m_{ду}^{ij} = (m_z^j)_{num} S^i. \quad (4.2.54)$$

У випадку, коли надходження j -ї речовини з донних відкладів відбувається як за рахунок дифузії, так і внаслідок фільтрації підземних вод, шуканий розподіл концентрації c_ϕ^{ij} визначається як розв'язок крайової задачі (4.2.50)–(4.2.51). При сталих крайових умовах і постійній швидкості фільтрації V_z^i , що визначається формулою (4.2.49), розв'язок має такий вигляд:

$$c_{\phi}^{ij}(z, t) = \frac{1}{\exp(p_i) - 1} \left(c^y \exp(p_i) - c_T^{ij} + (c_T^{ij} - c^y) \exp(p_i z^*) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi z \exp \left(\frac{p_i}{2} z^* - \left(\frac{p_i}{2} \right)^2 - (n\pi)^2 \right) t^* \right), \quad (4.2.55)$$

введені такі позначення:

$$b_n = \frac{(c_{\phi 0}^{ij} - c_T^{ij})(\exp(p_i) - 1) + 2(c_T^{ij} - c_{\phi 0}^{ij})(-1)^n \operatorname{sh} \frac{p_i}{2}}{\left(\frac{p_i}{2} \right)^2 + (n\pi)^2}, \quad (4.2.56)$$

$$p_i = \frac{V_z^* T^i}{D_z^y}, \quad t^* = \frac{D_z^y}{\sigma^i (T^i)^2} t, \quad z^* = \frac{z}{T^i}. \quad (4.2.57)$$

Скориставшись виразом (4.2.55) та узагальненим законом Фіка (другим законом Фіка), який для тривимірного простору з координатами x_1, x_2, x_3 записується у вигляді:

$$m_k^{ij} = V_k^i c^{ij} - D_k^y \frac{\partial c^{ij}}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.2.58)$$

знайдемо питомий масовий потік речовини, що надходить до водоймища з підземними водами, у такому вигляді [26]:

$$\left(m_z^y \right)_{\text{ни}} = - \frac{V_z^i c_T^{ij} S^i}{\exp(p_i) - 1} \left(c^y \exp(p_i) - c_T^y + 2(c_T^y - c^y) \exp(p_i z) + \right. \\ \left. + \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(3 \sin n\pi z^* + \frac{2n\pi}{p_i} \cos n\pi z^* \right) \exp \left(\frac{p_i}{2} z^* - \left((n\pi)^2 + \frac{p_i^2}{4} \right) t^* \right) \right). \quad (4.2.59)$$

Загальний масовий потік j -ї речовини (солей), що надходять у водоймище в момент часу t через дно ($z = 0$) i -ї камери водоймища з площею дна S^i , визначається рівністю (знак мінус, який показує, що потік речовини рухається вгору, опускаємо):

$$m_{\text{ан}}^{ij} = - \frac{V_z^i c_T^{ij} S^i}{\exp(p_i) - 1} \left(c_T^y + c^y (\exp(p_i) - 2) + \right. \\ \left. + \frac{2\pi}{p_i} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp \left(- \left(\frac{p_i}{2} \right)^2 - (n\pi)^2 \right) t^* \right). \quad (4.2.60)$$

При взаємодії j -ї речовини з пористим середовищем дна (сорбція, сорбція, кристалізація та ін.) замість рівнянь (4.2.47) та (4.2.50) необхідно розглядати відповідно такі рівняння:

$$D_0^j \frac{\partial^2 c_\phi^y}{\partial z^2} = \sigma^j \frac{\partial c_\phi^y}{\partial t} + \frac{\partial N^y}{\partial t}, \quad (4.2.61)$$

$$D_z^y \frac{\partial^2 c_\phi^y}{\partial z^2} - V_z^j \frac{\partial c_\phi^y}{\partial z} = \sigma^j \frac{\partial c_\phi^y}{\partial t} + \frac{\partial N^y}{\partial t}, \quad (4.2.62)$$

де N^y – концентрація j -ї речовини в твердій фазі.

До рівняння (4.2.61) або (4.2.62) потрібно додати одне з кінетичних рівнянь (4.2.44) або (4.2.46). Так, при миттєвій взаємодії між рідкою і твердою фазами кінетика сорбції описується рівняннями

$$\frac{\partial N^y}{\partial t} = \gamma_\phi^y \frac{\partial c_\phi^y}{\partial t}, \quad \gamma_\phi^y = \sigma^j \Gamma^y, \quad (4.2.63)$$

де коефіцієнт Генрі Γ^y визначається з рівняння лінійної ізотерми

$$N^y = \Gamma^y c_\phi^y. \quad (4.2.64)$$

Розв'язки крайових задач для рівнянь (4.2.61) і (4.2.62) у випадку миттєвої сорбції, що описується кінетичним рівнянням (4.2.63), легко одержати з розв'язків (4.2.52) і (4.2.55), якщо в правих частинах цих рівностей

сталі $\frac{D_0^j}{\sigma^j}$ і $\frac{D_z^y}{\sigma^j}$ відповідно замінити на сталі

$$\frac{D_0^j}{\sigma^j + \gamma_\phi^y}, \quad \frac{D_z^y}{\sigma^j + \gamma_\phi^y}.$$

Наведені в розділі співвідношення є основою математичного моделювання, в тому числі імітаційного, яке дає можливість визначати і прогнозувати динаміку основних гідрохімічних показників, що істотно впливають на якість поверхневих вод у різних гідрологічних, гідрометеорологічних та антропогенних умовах функціонування прісноводних екосистем.

Розділ 5

КИСНЕВИЙ РЕЖИМ І ДЕСТРУКЦІЯ ОРГАНІЧНИХ РЕЧОВИН. МОДЕЛЬ РК-БПК

Важливим фактором, що істотно впливає на процеси формування якості води і стан водних екосистем, є наявність у воді розчиненого кисню (РК). Концентрація у воді РК входить в число основних інтегральних показників, що характеризують якість поверхневих вод як однієї з найцінніших природних ресурсів. Кисень відіграє велику роль не тільки в підтримці існуючих форм життя в різних водних об'єктах, але й в процесах трансформації речовин, що потрапляють у поверхневі води зі стічними водами урбанізованих та промислових територій, а також зі стоками сільськогосподарських і тваринницьких комплексів. В останні роки у зв'язку з посиленням антропогенним пресом кисневий режим багатьох рік, водосховищ, каналів та озер України є дедалі напруженішим, збільшуються частота і тривалість заморних явищ, при цьому значна кількість РК витрачається на розкладання (деструкцію) органічних речовин, що легко окислюються. Як відомо [17, 43, 52, 111, 117, 129, 132, 135], мірою кількості у воді органічної речовини та інтенсивності її деструкції є величина біохімічної потреби кисню (БПК), яку неварію інколи ототожнюють з біохімічним споживанням кисню (БСК) при деструкції органічної речовини. Враховуючи те, що існує тісний зв'язок між кількістю (концентрацією) в воді розчиненого кисню і наявністю органічної речовини, велике значення при дослідженні гідробіологічних і гідрохімічних процесів має використання математичних моделей РК-БПК.

5.1. Математичні моделі динаміки РК і БПК

5.1.1. Модель Фелпса–Стрітера

Класичними результатами в області математичного моделювання кисневого режиму і динаміки органічної речовини є дослідження Стрітера і Фелпса [192], які для описання динаміки БПК і РК запропонували таку систему рівнянь:

$$\frac{dC_{\text{БК}}}{dt} = -k_1 C_{\text{БК}}, \quad (5.1.1)$$

$$\frac{dC_{PK}}{dt} = -k_2(C_{PK}^* - C_{PK}) - k_1 C_{BPK}, \quad (5.1.2)$$

де C_{BPK} – концентрація органічної речовини, що вимірюється в одиницях кисню; C_{PK} – концентрація розчиненого у воді кисню; $k_1 = k_1(C_{PK})$ – константа швидкості біохімічного окислювання (оксидації); $k_2 = k_2(T)$ – константа (коефіцієнт) аерації, що залежить від температури T ; C_{PK}^* – концентрація насиченого кисню в воді.

5.1.2. Багатокамерна двокомпонентна модель

В останні роки моделювання переносу і окислювання органічної речовини в поверхневих водах здійснюється за допомогою більш загальних диференціальних рівнянь, які враховують не тільки адвективний і дифузійний перенос речовини в водному потоці, а й інші фізико-хімічні та біологічні процеси [9, 19, 20, 25, 41, 53, 55, 80, 84, 101, 111, 135, 151, 174, 176, 177, 180, 182, 190, 193–196].

Не зупиняючись на математичних моделях РК-БПК, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, перейдемо до розгляду багатокамерної двокомпонентної моделі, яка ґрунтується на описуванні динаміки РК-БПК за допомогою системи звичайних диференціальних рівнянь (нульмірна модель). У цьому випадку приймемо умову, що концентрація РК і БПК не змінюється в кожній i -й камері, яка характеризується певними морфометричними (і симетричними), гідрологічними і гідрофізичними параметрами в межах верхнього (поверхневого) і нижнього (придонного) шару води. Отже, вважатимемо, що верхній шар води водного об'єкта поділений на n_1 ділянок (камер), а нижній шар – на n_2 ділянок (камер). Враховуючи основні механізми взаємодії РК з БПК та фактори, що впливають на трансформацію та підвищення цих інгредієнтів, систему диференціальних рівнянь, що описують динаміку РК і БПК в i -й камері верхнього шару води ($i = 1, 2, 3, \dots, n_1$) та в j -й камері нижнього шару води $j = 1, 2, 3, \dots, n_2$, запишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} W^{i1} \frac{dC_{PK}^{i1}}{dt} = & \sum_{k=1}^{J_1^i} q^{k1} C_{PK}^{k1} + \sum_{n=n_1^i}^{N_1^i} q^{n1} C_{PK}^{n1} - \sum_{m=m_1^i}^{M_1^i} q^{m1} C_{PK}^{m1} + q^{j2} C_{PK}^{j2} - \\ & - \left(q^{i1} + q_{CK}^{i1} + q_{6B}^{i1} + \frac{dw^{i1}}{dt} \right) C_{PK}^{i1} - k_1^{i1} C_{BPK}^{i1} + k_2^{i1} S_{*}^{i1} - (C_{PK}^{k1} - C_{PK}^{i1}) - \\ & - E_n^i W^{i1} + f_{PK}^{i1} W^{i1}; \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

$$W^{i1} \frac{dC_{\text{БПК}}^{i1}}{dt} = \sum_{k=1}^{J_1^i} q^{k1} C_{\text{БПК}}^{k1} + \sum_{n=n_1^i}^{N_1^i} q^{n1} C_{\text{БПК}}^{n1} - \sum_{m=m_1^i}^{M_1^i} q^{m1} C_{\text{БПК}}^{m1} + q^{j2} C_{\text{БПК}}^{j2} -$$

$$- \left(q^{i1} + q_{\text{ск}}^{i1} + q_{\text{бв}}^{i1} + \frac{dw^{i1}}{dt} \right) C_{\text{БПК}}^{i1} - k_1^{i1} C_{\text{БПК}}^{i1} + k_{\text{сед}}^{i1} C_{\text{БПК}}^{i1} + f_{\text{БПК}}^{i1} W^{i1}; \quad (5.1.4)$$

$$W^{j2} \frac{dC_{\text{РК}}^{j2}}{dt} = \sum_{k=1}^{J_2^j} q^{k2} C_{\text{РК}}^{k2} - \sum_{n=n_2^j}^{N_2^j} q^{n2} C_{\text{РК}}^{n2} - \sum_{m=m_2^j}^{M_2^j} q^{m2} C_{\text{РК}}^{m2} + q^{i1} C_{\text{РК}}^{i1} -$$

$$- \left(q_{\text{ск}}^{j2} + q_{\text{бв}}^{j2} + \frac{dw^{j2}}{dt} \right) C_{\text{РК}}^{j2} - k_1^{j2} C_{\text{БПК}}^{j2} + f_{\text{РК}}^{j2} W^{j2}; \quad (5.1.5)$$

$$W^{j2} \frac{dC_{\text{БПК}}^{j2}}{dt} = \sum_{k=1}^{J_2^j} q^{k2} C_{\text{БПК}}^{k2} - \sum_{n=n_2^j}^{N_2^j} q^{n2} C_{\text{БПК}}^{n2} - \sum_{m=m_2^j}^{M_2^j} q^{m2} C_{\text{БПК}}^{m2} +$$

$$+ q^{i1} C_{\text{БПК}}^{i1} - k_1^{j2} C_{\text{БПК}}^{j2} - \left(q_{\text{ск}}^{j2} + q_{\text{бв}}^{j2} + \frac{dw^{j2}}{dt} \right) C_{\text{БПК}}^{j2} + f_{\text{БПК}}^{j2} W^{j2} +$$

$$+ k_{\text{сед}}^{i1} C_{\text{БПК}}^{i1} - k_{\text{сед}}^{j2} C_{\text{БПК}}^{j2}; \quad (5.1.6)$$

$$W^{i1} = W_0^{i1} + \left(\sum_{k=1}^{J_1^i} q^{k1} + \sum_{n=n_1^i}^{N_1^i} q^{n1} - \sum_{m=m_1^i}^{M_1^i} q^{m1} + q^{j2} + q_{\text{ос}}^{i1} - q^{i1} - \right.$$

$$\left. - q_{\text{ск}}^{i1} - q_{\text{бв}}^{i1} - q_{\text{вип}}^{i1} \right) t; \quad (5.1.7)$$

$$W^{j2} = W_0^{j2} + \left(\sum_{k=1}^{J_2^j} q^{k2} + \sum_{n=n_2^j}^{N_2^j} q^{n2} - \sum_{m=m_2^j}^{M_2^j} q^{m2} + q^{i1} - q^{j2} - q_{\text{ск}}^{j2} - q_{\text{бв}}^{j2} \right) t; \quad (5.1.8)$$

де $C_{\text{РК}}^{i1}$, $C_{\text{БПК}}^{i1}$, $C_{\text{РК}}^{j2}$, $C_{\text{БПК}}^{j2}$ – концентрації РК і БПК в камерах відповідно верхнього і нижнього шарів води; $C_{\text{РК}}^{k1}$, $C_{\text{РК}}^{k2}$, $C_{\text{БПК}}^{k1}$, $C_{\text{БПК}}^{k2}$, q^{k1} , q^{k2} – концентрації кисню, органічної речовини та витрати води в притоках; $C_{\text{РК}}^{n1}$, $C_{\text{РК}}^{n2}$, $C_{\text{БПК}}^{n1}$, $C_{\text{БПК}}^{n2}$, q^{n1} , q^{n2} – концентрації кисню, органічної речовини та величини витрат води, що надходять з сусідніх ділянок в i -ту та j -ту камери; $C_{\text{БПК}}^{m1}$, $C_{\text{РК}}^{m2}$, q^{m1} , q^{m2} – концентрації БПК і РК та витрати води, що надходить з верхньої камери в нижню, і навпаки, з нижньої у верхню; $q_{\text{ск}}^{i1}$, $q_{\text{ск}}^{j2}$ – скид води із i -ї і j -ї камер; $q_{\text{бв}}$, $q_{\text{ос}}$, $q_{\text{вип}}$ – величини потоків безворотного водоспоживання, осадків та випаровування; k_2^{i1} – константа швидкості атмосферної аерації; $S_{\text{в}}^i$ – площа водного дзеркала i -ї ділянки водоймища; $E_{\text{н}}^i$ – швидкість виділення кисню з води у вигляді бульбашок; k_1^{i1} , k_2^{i1} – константи швидкості біохімічного розкладу (деструкції); $k_{\text{сед}}^{i1}$, $k_{\text{сед}}^{j2}$ – константи швидкості седиментації органічної

речовини; W^{i1}, W^{j2} – об'єми i -ї камери верхнього шару та j -ї камери нижнього шару води; $f_{РК}^{i1}, f_{БК}^{i1}, f_{РК}^{j2}, f_{БК}^{j2}$ – джерела і стоки розчиненого у воді кисню та органічної речовини в камерах верхнього і нижнього шарів води.

Для чисельної реалізації рівнянь (5.1.3)–(5.1.8) необхідно ще задати початкові умови, які можна записати в такому вигляді:

$$C_{РК}^{i1}(t_0) = C_{РК}^{i1}, C_{БК}^{i1}(t_0) = C_{БК}^{i1}, W^{i1}(t_0) = W_0^{i1}; \quad (5.1.9)$$

$$C_{РК}^{j2}(t_0) = C_{РК}^{j2}, C_{БК}^{j2}(t_0) = C_{БК}^{j2}, W^{j2}(t_0) = W_0^{j2}. \quad (5.1.10)$$

Розкриття фізичного змісту і структури членів $E_n, f_{РК}$ та $f_{БК}$ при моделюванні динаміки розчиненого у воді кисню та органічної речовини за допомогою рівнянь типу (5.1.3)–(5.1.8) різні дослідники (модельєри) здійснюють з різною мірою деталізації.

При визначенні змісту і структури функцій $f_{РК}$ та $f_{БК}$ необхідно враховувати такі фактори: інтенсивність первинної біопродукції (фотосинтез), споживання кисню при диханні водоростей та інших гідробіонтів, витрата кисню на хімічне окислення, споживання кисню бентосними організмами та його витрата на хімічне окислення речовин, що накопичуються в донних відкладах. Усі зазначені фактори при моделюванні можна врахувати, якщо ввести їх кількісні характеристики, а саме: питому (на одиницю об'єму води) первинну продукцію кисню при фотосинтезі фітопланктону E_1 , фітобентосу E_2 та заглиблених вищих водних рослин E_3 ; питому швидкість споживання кисню при диханні водоростей (рослин) R_p та водних тварин $R_{1в}$; питому інтенсивність (швидкість) споживання кисню при хімічному окисленні розчинних у воді та змулених речовин X_n ; питому швидкість споживання кисню при хімічному розкладанні (окисленні) речовин в донних відкладах $X_{дн}$. Таким чином, функцію $f_{РК}$ можна визначити за допомогою такого адитивного виразу:

$$f_{РК} = E_1 + E_2 + E_3 - R_p - R_{1в} - R_6 - X_n - X_{дн}. \quad (5.1.11)$$

Питома інтенсивність (потік, швидкість) фотосинтезу фітопланктону і фітобентосу з підвищенням температури води зростає, досягаючи в певному інтервалі температур найбільшого значення, а потім, з наступним підвищенням температури, починає спадати. Збільшення концентрації біомаси фітопланктону до деякої так званої критичної величини зменшує інтенсивність його продуктивності внаслідок затемнення та інших процесів внутрішньовидової конкуренції. Тому для математичного описування процесів первинної продуктивності кисню фітопланктоном і фітобентосом можна застосовувати такі напівемпіричні формули:

$$E_1 = r_1(T) B_{\text{фп}} \left(1 - \exp(-\beta_1 I (B_{\text{фп}}^* - B_{\text{фп}})) \right).$$

$$E_2 = r_2(T) B_{\text{фб}} (1 - \exp(-\beta_2 I)),$$

де $B_{\text{фп}}$, $B_{\text{фп}}^*$ – концентрація фітопланктону в даний момент і ~~критична~~
(максимальна) концентрація фітопланктону, мг/л; $B_{\text{фб}}$ – концентрація
фітобентосу, мг/л; $r_1(T)$, $r_2(T)$ – коефіцієнти, що характеризують залеж-
ність інтенсивності фотосинтезу від температури, 1/доба; I – інтенсивність
світла, $\frac{\text{ккал}}{\text{дм}^2 \cdot \text{доба}}$; β_1 , β_2 – коефіцієнти, що характеризують величину
самозатемнення, $\frac{\text{мг} \cdot \text{доба}}{\text{ккал} \cdot \text{дм}}$.

Коефіцієнт $r(T)$ можна, наприклад, визначити в такому вигляді [17]:

$$r(T) = \frac{\alpha_0}{1 + \Theta^n}, \quad (5.1.14)$$

де n – парне число.

Параметр Θ визначимо такою лінійною функцією від T :

$$\Theta = \frac{\frac{1}{2}(T^* + T_*) - T}{\frac{1}{2}(T^* - T_*)}, \quad (5.1.15)$$

де T_* і T^* – відповідно нижня і верхня границі оптимального інтервалу змі-
нювання температури води; α_0 – коефіцієнт пропорціональності (1/доба), що
характеризує фотосинтетичні (біопродукційні) властивості того чи іншого
виду водоростей. Як бачимо, величина Θ^n , а отже, і функція (5.1.14)
характеризують вплив температури на інтенсивність фотосинтезу, найбільше
значення ця функція приймає на середині інтервалу (T_*, T^*) , тобто при
 $T = \frac{T_* + T^*}{2}$. Поза цим інтервалом значення функції (5.1.14) різко зменшу-
ються. Параметри α_0 і n використовуються при верифікації цієї функції.

Утворення кисню за рахунок фотосинтезу зануреної вищої водної рос-
линності можна описати таким емпіричним виразом [17]:

$$E_3 = \alpha I \left(1 - \exp\left(-\frac{E_3^*}{\beta_3 I}\right) \right), \quad (5.1.16)$$

де E_3^* – максимально можлива величина кисню, утворена в процесі фотосин-
тезу вищою водною рослинністю. У рівняння (5.1.16) не входить величина
біомаси, як це має місце в рівняннях (5.1.12) і (5.1.13). Таке співвідношення

застосовується для моделювання процесів фотосинтезу, коли не спостерігається істотної зміни біомаси фітопланктону або вищої рослинності

Швидкість споживання кисню для дихання водними рослинами і тваринами, як правило, пропорційна концентрації відповідних біомас B_p і $B_{тв}$

Вона зростає з підвищенням температури води і зменшується при зменшенні концентрації кисню в воді, а саме

$$R_p = \alpha_p B_p \left(1 - \exp\left(-\frac{C_{ПК}}{\alpha_1}\right) \right), \quad (5.1.17)$$

$$R_{тв} = \alpha_{тв} B_{тв} \left(1 - \exp\left(-\frac{C_{ПК}}{\alpha_2}\right) \right), \quad (5.1.18)$$

де α_p і $\alpha_{тв}$ визначаються з урахуванням температурної поправки Крога [25]

$$\alpha_p = \alpha_p^{(0)} 2^{\frac{T-T_0}{10}}, \quad \alpha_{тв} = \alpha_{тв}^{(0)} 2^{\frac{T-T_0}{10}}, \quad (5.1.19)$$

де α_1 , α_2 – сталі, що визначаються експериментальним способом, $\alpha_p^{(0)}$,

$\alpha_{тв}^{(0)}$ – значення параметрів α_p та $\alpha_{тв}$ при початковій температурі $T = T_0$

(T – температура води)

Аналогічна залежність приймається для описування споживання кисню бентосними організмами [17]

$$R_b = \beta_b B_b \left(1 - \exp\left(-\frac{C_{ПК}}{\beta_b}\right) \right), \quad (5.1.20)$$

де стала β_b визначається за даними натурних спостережень. Часто її визначають як максимально можливе споживання кисню бентосом

Швидкість хімічного окислення (оксидация) речовин, що потрапляють у поверхневі води, за законом діючих мас пропорційна добутку маси цих речовин на масу кисню, причому кожен співмножник підноситься до степеня, показник якого залежить від природи речовин, що окислюється. Проте, в практиці математичного моделювання використовуються простіші залежності, які базуються на припущенні, що у воді міститься достатня для окислення кількість кисню, або кількість кисню у воді різко не змінюється. У таких випадках витрата кисню при хімічному окисленні розчинених у воді речовин описується такою залежністю

$$X_b = \alpha_{нр} C_{нр}, \quad (5.1.21)$$

або такою рівністю

$$X_b = k_{нр}, \quad (5.1.22)$$

де C_{np} – концентрація у воді неконсервативної речовини (токсиканта), α_{np} коефіцієнт неконсервативності речовини, k_{np} константа швидкості хімічного окислення неконсервативної речовини. Співвідношення (5 1 21) краще описує процес окисації в початковий період, а рівність (5 1 22) – в наступний період. Крім цього, слід зауважити, що для використання формули (5 1 21) потрібно знати концентрацію речовини, що окислюється, а у разі застосування рівності (5 1 22) достатньо лише визначити сталу неконсервативності речовини, що окислюється у воді.

Швидкість витрати кисню на хімічне окислення речовин, що містяться у верхніх шарах донних відкладів, визначається відповідно до законів дифузії, а саме

$$X_{дн} = D_{дн} (C_{PK} - C_{PK}^{дн}), \quad (5 1 23)$$

де $C_{PK}^{дн}$ – концентрація кисню в донних відкладах, $D_{дн}$ – коефіцієнт молекулярної або (у випадку фільтрації з водоїмища) конвективної дифузії.

Застосовуються й інші залежності, що описують поглинання (споживання, використання) кисню донними відкладами або ґрунтами. Наприклад, в роботі [17] пропонується таке співвідношення

$$X_{дн} = X_{дн}^{max} \left(1 - \exp \left(- \frac{C_{PK}}{C_{дн}^*(T)} \right) \right), \quad (5 1 24)$$

де $X_{дн}^{max}$ – максимально можлива швидкість споживання кисню дном, $C_{дн}^*(T)$ – рівноважна концентрація кисню при температурі T (концентрація повного насичення киснем при температурі T).

Питання кількісної оцінки утворення кисню за рахунок фотосинтезу, а також визначення впливу життєдіяльності різних видів водних організмів (гидробіонтів) на кисневий режим водних об'єктів є одними з найскладніших при математичному моделюванні процесів формування якості води, зокрема кисневого режиму. Тому ці питання потребують додаткового детального вивчення, внас підок чому потрібно з'ясувати можливість і доцільність урахування згаданих факторів при розрахунку самоочисної спроможності (СС) різних водних об'єктів, особливо при розрахунку СС в малозабруднених водоймах, де процеси фотосинтезу можуть відігравати вирішальне значення в оновленні розчиненого у воді кисню. В інших випадках, особливо в мілких водосховищах, де відбуваються інтенсивні процеси впротові аерації, членом f_{PK} , що входить в праву частину рівнянь (5 1 3) і (5 1 5), можна знехтувати.

Тепер зупинимося на структурі функції $f_{БК}$, що описує додаткові джерела та стоки органічної речовини, які виникають за рахунок внутрішньоводоймних процесів, а саме відмирання фітопланктону та інших гідро-

біонтів; споживання (виїдання) органіки гідробіонтами, окрім бактеріального розкладання органічних речовин; вимивання органічної речовини з донних відкладів, наприклад, при скаламучуванні. Таким чином, для описування цих процесів можна обмежитися такою рівністю:

$$f_{\text{БПК}} = E_{\text{БПК}} - A_{\text{БПК}} + D_{\text{БПК}}, \quad (5.1.25)$$

де $E_{\text{БПК}}$ – питома швидкість відмирання гідробіонтів, $A_{\text{БПК}}$ – швидкість виїдання органіки гідробіонтами, $D_{\text{БПК}}$ – швидкість вимивання органічних речовин з донних відкладів.

Зазначимо, що останні дві величини $A_{\text{БПК}}$ і $D_{\text{БПК}}$, як правило, не вносять істотних змін у динаміку біохімічної потреби кисню (БПК) і, крім того, нам не завжди відома інформація про кількісні показники для цих величин. Тому в більшості випадків можна прийняти

$$f_{\text{БПК}} = E_{\text{БПК}} = \alpha E_{\text{РК}}, \quad (5.1.26)$$

де α – узагальнений коефіцієнт смертності фітопланктону, фітобентосу, зоопланктону та інших гідробіонтів, $E_{\text{РК}} = E_1 + E_2 + E_3$.

Потрібно звернути увагу на те, що БПК є тільки одним з важливих показників забруднення води органічними речовинами, оскільки БПК нееквівалентне загальній концентрації органічних сполук, присутніх у воді. Такій концентрації еквівалентна хімічна потреба води в кисні (ХПК) і тільки у тому випадку, коли ця органічна речовина окислюється біхроматом [135]. Тому БПК складає лише частину ХПК: для одних органічних речовин така частина може бути більшою, для інших – меншою. Якщо для побутових стічних вод ця частина майже не змінюється (коливається у невеликому інтервалі), то для промислових стічних вод вона може коливатися в межах від кількох процентів до величин, близьких до 100 %. Для речовин, які не здатні до біохімічного окислення (біохімічно жорстких), БПК дорівнює нулю при досить великих ХПК, наприклад, при БПК = 0 для пікринової кислоти ХПК = 1283 мг/л. З викладеного випливає, що БПК не може розглядатися як еквівалент концентрації забруднюючих речовин. БПК дозволяє дізнаватися тільки про здатність органічних речовин, що перебувають у воді, до біохімічного окислення та про зниження концентрації розчиненого у воді кисню.

Біохімічне окислення органічних речовин поділяється на дві фази. У першій фазі відбувається окислення вуглецю до CO_2 та водню до H_2O . У другій фазі здійснюється в основному окислення амонійних сполук до нітратів. Тому, як правило, за допомогою БПК характеризують першу фазу біохімічного окислення органічних речовин, яка пов'язується з утворенням CO_2 і H_2O . Таким чином, БПК характеризує частку органічної речовини, яка використовується мікроорганізмами (бактеріопланктоном) на покриття своїх енергетичних потреб (на дихання), тобто БПК може бути тільки якоюсь частиною ХПК.

Оскільки БПК характеризує тільки ту частину концентрації субстрату, яка мікроорганізмами використовується на покриття своїх енергетичних потреб, то на утворення нових клітин (пластичні цілі) вони можуть використати кількість субстрату, що дорівнює різниці ХПК – БПК [135].

5.2. Визначення невідомих параметрів моделі

5.2.1. Визначення сталої неконсервативності

Тепер зупинимось детальніше на основних коефіцієнтах (параметрах), які присутні в правій частині рівнянь (5.1.1)–(5.1.2) або рівнянь (5.1.3)–(5.1.6), тобто розглянемо питання про визначення коефіцієнта (сталой) швидкості біохімічного розкладу k_1 та коефіцієнта аерації k_2 .

Розв'язок системи (5.1.1)–(5.1.2) має вигляд

$$C_{\text{БПК}} = C_{\text{БПК}}^{(0)} e^{-k_1 t}, \quad (5.2.1)$$

$$C_{\text{РК}} = C_{\text{РК}}^* - (C_{\text{РК}}^* - C_{\text{РК}}^{(0)}) e^{-k_2 t} - \frac{k_1 C_{\text{БПК}}^{(0)}}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}), \quad (5.2.2)$$

де $C_{\text{БПК}}^{(0)}$ і $C_{\text{РК}}^{(0)}$ – початкова концентрація відповідно органічної речовини та розчиненого у воді кисню при $t = t_0$.

Після логарифмування лівої та правої частин рівняння (5.2.1) одержимо

$$k_1 t = \ln C_{\text{БПК}}^{(0)} - \ln C_{\text{БПК}}, \quad (5.2.3)$$

де t – час, що відлічується від деякого початкового моменту $t = t_0$, при якому концентрація $C_{\text{БПК}}$ дорівнює нулю, до моменту t , при якому концентрація $C_{\text{БПК}}$ дорівнює $C_{\text{БПК}}^{(t)}$. Отже, якщо відома концентрація $C_{\text{БПК}}^{(t)}$, то з рівняння (5.2.3) легко знайти сталу неконсервативності:

$$k_1 = \frac{\ln C_{\text{БПК}}^{(t)}}{t}, \quad t > 0. \quad (5.2.4)$$

Якщо в рівнянні (5.2.3) підставити значення $C_{\text{БПК}}$ для двох моментів часу t_1 і t_2 , то одержимо два рівняння, з яких знайдемо:

$$k_1 = \frac{\ln C_{\text{БПК}}^{(t_2)} - \ln C_{\text{БПК}}^{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{\ln \frac{C_{\text{БПК}}^{(t_2)}}{C_{\text{БПК}}^{(t_1)}}}{t_2 - t_1}. \quad (5.2.5)$$

Зауважимо, що праві частини рівнянь (5.2.4) та (5.2.5) взяті з протилежним знаком, оскільки стала k_1 повинна бути додатньою. У зв'язку з цим потрібно також зазначити, що числове значення концентрації БПК можна

одержати тільки в кінці періоду, протягом якого відбувається реакція окислення (деструкція органічної речовини). Тому при проведенні експерименту в кисневих склянках зростання концентрації БПК спостерігається в зворотному порядку порівняно з дійсним протіканням процесу у поверхневих водах.

5.2.2. Визначення концентрації насичення

У рівняннях (5.1.1)–(5.1.2), а також у більш загальному рівнянні (5.1.3) процес насичення киснем за рахунок аерації описується реакцією 1-го порядку у вигляді

$$\frac{dC_{PK}^a}{dt} = k_2 (C_{PK}^* - C_{PK}^a) \quad (5.2.6)$$

або в такому вигляді

$$\frac{dC_{PK}^a}{dt} = k_2^* \alpha_s (C_{PK}^* - C_{PK}^a), \quad (5.2.7)$$

де C_{PK}^a – концентрація розчиненого у воді кисню, що надходить за рахунок аерації, C_{PK}^* – концентрація кисню у воді при повному насиченні, тобто рівноважна концентрація розчиненого у воді кисню при даному атмосферному тиску та при даній температурі води, k_2 – коефіцієнт аерації, k_2^* – коефіцієнт масопереносу, α_s – відношення площі вільної поверхні води (дзеркала) до її об'єму (об'єму 1-го водоимщика або 1-ї ділянки водойми), що дорівнює $\alpha_s = h$ (h – середня глибина водоймища).

Рівноважна концентрація кисню у воді визначається такими рівностями [19]

$$C_{PK}^* = \beta_0 \frac{1000 k_{H_2} p}{760}, \quad (5.2.8)$$

$$p = 0,2095 (p_0 - p_n), \quad (5.2.9)$$

де p_0 – барометричний тиск, p_n – тиски пару води, k_{H_2} – відношення грам-молекулярної ваги до мольного об'єму при стандартних температурі і тиску β_0 – бунзенівський коефіцієнт поглинання. Незважаючи на простоту формули (5.2.8), визначення величин рівноважної концентрації кисню представляє значні труднощі, й тому до цього часу не існує єдиної загальноприйнятої таблиці розчинності кисню в воді. Дані з різних опублікованих джерел [19] свідчать про те, що мінімальні значення рівноважної концентрації кисню у воді при температурах 0 °C і 20 °C дорівнюють відповідно 14,16 мг/л і 8,84 мг/л, а максимальні значення при тих же температурах і при нормальному атмосферному тиску (1 атм або 1,01 · 10⁵ Па) дорівнюють відповідно 14,70 мг/л і 9,39 мг/л. Проміжні значення концентрації при температурі T °C можна визначити за допомогою лінійної інтерполяції, а саме

$$C_{PK}^* = \frac{C_{20} - C_0}{20} T + C_0, \quad (5.2.10)$$

де за C_0 і C_{20} можна взяти середнє арифметичне мінімальних і максимальних значень, тобто

$$C_0 = \frac{1}{2}(C_0^{\max} + C_0^{\min}) = 14,43, \quad C_{20} = \frac{1}{2}(C_{20}^{\max} + C_{20}^{\min}) = 9,12 \quad (5.2.11)$$

Деякі автори [195] пропонують таку аналітичну залежність рівноважної концентрації від температури T

$$C_{PK}^* = 14,62 - 0,4042T + 0,00842T^2 + 0,00009T^3 \quad (5.2.12)$$

Іноколи замість поняття концентрації насичення розглядається концентрація абсолютного насичення води киснем, коли враховується не тільки барометричний тиск, а й тиск стовпа води. У цьому випадку так звана критична концентрація кисню C_{PK}^{KP} визначається такою рівністю [19]

$$C_{PK}^{KP} = (1 + 0,462h - 4,78p_n) C_{PK}^*, \quad (5.2.13)$$

де h – глибина води, м. Оскільки тиск пару води невеликий (0,0312 атм), то останнім членом у правій частині рівності (5.2.13) можна знехтувати.

5.2.3. Емпіричні формули для визначення коефіцієнта аерації

Між коефіцієнтами k_2 і k_2^* існує проста залежність $k_2 = k_2^* h$, тому надалі розглядатимемо питання ідентифікації коефіцієнта аерації k_2 . Повністю це питання викладено в роботі [19]. Тут ми зупинимось тільки на основних положеннях даної проблеми.

Якщо позначити через r повний опір масопереносу в системі «повітря – вода», то його можна представити (подати) у вигляді суми опору рідкого r_p і газового r_g середовищ [19]

$$r = r_p + r_g = \frac{1}{k_p} + \frac{1}{Hk_1}, \quad (5.2.14)$$

де H – константа Генрі (для кисню $H = 30$). Типовим значенням коефіцієнта масопереносу для кисню при незбуреній водній поверхні є $k_p = 4$ см/год, а для пару води така величина становить $k_p = 10^3$ см/год. Звідси випливає, що процес перенесення при насиченні киснем даного об'єму води через вільну поверхню визначається фактично рідким середовищем, а вплив втру може позначитися через механічне збурювання вільної поверхні. Тому при слабкому вітрі коефіцієнти аерації (реаерації) визначаються в основному різними і гидравлічними характеристиками [196].

Для визначення коефіцієнта реаерації запропоновано велику кількість концептуальних, емпіричних та напівемпіричних формул. Найпоширеніша з них така напівемпірична формула.

$$k_2 = kV^a h^b J^c, \quad (5.2.15)$$

де k_2 – коефіцієнт реаерації (1/доба), V – швидкість течії (м/с), h – глибина течії (м), J – гідравлічний уклон (градієнт), k, a, b, c – стали величини, які для кожного випадку визначаються експериментально.

Наведемо кілька емпіричних формул, які були запропоновані різними авторами і при аналізі стандартної та нормальної середніх похибок були визнані найточнішими.

Одна з перших спроб застосувати регресійний аналіз для одержання залежності між коефіцієнтом реаерації і характеристиками річки була зроблена в роботі [176], де наводиться таке рівняння регресії

$$k_2 = 0,021V^{2,695} h^{-3,085} J^{-0,823} \quad (5.2.16)$$

На основі узагальнення даних, одержаних внаслідок натурних спостережень на п'яти річках, було запропоновано таку формулу [182]:

$$k_2 = 13,4 \cdot 10^3 VJ. \quad (5.2.17)$$

У роботі [174] було показано, що коефіцієнт реаерації для річок краще описується таким рівнянням регресії

$$k_2 = 32,4V^{0,413} h^{-1,408} J^{0,273}. \quad (5.2.18)$$

Як з'ясувалось при подальших дослідженнях, формула (5.2.17) дає завищені результати, а формула (5.2.18) – занижені. Крім цього, було показано, що коефіцієнт реаерації без істотних втрат точно можна визначити через середню швидкість течії V і глибину течії h . У даному випадку формулу (5.2.16) можна записати в такому вигляді [176]:

$$k_2 = 5,01V^{0,969} h^{-1,673}, \quad (5.2.19)$$

а формулу (5.2.18) так [174]:

$$k_2 = 5,51V^{0,607} h^{1,689} \quad (5.2.20)$$

Проте найбільш простими і точними виявились емпірична формула [196]:

$$k_2 = 5,13Vh^{\frac{3}{4}} \quad (5.2.21)$$

та емпірична формула [174]:

$$k_2 = 4,46V^{0,703} h^{-1,054}. \quad (5.2.22)$$

Хороший збіг з експериментальними даними при малих і помірних швидкостях течії (0,1–0,5 м/с) дає таке співвідношення

$$k_2 = 3,68V^{1/2}h^{-3/4} \quad (5.2.23)$$

Як свідчить аналіз літератури, незважаючи на великий вибір емпіричних формул для визначення коефіцієнта реаерації k_2 , особливо у випадках, коли потрібно врахувати вплив вітру на фотосинтез водоростей, необхідно визначити цей коефіцієнт експериментально в кожному окремому випадку стосовно конкретної водної об'єкта, тобто у кожному окремому випадку необхідно визначити сталі k , a , b , c у формулі (5.2.15)

5.2.4. Модель Феліса–Стрітера для відкритих систем

Якщо система (екосистема) відкрита, тобто іззовні в дану систему (річку, озеро, водосховище) поступає органічна речовина зі швидкістю Q_0 , то динаміка розчиненої у воді кисню (РК) і органічної речовини (БПК) опишеється такою системою рівнянь.

$$\frac{dC_{\text{БПК}}}{dt} = Q_0 - k_1 C_{\text{БПК}}, \quad (5.2.24)$$

$$\frac{dC_{\text{РК}}}{dt} = k_2 (C_{\text{РК}}^* - C_{\text{РК}}) - k_1^* C_{\text{БПК}}. \quad (5.2.25)$$

Розв'язок системи (5.2.24)–(5.2.25) повинен задовольняти додаткові (початкові) умови, а саме

$$C_{\text{БПК}}(0) = C_{\text{БПК}}^{(0)}, \quad C_{\text{РК}}(0) = C_{\text{РК}}^{(0)}. \quad (5.2.26)$$

Зробивши у рівнянні (5.2.24) підстановку

$$C_{\text{БПК}}(t) = B(t) + \frac{Q_0}{k_1}, \quad (5.2.27)$$

невідому функцію $B(t)$ знайдемо з рівняння

$$\frac{dB}{dt} = -k_1 B, \quad (5.2.28)$$

тобто у такому вигляді

$$B = A_1 e^{-k_1 t}, \quad A_1 = \text{const} \quad (5.2.29)$$

Отже, шукана функція (5.2.27) запишеться у вигляді

$$C_{\text{БПК}}(t) = A_1 e^{-k_1 t} + \frac{Q_0}{k_1}. \quad (5.2.30)$$

Враховуючи граничні умови (5.2.26), розв'язок (5.2.30) знайдемо в остаточному вигляді

$$C_{\text{БПК}}(t) = \left(C_{\text{БПК}}^{(0)} - \frac{Q_0}{k_1} \right) e^{-k_1 t} + \frac{Q_0}{k_1}. \quad (5.2.31)$$

Тепер рівняння (5.2.25) можна записати так:

$$\frac{dC_{\text{РК}}}{dt} = -k_2 C_{\text{РК}} + k_2 C_{\text{РК}}^* - \frac{k_1^*}{k_1} Q_0 - k_1^* \left(C_{\text{БПК}}^{(0)} - \frac{Q_0}{k_1} \right) e^{-k_1 t}. \quad (5.2.32)$$

Розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\frac{dC_{\text{РК}}}{dt} = -k_2 C_{\text{РК}} \quad (5.2.33)$$

має вигляд

$$C_{\text{РК}}(t) = A_2 e^{-k_2 t}, \quad A_2 = \text{const}. \quad (5.2.34)$$

Застосовуючи метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа), розв'язок неоднорідного рівняння (5.2.32) шукатимемо в такому вигляді:

$$C_{\text{РК}}(t) = A_2(t) e^{-k_2 t}, \quad (5.2.35)$$

де $A_2(t)$ поки що невідома функція. Для знаходження $A_2(t)$ підставимо функцію (5.2.35) і її похідну в рівняння (5.2.32).

Після такої підстановки одержимо

$$\frac{dA_2}{dt} = \left(k_2 C_{\text{РК}}^* - \frac{k_1^*}{k_1} Q_0 \right) e^{k_2 t} - \left(k_1^* C_{\text{БПК}}^{(0)} - \frac{k_1^*}{k_1} Q_0 \right) e^{(k_2 - k_1)t}. \quad (5.2.36)$$

Інтегруючи останню рівність, знайдемо

$$A_2(t) = \frac{k_1 k_2 C_{\text{БПК}}^* - k_1^* Q_0}{k_1 k_2} e^{k_2 t} - \frac{k_1^* (k_1 C_{\text{БПК}}^{(0)} - Q_0) e^{(k_2 - k_1)t}}{k_1 (k_2 - k_1)} + B_2. \quad (5.2.37)$$

Підставляючи функцію (5.2.37) в праву частину рівності (5.2.35), загальний розв'язок рівняння (5.2.32) запишемо у вигляді:

$$C_{\text{РК}}(t) = \frac{k_1 k_2 C_{\text{БПК}}^* - k_1^* Q_0}{k_1 k_2} - \frac{k_1^* (k_1 C_{\text{БПК}}^{(0)} - Q_0)}{k_1 (k_2 - k_1)} e^{-k_1 t} + B_2 e^{-k_2 t}, \quad (5.2.38)$$

$$B_2 = \text{const}.$$

Використовуючи початкову умову (5.2.26), знайдемо

$$B_2 = C_{\text{РК}}^{(0)} - \frac{k_1 k_2 C_{\text{БПК}}^* - k_1^* Q_0}{k_1 k_2} - \frac{k_1^* (k_1 C_{\text{БПК}}^{(0)} - Q_0)}{k_1 (k_2 - k_1)}. \quad (5.2.39)$$

Після підстановки виразу (5.3.39) в (5.2.38) знайдемо шуканий розв'язок рівняння (5.2.32) у такому вигляді:

$$C_{PK}(t) = \frac{k_1 k_2 C_{БПК}^* - k_1^* Q_0}{k_1 k_2} - \frac{k_1^* (k_1 C_{БПК}^{(0)} - Q_0)}{k_1 (k_2 - k_1)} e^{-k_1 t} + \left(C_{PK}^{(0)} - \frac{k_1 k_2 C_{БПК}^* - k_1^* Q_0}{k_1 k_2} + \frac{k_1^* (k_1 C_{БПК}^{(0)} - Q_0)}{k_1 (k_2 - k_1)} \right) e^{-k_2 t}. \quad (5.2.40)$$

Отже, розв'язком системи рівнянь (5.2.24)–(5.2.25) є функції (5.2.31) і (5.2.40). Параметри k_1 , k_2 , C_{PK}^* визначаються формулами, приведеними в підрозділах 5.2.1, 5.2.2 і 5.2.3. Якщо у формулах (5.2.31) і (5.2.40) покласти $Q_0 = 0$, $k_1^* = k_1$, то одержимо розв'язок (5.2.1)–(5.2.2) для системи рівнянь (5.1.1)–(5.1.2), яка описує процес деструкції органічної речовини в закритій водній екосистемі.

Розділ 6

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ ЕКОСИСТЕМ

У даному розділі розглядаються математичні моделі, що описують системи і процеси, які характеризуються певною неоднорідністю у просторі, тобто такі системи, в яких показники (параметри) змінюються як у часі, так і просторі. Ці так звані розподілені системи описуються функціями багатьох змінних або диференціальними рівняннями в частинних похідних.

6.1. Загальний вигляд математичної моделі динамічної системи з розподіленими характеристиками

Позначимо через $c(x, y, z, t)$ концентрацію речовини, що розповсюджується в просторі, або концентрацію (густина) біомаси організмів, популяцій, угруповань. Під змінною величиною $c(x, y, z, t)$ можна також розуміти чисельність організмів певного виду популяції або угруповання.

Загальна математична модель динаміки розподілу у просторі (або в екосистемі) j -ї ($j = 1, 2, \dots, n$) речовини (або організмів j -го виду) описується таким диференціальним рівнянням у частинних похідних:

$$\frac{\partial c_j}{\partial t} = F_j(c_1, c_2, \dots, c_n, x, y, z, t) + D \left(\frac{\partial^2 c_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_j}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x}(V_x c_j) - \frac{\partial}{\partial y}(V_y c_j) - \frac{\partial}{\partial z}(V_z c_j), \quad (6.1.1)$$

де V_x, V_y, V_z – складові швидкості переміщення середовища (наприклад, повітря або води), в якому знаходиться досліджувана речовина (або організми).

Якщо система (6.1.1) не автономна, то її постійні параметри (коефіцієнти) стають змінними, які залежать від часу, а в даному просторі можуть знаходитись джерела та стоки, інтенсивність яких теж змінюється у часі.

Система рівнянь

$$\frac{\partial c_j}{\partial t} = F_j(c_1, c_2, \dots, c_n, t), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.1.2)$$

називається **точковою моделлю**, що відповідає моделі з розподіленими параметрами (6.1.1). Функція $F_j(c_1, c_2, \dots, c_n, x, y, z, t)$ в загальному випадку може бути нелінійною або лінійною зі змінними коефіцієнтами, що залежать від часу t .

Перейдемо до більш конкретного виду рівняння, яким описується розповсюдження речовини в рухомому (водному або повітряному) та нерухомому середовищах.

6.2. Побудова моделей масопереносу в нерухомому та рухомому середовищах

Виділимо в середовищі, що ми розглядаємо, елементарний (досить малий) простір у вигляді куба (або паралелепіпеда) з паралельними осям координат ребрами довжиною $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (рис. 6.1)

Позначимо кількість речовини, що дифундує через одиничну площинку за одиницю часу в напрямку осі абсцис (Ox), через m_x , а кількість речовини, що дифундує через такі ж площинки у напрямках осі ординат (Oy) та осі аплікат (Oz), позначимо відповідно через m_y і m_z . Тоді відомий закон Фіка можна записати в такому вигляді:

$$m_x = -D \frac{\partial c}{\partial x}, \quad m_y = -D \frac{\partial c}{\partial y}, \quad m_z = -D \frac{\partial c}{\partial z}, \quad (6.2.1)$$

де через $c(x, y, z, t)$ позначено концентрацію речовини, що розповсюджується за рахунок дифузії.

Величини m_x, m_y, m_z називаються густиною потоку дифундуючої речовини (організмів), а величина D – коефіцієнтом молекулярної дифузії (або коефіцієнтом дифузії).

Якщо речовина (мікроорганізми) розповсюджується в рухомому середовищі, швидкість якого $V(V_x, V_y, V_z)$, то виконується так званий узагальнюючий закон Фіка:

$$\begin{aligned} m_x &= cV_x - D \frac{\partial c}{\partial x}, \quad m_y = cV_y - D \frac{\partial c}{\partial y}, \\ m_z &= cV_z - D \frac{\partial c}{\partial z}, \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

де V_x, V_y, V_z – складові вектора швидкості руху середовища (повітря, води).

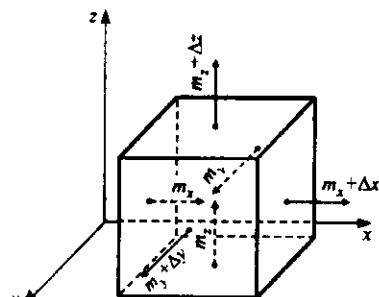


Рис. 6.1

Тепер складемо баланс дифундуючої речовини, що надходить в елементарний куб (або паралелепіпед) і виходить з цього куба (рис. 6.1) Кількість речовини, що надходить у куб через ліву грань за час Δt , дорівнює:

$$m_x \Delta y \Delta z \Delta t. \quad (6.2.3)$$

Кількість речовини, що виходить з елементарного куба через праву грань за час Δt , дорівнює:

$$m_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t \quad (6.2.4)$$

Таким чином, при розповсюдженні речовини в напрямку осі абсцис в елементарному кубі накопичується така кількість речовини:

$$m_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t - m_x \Delta y \Delta z \Delta t = (m_{x+\Delta x} - m_x) \Delta y \Delta z \Delta t \quad (6.2.5)$$

Скориставшись формулою Лагранжа [167]

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c) \Delta x, \quad \text{де } x \leq c \leq x + \Delta x, \quad (6.2.6)$$

вираз (6.2.5) перепишемо у такому вигляді (знак мінус перед похідною означає, що накопичення речовини в кубі відбувається за спадної функції m_x)

$$-\frac{dm_x}{dx} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \quad (6.2.7)$$

Аналогічні вирази одержимо при підрахунку кількості речовини, що накопичується в елементарному кубі при її розповсюдженні в напрямках осі Oy та осі Oz , а саме:

$$-\frac{dm_y}{dy} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t, \quad -\frac{dm_z}{dz} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \quad (6.2.8)$$

Склавши всі вирази (6.2.7) і (6.2.8), знайдемо масу речовини, що накопичується в елементарному кубі об'ємом $\Delta W = \Delta x \Delta y \Delta z$ за час Δt , тобто одержимо рівняння балансу (збереження маси) дифундуючої речовини.

$$\Delta M = -\frac{\partial m_x}{\partial x} \Delta W \Delta t - \frac{\partial m_y}{\partial y} \Delta W \Delta t - \frac{\partial m_z}{\partial z} \Delta W \Delta t. \quad (6.2.9)$$

Розділивши ліву і праву частини рівняння на ΔW і переходячи до границі при $\Delta t \rightarrow 0$ ($\Delta M \rightarrow 0$), одержимо:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_z}{\partial z}. \quad (6.2.10)$$

В лівій частині рівняння (6.2.10) враховано, що $\Delta c = \frac{\Delta M}{\Delta W}$.

З рівнянь (6.2.1) та (6.2.10) одержимо рівняння, що описує розповсюдження речовини в нерухомому середовищі

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right), \quad (6.2.11)$$

а з рівнянь (6.2.2) та (6.2.10) одержимо рівняння, що описує розповсюдження речовини в рухомому середовищі:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x}(V_x c) - \frac{\partial}{\partial y}(V_y c) - \frac{\partial}{\partial z}(V_z c). \quad (6.2.12)$$

Якщо в процесі розповсюдження речовини настала рівновага $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$, то з рівнянь (6.2.11) та (6.2.12) одержимо рівняння стаціонарного розподілу у просторі дифундуючої речовини відповідно в нерухомому та рухомому середовищах:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = 0, \quad (6.2.13)$$

$$D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x}(V_x c) - \frac{\partial}{\partial y}(V_y c) - \frac{\partial}{\partial z}(V_z c) = 0. \quad (6.2.14)$$

Рівняння (6.2.13) називається **рівнянням Лапласа** і описує багато різних фізичних стаціонарних процесів (дифузію, теплопровідність і г. ін.).

Якщо в області розповсюдження речовини G існують джерела цієї речовини або відбувається її розклад (хімічні або біологічні перетворення), що, як було сказано в попередньому розділі, описуються функцією $F(c, x, y, z, t)$, то рівняння (6.2.11) і (6.2.12) набудуть відповідно такого вигляду:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = F(c, x, y, z, t) + D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right), \quad (6.2.15)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = F(c, x, y, z, t) + D \Delta c - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - V_y \frac{\partial c}{\partial y} - V_z \frac{\partial c}{\partial z}. \quad (6.2.16)$$

Перейдемо в рівнянні стаціонарної конвективної дифузії у випадку відсутніх джерел і хімічних (біологічних) перетворень (6.2.14) до безрозмірних величин. Для цього розділимо його на V ($V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$) і помножимо на L^2 (L – характерний розмір області розповсюдження речовини G). Після чого одержимо

$$\frac{L^2}{V} \left[D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - V_y \frac{\partial c}{\partial y} - V_z \frac{\partial c}{\partial z} \right] = 0$$

або

$$\frac{D}{V} \left[\frac{\partial^2 c}{\partial \left(\frac{x}{L}\right)^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \left(\frac{y}{L}\right)^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \left(\frac{z}{L}\right)^2} \right] - L \left[\frac{V_x}{V} \frac{\partial c}{\partial \left(\frac{x}{L}\right)} - \frac{V_y}{V} \frac{\partial c}{\partial \left(\frac{y}{L}\right)} - \frac{V_z}{V} \frac{\partial c}{\partial \left(\frac{z}{L}\right)} \right] = 0.$$

Якщо позначити безрозмірну швидкість і безрозмірні (приведені) координати таким чином:

$$V_x^* = \frac{V_x}{V}, \quad V_y^* = \frac{V_y}{V}, \quad V_z^* = \frac{V_z}{V}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad z^* = \frac{z}{L}, \quad (6.2.17)$$

то останнє рівняння переписеться в такому вигляді:

$$\frac{D}{V} \left[\frac{\partial^2 c}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial (y^*)^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial (z^*)^2} \right] - L \left(V_x^* \frac{\partial c}{\partial x^*} - V_y^* \frac{\partial c}{\partial y^*} - V_z^* \frac{\partial c}{\partial z^*} \right) = 0. \quad (6.2.18)$$

Рівняння (6.2.18) можна переписати в такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial (y^*)^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial (z^*)^2} - \frac{LV}{D} \left(V_x^* \frac{\partial c}{\partial x^*} - V_y^* \frac{\partial c}{\partial y^*} - V_z^* \frac{\partial c}{\partial z^*} \right) = 0. \quad (6.2.19)$$

Величина $\frac{LV}{D}$ називається числом Пекле і позначається так:

$$Pe = \frac{LV}{D}. \quad (6.2.20)$$

З рівняння (6.2.19) видно: якщо $Pe \ll 1$, то переважає молекулярний перенос, що утворюється внаслідок неоднорідності концентрації речовини в просторі й описується рівнянням Лапласа:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^{*2}} = 0, \quad (6.2.21)$$

а якщо $Pe \gg 1$, то переважає конвективний перенос, що утворюється за рахунок руху середовища зі швидкістю V і описується рівнянням у частинних похідних першого порядку:

$$V_x^* \frac{\partial c}{\partial x^*} - V_y^* \frac{\partial c}{\partial y^*} - V_z^* \frac{\partial c}{\partial z^*} = 0, \quad (6.2.22)$$

де складові (компоненти) швидкості руху середовища V_x^*, V_y^*, V_z^* визначаються за допомогою натурних спостережень або спеціально розробленої для цього гідродинамічної моделі [51, 95, 101, 151, 163].

6.3. Одновимірні моделі розповсюдження речовини в нерухомому середовищі

У випадку одномірного процесу переносу (розповсюдження) забруднень у нерухомому повітряному або водному середовищі математичну модель одержуємо з рівняння (6.2.15) у такому вигляді:

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + f(x, c, t) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (6.3.1)$$

де D – коефіцієнт молекулярної дифузії ($\text{м}^2/\text{сек}$); $c(x, t)$ – концентрація речовини, що забруднює повітряне (водне) середовище, або густина організмів, що розповсюджуються в навколишньому середовищі ($\text{кг}/\text{м}^3$, $\text{г}/\text{дм}^3$, $\text{ос}/\text{м}^2$ і т. ін.); $f(x, c, t)$ – функція, що описує інтенсивність (швидкість) джерела забруднень, витікання речовини з даної екосистеми або швидкість фізичного, хімічного і біологічного перетворення речовини (наприклад, процеси седиментації, хімічного і біологічного самоочищення водойм); x, t – просторова і часова координати.

Розглянемо спочатку найбільш прості моделі, що описуються окремими випадками рівняння (6.3.1).

6.3.1. Стаціонарна модель молекулярної дифузії без джерел і перетворень

Якщо забруднення (або мікроорганізми) розповсюджуються в нерухомому середовищі (відсутність вітру або течії у водоймищі), то стаціонарна модель цього процесу за відсутності в системі джерел і самоочищення описується таким рівнянням:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0. \quad (6.3.2)$$

Даний процес розглядатимемо на кінцевому проміжку розповсюдження забруднень від точки $x = x_1$ до точки $x = x_2$ (рис. 6.2). Для наочності

розглянемо розповсюдження стічних вод, що потрапляють в озеро видовженої форми, тобто довжина озера значно більша за його ширину. Процес розповсюдження забруднень визначається не тільки рівнянням, що

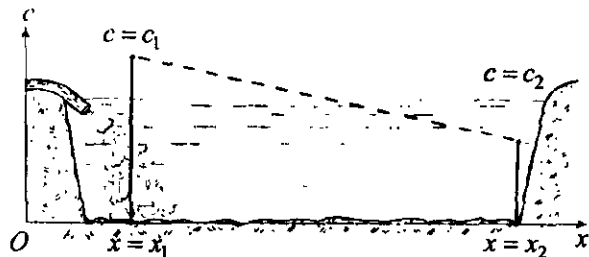


Рис. 6.2

його описус, а й додатковими умовами, що виконуються на границях проміжку. У даному разі ці умови повинні виконуватись в точках $x = x_1$ і $x = x_2$.

Після інтегрування рівняння (6.3.2) два рази знайдемо його загальний розв'язок:

$$c(x) = A(x) + B, \quad (6.3.3)$$

де A і B – поки що невідомі параметри.

Для визначення параметрів A і B скористасмося додатковими умовами, які можуть бути у трьох різних варіантах додаткових умов.

1. Відомі значення концентрацій забруднення на границях ділянки (озера), де розповсюджується забруднення, а саме:

$$c(x_1) = c_1, \quad c(x_2) = c_2, \quad (6.3.4)$$

де c_1 – концентрація забруднених стоків, що скидаються в озеро в точці $x = x_1$, c_2 – концентрація забруднених стоків у точці $x = x_2$ на відстані ℓ від точки $x = x_1$.

Використовуючи (6.3.3) і додаткові умови (6.3.4), одержимо:

$$\begin{cases} c(x_1) = Ax_1 + B = c_1, \\ c(x_2) = Ax_2 + B = c_2. \end{cases} \quad (6.3.5)$$

Розв'язавши систему лінійних рівнянь (6.3.5), знайдемо невідомі параметри:

$$A = \frac{c_2 - c_1}{x_2 - x_1}, \quad B = \frac{c_1 x_2 - c_2 x_1}{x_2 - x_1}. \quad (6.3.6)$$

Отже, підставивши в праву частину рівності (6.3.3) знайдені значення A і B , одержимо шуканий розв'язок (математичну модель) у такому вигляді:

$$c(x) = \frac{c_2 - c_1}{x_2 - x_1} x + \frac{c_1 x_2 - c_2 x_1}{x_2 - x_1}. \quad (6.3.7)$$

Для спрощення одержаної формули (6.3.7) доцільно покласти $x_1 = 0$ і $x_2 = \ell$. Тоді одержимо:

$$c(x) = \frac{c_2 - c_1}{\ell} x + c_1. \quad (6.3.8)$$

Якщо концентрацію забруднень у стічних водах позначимо через c_1 , а концентрацію забруднень у воді в кінці озера – через c_2 , то формула (6.3.8) матиме такий вигляд:

$$c(x) = \frac{c_2 - c_1}{\ell} x + c_1. \quad (6.3.9)$$

Формула (6.3.9) є шуканою математичною моделлю стаціонарного процесу розповсюдження забруднень у кінцевій, так званій функціональній формі (у даному випадку у вигляді лінійної функції).

2. На межі $x = 0$, тобто в точці скидання стічних вод, відомі концентрація і градієнт забруднень, тобто:

$$c(0) = c_3, \quad \left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=0} = -k. \quad (6.3.10)$$

Скориставшись загальним розв'язком (6.3.3) і додатковими умовами (6.3.10), шукану математичну модель запишемо в такому вигляді:

$$c(x) = -kx + c_3. \quad (6.3.11)$$

3. Якщо градієнт забруднень заданий у кінцевій точці $x = \ell$, то математична модель матиме вигляд (6.3.10), тобто цей випадок збігається з попереднім. Це цілком зрозуміло, оскільки у випадку лінійного розв'язку градієнт концентрації забруднень вздовж усієї ділянки їх розповсюдження не змінюється ($k = \text{const}$).

Використовуючи розв'язок (6.3.11), можна знайти таку точку x_0 на ділянці розповсюдження забруднень, в якій вода буде чистою ($c = 0$), а саме:

$$c(x_0) = -kx_0 + c_3 = 0, \quad x_0 = \frac{c_3}{k}. \quad (6.3.12)$$

Отже, якщо в процесі розповсюдження забруднень діє тільки механізм молекулярної дифузії, то таке розповсюдження забруднень відбувається за лінійним законом, який виражається у вигляді рівності (6.3.9) або (6.3.11).

6.3.2. Нестационарна молекулярна дифузія консервативних речовин

Розглянемо нестационарний (неусталений) процес розповсюдження забруднень (або мікроорганізмів) у нерухомому середовищі за відсутності джерел і хімічних або біологічних перетворень (консервативні речовини). Такий процес описується нестационарним рівнянням молекулярної дифузії:

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (6.3.13)$$

де D – коефіцієнт молекулярної дифузії, який визначається природними якостями дифундуючої речовини і середовищем, в якому розповсюджується забруднення.

Розв'язок рівняння в частинних похідних (6.3.13) визначається однозначно за умови, що він задовольняє додаткові умови, які одержуються на основі спостережень за реальним процесом. Такі умови, як правило, задаються на кінцях ділянки (області), в якій відбувається даний процес.

Додаткові (крайові) умови візьмемо такі: задані значення концентрації забруднення на початку процесу в точці $x = 0$ і на віддалі ℓ від початку в точці $x = \ell$, а саме:

$$c(0, t) = c_3, \quad c(\ell, t) = c_в. \quad (6.3.14)$$

Крім згаданих додаткових (граничних) умов, потрібно знати ще початковий стан у водоймищі, тобто в момент часу $t = t_0 = 0$. Якщо в початковий момент часу $t = 0$ концентрація забруднень у водоймищі відома, то повинна виконуватись одна з таких додаткових (початкових) умов:

$$c(x, 0) = c_0(x), \quad c(x, 0) = c_0 = \text{const}, \quad (6.3.15)$$

де c_0 – концентрація забруднень в початковий момент часу $t = 0$.

Диференціальне рівняння (6.3.13) та додаткові (граничні й початкові) умови (6.3.14) і (6.3.15) називаються крайовою задачею. Отже, щоб побудувати математичну модель у вигляді функціональної залежності $c = c(x, t)$, необхідно розв'язати крайову задачу (6.3.13)–(6.3.15), тобто знайти такий розв'язок рівняння (6.3.13), який би задовольняв граничні (6.3.14) та початкові умови (6.3.15).

Розв'язок крайової задачі (6.3.13)–(6.3.15) шукатимемо у вигляді суми:

$$c(x, t) = u(x) + w(x, t), \quad (6.3.16)$$

де функція $u(x)$ – це розв'язок стаціонарної крайової задачі типу (6.3.2), (6.3.4), а саме:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad u(0) = c_3, \quad u(\ell) = c_в, \quad (6.3.17)$$

що має такий вигляд:

$$u(x) = \frac{c_в - c_3}{\ell} x + c_3. \quad (6.3.18)$$

Невідома функція $w(x, t)$ є розв'язком крайової задачі з нульовими (однорідними) граничними умовами, а саме:

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (6.3.19)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(\ell, t) = 0, \quad (6.3.20)$$

$$w(x) = c(x, 0) - u(x) = c - u(x). \quad (6.3.21)$$

Розв'язки рівняння (6.3.19) шукаємо за допомогою методу відокремлення змінних (метод Фур'є) в такому вигляді [23, 50, 54, 153]:

$$w_n(x, t) = X_n(x) T_n(t). \quad (6.3.22)$$

Використовуючи однорідні умови (6.3.20) та співвідношення (6.3.22), для функцій X і T матимемо такі нульові крайові умови:

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(0) = 0, \quad (6.3.23)$$

$$X(\ell)T(t) = 0, \quad X(\ell) = 0. \quad (6.3.24)$$

Підставляючи (6.3.22) в рівняння (6.3.19), одержимо рівність

$$DX^*T = XT',$$

з якої після ділення на добуток XT маємо:

$$D \frac{X^*}{T} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2, \quad (6.3.25)$$

де $\lambda^2 = \text{const}$ - довільна стала, яку необхідно визначити.

На основі (6.3.25), (6.3.23) і (6.3.24) можна записати таку крайову задачу для звичайного диференціального рівняння:

$$D \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = X(\ell) = 0. \quad (6.3.26)$$

Тепер потрібно знайти такі значення параметра λ , за яких існують ненульові (нетривіальні) розв'язки крайової задачі (6.3.26), і самі нетривіальні розв'язки. Ці значення параметра λ називаються *власними значеннями*, або *власними числами*, а відповідні розв'язки - *власними функціями*. Крайова задача (6.3.26) називається задачею на власні значення, або задачею Штурма-Ліувіля [153].

Характеристичне рівняння і його розв'язки мають такий вигляд [12, 141, 157]:

$$r^2 + \frac{\lambda^2}{D} = 0, \quad r_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{D}} i, \quad r_2 = -\frac{\lambda}{\sqrt{D}} i, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (6.3.27)$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння запишемо таким чином:

$$X(x) = A \cos \frac{\lambda}{\sqrt{D}} x + B \sin \frac{\lambda}{\sqrt{D}} x. \quad (6.3.28)$$

Використовуючи рівняння (6.3.28) і граничні умови, одержимо:

$$X(0) = A = 0, \quad X(\ell) = B \sin \frac{\lambda}{\sqrt{D}} \ell = 0. \quad (6.3.29)$$

З останнього рівняння знаходимо власні значення:

$$\frac{\lambda \ell}{\sqrt{D}} = n\pi, \quad \lambda = \lambda_n = \frac{n\pi\sqrt{D}}{\ell}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.3.30)$$

Враховуючи вирази (6.3.28), (6.3.29) і (6.3.30), для кожного власного значення λ_n запишемо власні функції – шукані розв'язки крайової задачі (6.3.26):

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{\lambda_n}{\sqrt{D}} x = B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (6.3.31)$$

Із співвідношень (6.3.25) для кожного власного значення λ_n одержимо ще одне рівняння:

$$\frac{dT_n}{T_n} = -\lambda_n^2 dt, \quad (6.3.32)$$

частинні розв'язки якого мають такий вигляд:

$$T_n(t) = a_n e^{-\lambda_n^2 t} = a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 D t}. \quad (6.3.33)$$

Отже, враховуючи співвідношення (6.3.22), (6.3.31) і (6.3.33) частинні розв'язки рівняння (6.3.19), що задовольняють нульовим граничним умовам (6.3.20), запишуться в такому вигляді:

$$w_n(x, t) = X_n T_n = a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 D t} \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (6.3.34)$$

а загальний розв'язок згідно з принципом суперпозиції для лінійних рівнянь має такий вигляд:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 D t} \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (6.3.35)$$

де a_n – поки що невідомі сталі.

Визначимо сталі коефіцієнти a_n , скориставшись початковими умовами (6.3.21):

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = c_0(x) - c_3 + \frac{c_3 - c_0}{\ell} x. \quad (6.3.36)$$

Помноживши ліву і праву частини рівняння (6.3.36) на $\sin \frac{m\pi x}{\ell}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) з наступним інтегруванням одержаної рівності, матимемо:

$$\int_0^{\ell} \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx = \int_0^{\ell} [c_0(x) - u(x)] \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx.$$

Використовуючи ортогональність власних функцій $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$ і $\sin \frac{m\pi x}{\ell}$, маємо [23, 50, 54, 153]:

$$\int_0^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[\cos \frac{(n-m)\pi}{\ell} x - \cos \frac{(n+m)\pi}{\ell} x \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\ell}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi}{\ell} x - \frac{\ell}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi}{\ell} x \right]_0^{\ell} = 0, \quad (n \neq m);$$

$$a_n \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell} dx = \int_0^{\ell} \left[c_0 - c_3 + \frac{c_3 - c_B}{\ell} x \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx.$$

З останньої рівності знаходимо:

$$a_n = \frac{\int_0^{\ell} \left[c_0 - c_3 + \frac{c_3 - c_B}{\ell} x \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx}{\int_0^{\ell} \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell} dx}. \quad (6.3.37)$$

Обчислимо інтеграли в правій частині (6.3.37), а саме:

$$1) \int_0^{\ell} (c_0 - c_3) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \frac{(c_0 - c_3)\ell}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi}{\ell} x \right]_0^{\ell} =$$

$$= \frac{(c_0 - c_3)\ell}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \frac{(c_0 - c_3)\ell}{n\pi} [1 - (-1)^n].$$

$$2) \int_0^{\ell} \frac{c_3 - c_B}{\ell} x \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \left[-\frac{c_3 - c_B}{\ell} x \frac{\ell}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell} +$$

$$+ \int_0^{\ell} \frac{\ell}{n\pi} \frac{c_3 - c_B}{\ell} \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx = \frac{(c_3 - c_B)\ell}{n\pi} \cos n\pi + \frac{c_3 - c_B}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \Big|_0^{\ell} =$$

$$= -\frac{(c_3 - c_B)\ell}{n\pi} (-1)^n.$$

$$3) \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{n\pi}{\ell} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(1 - \cos^2 \frac{n\pi x}{\ell} \right) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\ell}{2n\pi} \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell} = \frac{\ell}{2}.$$

Враховуючи 1), 2), 3), вираз (6.3.37) перепишемо в такому вигляді:

$$a_n = 2 \frac{(c_0 - c_3)\ell [1 - (-1)^n] - (-1)^n \ell (c_3 - c_B)}{n\ell\pi}$$

або

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left[c_0 - c_1 - c_0(-1)^n + c_1(-1)^n - c_2(-1)^n - c_b(-1)^n \right]$$

Остаточню масмо

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left[c_0 - c_2 - (c_b - c_0)(-1)^n \right] \quad (6.3.38)$$

Отже, шуканий розв'язок (6.3.16) запишеться у вигляді

$$c(x, t) = c_2 - \frac{c_1 - c_b}{\ell} x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_0 - c_2 - (c_b - c_0)(-1)^n}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{\ell} e^{-\frac{\pi^2 \pi^2 D}{\ell^2} t} \quad (6.3.39)$$

Зауваження При $c_0 = c_b$ розв'язок спрощується і має такий вигляд

$$c(x, t) = c_2 - \frac{c_1 - c_b}{\ell} x + 2(c_b - c_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{\ell} e^{-\frac{\pi^2 \pi^2 D}{\ell^2} t}, \quad c_b = c_0 \quad (6.3.40)$$

При $t \rightarrow \infty$ з (6.3.39) або (6.3.40) одержимо стаціонарний розв'язок (6.3.9), що не залежить від часу t

6.3.3. Стаціонарна модель молекулярної дифузії з процесами перетворення речовини

Усталений процес розповсюдження неконсервативних речовин, або консервативних речовин при наявності джерел їх поповнення, в екосистемі з нерухомим середовищем описується стаціонарним рівнянням молекулярної дифузії, яке у разі лінійної кінетики перетворення речовини записується в такому вигляді

$$D \frac{d^2 c}{dx^2} - \gamma c = 0 \quad (6.3.41)$$

Як і раніше, спочатку знайдемо розв'язок за умови, що відомі значення концентрації забруднень на краях середовища, тобто виконуються крайові умови

$$c(0) = c_1, \quad c(\ell) = c_b \quad (6.3.42)$$

Розв'язавши характеристичне рівняння у цьому випадку

$$Dr^2 - \gamma = 0, \quad (6.3.43)$$

маємо

$$r_1 = -\sqrt{\frac{\gamma}{D}}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{D}} \quad (6.3.44)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (6.3.41) має вигляд

$$c(x) = Ae^{-x\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + Be^{x\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \quad (6.3.45)$$

Використовуючи граничні умови (6.3.42), маємо.

$$\begin{cases} A + B = c_1, \\ Ae^{\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + Be^{-\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} = c_0 \end{cases} \quad (6.3.46)$$

Розв'язавши систему рівнянь (6.3.46), знайдемо невідомі сталі A і B , а саме

$$A = \frac{c_1 e^{\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - c_0}{e^{\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{D}}}}, \quad B = \frac{c_0 - c_1 e^{\sqrt{\frac{\gamma}{D}}}}{e^{\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{D}}}} \quad (6.3.47)$$

Підставивши сталі (6.3.47) в праву частину рівності (6.3.45), шукаючи математичну модель запишемо в такому функціональному вигляді

$$c(x) = \frac{c_1 e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - c_0}{e^{\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{D}}}} e^{x\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + \frac{c_0 - c_1 e^{\sqrt{\frac{\gamma}{D}}}}{e^{\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{D}}}} e^{-x\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \quad (6.3.48)$$

або у вигляді

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{c_0}{e^{\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{D}}}} \left(e^{x\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-x\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \right) + \\ &+ \frac{c_1}{e^{\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{D}}}} \left(e^{(t-x)\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-(t-x)\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \right) \end{aligned} \quad (6.3.49)$$

Якщо знайти границю виразу (6.3.49) при $\gamma \rightarrow 0$, то, використовуючи правило Лопітала [167]

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

одержимо

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} c(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} c_0 \frac{\frac{x}{2\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} e^{x\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + \frac{x}{2\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} e^{-x\sqrt{\frac{\gamma}{D}}}}{\frac{\ell}{2\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} e^{\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{D}}}} +$$

$$+ \lim_{\gamma \rightarrow 0} c_3 \frac{\frac{\ell-x}{2\sqrt{\gamma/D}} e^{(\ell-x)\sqrt{\gamma/D}} + \frac{\ell-x}{2\sqrt{\gamma/D}} e^{-(\ell-x)\sqrt{\gamma/D}}}{\frac{\ell}{2\sqrt{\gamma/D}} e^{\ell\sqrt{\gamma/D}} + \frac{\ell}{2\sqrt{\gamma/D}} e^{-\ell\sqrt{\gamma/D}}} = c_0 \frac{x}{\ell} + c_3 \frac{\ell-x}{\ell} = \frac{c_0 - c_3}{\ell} x + c_3,$$

або

$$c(x) = \frac{c_0 - c_3}{\ell} x + c_3.$$

Остання рівність збігається з одержаним раніше розв'язком (6.3.9), що моделює процес молекулярної дифузії без джерел і перетворень (самоочищення). Таке одержання частинного розв'язку із більш загального випадку є підтвердженням правильності побудованих моделей.

Використовуючи означення гіперболічного синуса, а саме:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (6.3.50)$$

розв'язок (6.3.42) можна записати у досить компактному вигляді:

$$c(x) = \frac{c_0}{\operatorname{sh} \ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \operatorname{sh} x \sqrt{\frac{\gamma}{D}} + \frac{c_3}{\operatorname{sh} \ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \operatorname{sh}(\ell-x) \sqrt{\frac{\gamma}{D}}. \quad (6.3.51)$$

Тепер знайдемо розв'язок за умови, що відома концентрація на початку ділянки розповсюдження забруднень, а в кінці ділянки градієнт концентрації дорівнює величині $-k$, тобто за таких граничних умов:

$$c(0) = c_3; \quad \left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=\ell} = -k. \quad (6.3.52)$$

Загальний розв'язок рівняння (6.3.41) має вигляд (6.3.45). Використовуючи крайові умови (6.3.52), знайдемо сталі A і B у цьому випадку:

$$\begin{cases} A + B = c_0, \\ -A \sqrt{\frac{\gamma}{D}} e^{-\ell\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + B \sqrt{\frac{\gamma}{D}} e^{\ell\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} = -k. \end{cases} \quad (6.3.53)$$

$$A = \frac{k + c_3 \sqrt{\frac{\gamma}{D}} e^{\ell\sqrt{\frac{\gamma}{D}}}}{\sqrt{\frac{\gamma}{D}} \left(e^{\ell\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + e^{-\ell\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \right)}, \quad B = \frac{-k + \sqrt{\frac{\gamma}{D}} c_3 e^{\ell\sqrt{\frac{\gamma}{D}}}}{\sqrt{\frac{\gamma}{D}} \left(e^{\ell\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + e^{-\ell\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \right)}. \quad (6.3.54)$$

Отже, шуканий розв'язок запишеться у вигляді:

$$c(x) = \frac{k + c_3 \sqrt{\frac{\gamma}{D}} e^{\ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}}}{\sqrt{\frac{\gamma}{D}} \left(e^{\ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-\ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \right)} e^{-x \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + \frac{-k + c_3 \sqrt{\frac{\gamma}{D}} e^{-\ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}}}{\sqrt{\frac{\gamma}{D}} \left(e^{\ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-\ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \right)} e^{x \sqrt{\frac{\gamma}{D}}}. \quad (6.3.55)$$

Побудовану функціональну модель (6.3.55) можна записати і в такому вигляді:

$$c(x) = \frac{c_3}{e^{\ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + e^{-\ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}}} \left(e^{(\ell-x) \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-(\ell-x) \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \right) + \frac{k}{\sqrt{\frac{\gamma}{D}} \left(e^{\ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-\ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \right)} \left(e^{x \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} - e^{-x \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \right). \quad (6.3.56)$$

Використовуючи означення гіперболічного синуса (6.3.50) і гіперболічного косинуса,

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (6.3.57)$$

рівність (6.3.56) можна записати у вигляді:

$$c(x) = \frac{c_3}{\operatorname{ch} \ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \operatorname{ch}(\ell - x) \sqrt{\frac{\gamma}{D}} - \frac{k}{\operatorname{ch} \ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \operatorname{ch} x \sqrt{\frac{\gamma}{D}}. \quad (6.3.58)$$

У кінці ділянки шлях розповсюдження речовини закінчується, інакше кажучи, у цій точці градієнт концентрації забруднень дорівнює нулю ($k = 0$). Отже, у даному випадку процес розповсюдження забруднень описується такою функцією:

$$c(x) = \frac{c_3}{\operatorname{ch} \ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \operatorname{ch}(\ell - x) \sqrt{\frac{\gamma}{D}}. \quad (6.3.59)$$

Як бачимо, на відміну від розглянутого раніше лінійного закону розповсюдження консервативних речовин, процес розповсюдження неконсервативних речовин відбувається за нелінійним законом.

6.3.4. Нестационарна молекулярна дифузія неконсервативних речовин

Розглянемо нестационарний процес молекулярної дифузії неконсервативних речовин, коли кінетика перетворення (розклад) речовини описується лінійною функцією. У цьому випадку математична модель розповсюдження речовини (або мікроорганізмів) являє собою таку крайову задачу:

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \gamma c = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (\gamma > 0); \quad (6.3.60)$$

$$c(0, t) = c_s, \quad c(\ell, t) = c_b; \quad (6.3.61)$$

$$c(x, 0) = c_0, \quad (6.3.62)$$

де c_s – концентрація забруднень, що розповсюджуються у водному або повітряному середовищі, c_b – концентрація забруднень на віддалі ℓ від джерела забруднень, c_0 – концентрація забруднень у початковий момент часу $t = 0$.

Вважатимемо, що граничні умови (6.3.61) й початкова умова (6.3.62) є постійними величинами. У випадку, коли ці величини є функціями, задачу потрібно розглядати окремо, хоча метод розв'язування принципово нічим не відрізняється.

Розв'язок крайової задачі (6.3.60)–(6.3.62) шукатимемо у вигляді суми:

$$c(x, t) = u(x) + w(x, t), \quad (6.3.63)$$

де $u(x)$ – розв'язок відповідної стаціонарної крайової задачі (6.3.41), (6.3.42) або (6.3.41), (6.3.52), а функція $w(x, t)$ – розв'язок крайової задачі з однорідними граничними умовами, а саме:

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma w = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\gamma > 0); \quad (6.3.64)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(\ell, t) = 0; \quad (6.3.65)$$

$$w(x, 0) = c(x, 0) - u(x) = c_0 - u(x). \quad (6.3.66)$$

Розв'язок крайової задачі (6.3.64)–(6.3.66), як і раніше, будемо знаходити у такому вигляді:

$$w(x, t) = X(x)T(t). \quad (6.3.67)$$

Підставляючи шукану функцію (6.3.67) у рівняння (6.3.64) та граничні умови (6.3.65), одержимо:

$$DX^2T - \gamma XT = XT', \quad (6.3.68)$$

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(\ell)T(t) = 0. \quad (6.3.69)$$

Після ділення (6.3.68) на добуток XT одержимо:

$$D \frac{X''}{X} - \gamma = \frac{T'}{T} = -\lambda^2. \quad (6.3.70)$$

Із співвідношень (6.3.70) та (6.3.69) одержуємо задачу Штурма-Ліувіля:

$$D \frac{d^2 X}{dx^2} + (-\gamma + \lambda^2) X = 0, \quad X(0) = X(\ell) = 0, \quad (6.3.71)$$

розв'язки якої мають вигляд:

$$X(x) = A \cos \sqrt{\frac{-\gamma + \lambda^2}{D}} x + B \sin \sqrt{\frac{-\gamma + \lambda^2}{D}} x. \quad (6.3.72)$$

Використовуючи однорідні (нульові) граничні умови, маємо:

$$A = 0, \quad B \sin \sqrt{\frac{-\gamma + \lambda^2}{D}} \ell = 0. \quad (6.3.73)$$

З останнього рівняння знаходимо:

$$\sqrt{\frac{-\gamma + \lambda^2}{D}} \ell = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.3.74)$$

Отже, знайдемо всі власні значення:

$$\lambda = \lambda_n = \sqrt{\frac{Dn^2\pi^2}{\ell^2} + \gamma}. \quad (6.3.75)$$

Враховуючи (6.3.73) і (6.3.74), розв'язки крайової задачі (6.3.71) запишуться в такому вигляді:

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (6.3.76)$$

Із співвідношень (6.3.70) маємо також рівняння

$$\frac{dT_n}{dt} = -\lambda_n^2 T_n, \quad \lambda_n^2 = \frac{Dn^2\pi^2}{\ell^2} + \gamma, \quad (6.3.77)$$

розв'язок якого запишеться у вигляді:

$$T_n(t) = a_n e^{-\lambda_n^2 t}. \quad (6.3.78)$$

Тепер частинні розв'язки рівняння (6.3.64) можна записати у вигляді:

$$w_n(x, t) = X_n T_n = b_n e^{-\lambda_n^2 D t} \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (6.3.79)$$

а загальний розв'язок цього рівняння має такий вигляд:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (6.3.80)$$

де b_n поки невідомі коефіцієнти.

Знайдемо ці коефіцієнти, скориставшись початковою умовою (6.3.66):

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = c_0 - u(x). \quad (6.3.81)$$

Розв'язок стаціонарної задачі запишемо у вигляді (6.3.59):

$$u(x) = \frac{c_1}{\operatorname{ch} \ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \operatorname{ch}(\ell - x) \sqrt{\frac{\gamma}{D}} \quad (6.3.82)$$

або

$$u(x) = \frac{c_1}{2 \operatorname{ch} \ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \left[e^{(\ell-x)\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + e^{-(\ell-x)\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \right]. \quad (6.3.83)$$

З рівності (6.3.81) видно, що коефіцієнти b_n є коефіцієнтами Фур'є функції

$$c_0 - u(x) = c_0 - \frac{c_1}{2 \operatorname{ch} \ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \left[e^{-(\ell-x)\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + e^{(\ell-x)\sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \right] \quad (6.3.84)$$

при розкладанні її в ряд по синусах на проміжку $(0, \ell)$. Ці коефіцієнти, як було показано в параграфі 6.3.2, визначаються такою рівністю:

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} [c_0(x) - u(x)] \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad (6.3.85)$$

Враховуючи співвідношення [38]

$$\int e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} (a \sin nx - n \cos nx), \quad (6.3.86)$$

рівність (6.3.85) переписеться у такому вигляді:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\ell} \left[-\frac{\ell c_0}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \Big|_0^{\ell} - \frac{c_1 \ell}{2 \operatorname{ch} \ell p} \int_0^{\ell} e^{-px} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx - \int_0^{\ell} \frac{c_1 e^{-p\ell}}{2 \operatorname{ch} \ell p} e^{p\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \right] = \\ &= \frac{2}{\ell} \left[\frac{\ell c_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] - \frac{c_1 e^{p\ell}}{2 \operatorname{ch} \ell p} \left[\frac{e^{-px}}{p^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2} \left(-p \sin \frac{n\pi x}{\ell} - \frac{n\pi}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right) \right]_0^{\ell} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{c_3 e^{pt}}{2 \operatorname{ch} \ell p} \left[\frac{e^{px}}{p^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2} \left(p \sin \frac{n\pi x}{\ell} - \frac{n\pi}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right) \right]_{x=0}^{\ell} = \\
& = \frac{2}{\ell} \left\{ \frac{\ell c_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] - \frac{c_3 e^{pt}}{2 \operatorname{ch} \ell p} \left[\frac{e^{-pt}}{p^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2} \frac{n\pi}{\ell} (-1)^{n+1} + \frac{1}{p^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2} \frac{n\pi}{\ell} \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{c_3 e^{-pt}}{2 \operatorname{ch} \ell p} \left[\frac{e^{pt}}{p^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2} \frac{n\pi}{\ell} (-1)^{n+1} + \frac{1}{p^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2} \frac{n\pi}{\ell} \right] \right\} = \\
& = \frac{2}{\ell} \left\{ \frac{\ell c_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] - \frac{c_3 \ell n\pi (-1)^{n+1}}{2 \operatorname{ch} \ell p (p^2 \ell^2 + n^2 \pi^2)} - \frac{c_3 e^{pt} \ell n\pi}{2 \operatorname{ch} \ell p (p^2 \ell^2 + n^2 \pi^2)} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{c_3 \ell n\pi (-1)^{n+1}}{2 \operatorname{ch} \ell p (p^2 \ell^2 + n^2 \pi^2)} - \frac{c_3 e^{-pt} \ell n\pi}{2 \operatorname{ch} \ell p (p^2 \ell^2 + n^2 \pi^2)} \right\} = \\
& = \frac{2}{\ell} \left\{ \frac{\ell c_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] - \frac{c_3 \ell n\pi (-1)^{n+1}}{\operatorname{ch} \ell p (p^2 \ell^2 + n^2 \pi^2)} - \frac{c_3 \ell n\pi \operatorname{ch} \ell p}{2 \operatorname{ch} \ell p (p^2 \ell^2 + n^2 \pi^2)} \right\} = \\
& = 2 \left\{ \frac{c_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] - \frac{c_3 n\pi [(-1)^{n+1} + \operatorname{ch} \ell p]}{\operatorname{ch} \ell p (p^2 \ell^2 + n^2 \pi^2)} \right\}, \quad p = \sqrt{\frac{\gamma}{D}}.
\end{aligned}$$

Отже, шуканий розв'язок має такий остаточний вигляд:

$$c(x, t) = \frac{c_3}{\operatorname{ch} \ell \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} \operatorname{ch}(\ell - x) \sqrt{\frac{\gamma}{D}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (6.3.87)$$

де коефіцієнти b_n визначаються рівністю:

$$b_n = 2 \left\{ \frac{c_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] - \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\operatorname{ch} \ell p \sqrt{\frac{\gamma}{D}}} + 1 \right] \frac{n\pi c_3}{\frac{\gamma \ell^2}{D} + n^2 \pi^2} \right\}. \quad (6.3.88)$$

Як правило, в кінці ділянки, на яку поширюється забруднення, значення концентрації забруднюючої речовини невідомо. Тому краще в цій точці задавати значення градієнта концентрації k . У цьому випадку приходимо до розв'язування такої крайової задачі

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \gamma c = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (6.3.89)$$

$$c(0, t) = c_3, \quad \left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=l} = -k, \quad (6.3.90)$$

$$c(x, 0) = c_0(x) = c_0 = \text{const}. \quad (6.3.91)$$

Розв'язок, як і раніше, шукаємо у вигляді

$$c(x, t) = u(x) + w(x, t), \quad (6.3.92)$$

де $u(x)$ — розв'язок відповідної стаціонарної задачі (6.3.41), (6.3.52) і записується у вигляді (6.3.55), а функція w — розв'язок крайової задачі з однорідними граничними умовами, а саме

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma w = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (6.3.93)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w_l'(l, t) = 0, \quad (6.3.94)$$

$$w(x, 0) = c(x, 0) - u(x) = c_0 - u(x). \quad (6.3.95)$$

Розв'язок крайової задачі (6.3.93)–(6.3.95) шукаємо методом Фур'є, тобто у вигляді добутку

$$w(x, t) = X(x)T(t). \quad (6.3.96)$$

Підставивши (6.3.96) в рівняння (6.3.93) та в граничні умови (6.3.94), одержимо

$$DX''T - \gamma XT = XT', \quad (6.3.97)$$

$$X(0)T(t) = 0, \quad X'(l)T(t) = 0 \quad (6.3.98)$$

Після ділення (6.3.97) на добуток XT одержимо

$$D \frac{X''}{X} - \gamma = \frac{T'}{T} = -\lambda^2 \quad (6.3.99)$$

Із співвідношень (6.3.99) та (6.3.98) одержуємо задачу Штурма Лувіля.

$$D \frac{d^2 X}{dx^2} + (-\gamma + \lambda^2)X = 0, \quad X(0) = X'(l) = 0, \quad (6.3.100)$$

загальний розв'язок якої записується у вигляді:

$$X(x) = A \cos \sqrt{\frac{\lambda^2 - \gamma}{D}} x + B \sin \sqrt{\frac{\lambda^2 - \gamma}{D}} x. \quad (6.3.101)$$

Використовуючи нульові граничні умови, одержимо:

$$A = 0, \quad \cos \sqrt{\frac{\lambda^2 - \gamma}{D}} \ell = 0 \quad (6.3.102)$$

З останнього рівняння знаходимо:

$$\ell \sqrt{\frac{\lambda^2 - \gamma}{D}} = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.3.103)$$

Отже, власні значення визначаються такою рівністю.

$$\lambda = \lambda_n = \sqrt{\gamma + \frac{D(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2}}. \quad (6.3.104)$$

Враховуючи (6.3.102) і (6.3.103), розв'язки крайової задачі (6.3.100) запишуться у вигляді:

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} x \quad (6.3.105)$$

Із співвідношень (6.3.99) одержуємо також рівняння

$$\frac{dT_n}{dt} = -\lambda_n^2 T_n, \quad (6.3.106)$$

розв'язок якого запишеться так:

$$T_n(t) = a_n e^{-\lambda_n^2 t}. \quad (6.3.107)$$

Тепер частинні розв'язки рівняння (6.3.93), що задовольняють однорідним граничним умовам (6.3.95), мають вигляд

$$w_n(x, t) = X_n T_n = b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} e^{-\lambda_n^2 t}, \quad (6.3.108)$$

де $b_n = B_n a_n$, а λ_n визначається рівністю (6.3.104).

Загальний розв'язок запишеться у вигляді:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} e^{-\lambda_n^2 t}, \quad (6.3.109)$$

де b_n поки що невідомі коефіцієнти

Знайдемо коефіцієнти b_n , скориставшись початковою умовою (6.3.95), а саме:

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} = c_0 - u(x), \quad (6.3.110)$$

де $u(x)$ визначається формулою (6.3.55)

З рівності (6.3.110) видно, що коефіцієнти b_n с коефіцієнтами розкладу функції

$$c_0 - u(x) = c_0 - Ae^{px} - Be^{qx} \quad (6.3.111)$$

в ряд Фур'є, причому сталі A і B визначаються рівностями (6.3.54), а $p = \sqrt{\frac{\gamma}{D}}$. Як відомо, коефіцієнти Фур'є при розкладі функції (6.3.111) по синусах на проміжку $(0, \ell)$ визначаються такою рівністю:

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} [c_0 - u(x)] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} dx. \quad (6.3.112)$$

Враховуючи співвідношення [38]

$$\int e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} (a \sin nx - n \cos nx), \quad (6.3.113)$$

рівність (6.3.112) переписеться таким чином:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} (c_0 - Ae^{-px} - Be^{qx}) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} dx = \frac{2}{\ell} \left\{ \frac{2\ell c_0}{(2n+1)\pi} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right\}_0^{\ell} - \\ &\quad - A \left[\frac{e^{-px}}{p^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2}} \left(-p \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} - \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right) \right]_0^{\ell} - \\ &\quad - B \left[\frac{e^{qx}}{p^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2}} \left(p \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} - \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right) \right]_0^{\ell} \Bigg\} = \\ &= \frac{2}{\ell} \left\{ \frac{2\ell c_0}{(2n+1)\pi} - A \left[\frac{-e^{-p\ell} p (-1)^n}{p^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2}} + \frac{1}{p^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2}} \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \right] - \right. \\ &\quad \left. - B \left[\frac{e^{p\ell} p (-1)^n}{p^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2}} + \frac{1}{p^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2}} \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Враховуючи рівність (6.3.55), шуканий розв'язок запишеться у такому вигляді:

$$c(x) = \frac{k + c_3 p e^{p\ell}}{p(e^{p\ell} + e^{-p\ell})} e^{-px} + \frac{c_3 p e^{-p\ell} - k}{p(e^{p\ell} + e^{-p\ell})} e^{px} + \sum_{n=0}^{\infty} h_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} e^{-\frac{4\gamma\ell^2 + (2n+1)^2 \pi^2 D}{4\ell^2} t},$$

де коефіцієнти h_n визначаються рівністю:

$$h_n = \frac{2}{\ell} \left\{ \frac{2\ell c_0}{(2n+1)\pi} + A \left[\frac{p e^{-p\ell} (-1)^n}{p^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2}} - \frac{(2n+1)\pi}{2\ell \left[p^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2} \right]} \right] - B \left[\frac{p e^{p\ell} (-1)^n}{p^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2}} + \frac{(2n+1)\pi}{2\ell \left[p^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2} \right]} \right] \right\}, \quad p = \sqrt{\frac{\gamma}{D}}. \quad (6.3.115)$$

Сталі A і B визначаються рівностями (6.3.54).

Враховуючи, що $A + B = c_3$, рівність (6.3.115) переписеться у такому вигляді:

$$h_n = \frac{2}{\ell} \left\{ \frac{2\ell c_0}{(2n+1)\pi} + \frac{(-1)^n p (A e^{-p\ell} - B e^{p\ell})}{p^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2}} - \frac{(2n+1)\pi c_3}{2\ell \left[p^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2} \right]} \right\}, \quad (6.3.116)$$

або в такому остаточному вигляді:

$$h_n = \frac{4c_0}{(2n+1)\pi} + \frac{16p\ell (-1)^n (A e^{-p\ell} - B e^{p\ell}) - 4(2n+1)\pi c_3}{4p^2 \ell^2 + (2n+1)^2 \pi^2}. \quad (6.3.117)$$

6.4. Одновимірні моделі розповсюдження речовини в рухомому середовищі

Якщо речовина (субстрат) або угруповання організмів розповсюджується в рухомому (повітряному або водному) середовищі, причому процес можна розглядати як одновимірний, то у цьому випадку з рівняння

(6.2.16) одержимо математичну модель даного процесу або явища в такому вигляді

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V_1 \frac{\partial c}{\partial x} + f(x, c, t) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (6.4.1)$$

де $D = D_1$ – коефіцієнт конвективної або турбулентної дифузії ($\text{м}^2/\text{сек}$), $c(x, t)$ – концентрація речовини або чисельність організмів, що розповсюджуються в рухомому навколишньому середовищі (довкіллі), $V = V_1$ – швидкість вітру в повітряному середовищі або швидкість течії у водному середовищі (річці, озері, каналі, водосховищі і т. ін.), $f(x, c, t)$ – функція, що описує інтенсивність джерел забруднень або швидкість їх фізичного, хімічного та біологічного перетворення, x, t – просторова та часова координати. Розглянемо окремі частинні випадки цього процесу

6.4.1. Стационарна модель конвективної дифузії без джерел і перетворень

При розгляді процесу розповсюдження забруднень або організмів, що інтенсивно розмножуються, насамперед представляє інтерес побудова стаціонарної моделі, що описує даний процес в умовах його рівноваги

Стаціонарний процес розповсюдження забруднень за відсутності джерел і перетворень описується таким звичайним диференціальним рівнянням конвективної дифузії

$$D \frac{d^2 c}{dx^2} - V \frac{dc}{dx} = 0 \quad (6.4.2)$$

Характеристична функція та її розв'язок мають вигляд

$$Dr^2 - Vr = 0, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{V}{D}$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (6.4.2) запишеться у вигляді

$$c(x) = A + Be^{\frac{V}{D}x} \quad (6.4.3)$$

Розглянемо, як і раніше, кілька граничних умов. Якщо на кінцях проміжку, де розглядається процес, задані концентрації забруднень

$$c(0) = c_3, \quad c(\ell) = c_a, \quad (6.4.4)$$

то, визначивши сталі A і B , а саме

$$A = \frac{c_3 e^{p\ell} - c_a}{e^p - 1}, \quad B = -\frac{c_a - c_3}{e^p - 1}, \quad p = \frac{V\ell}{D}, \quad (6.4.5)$$

шуканий розв'язок запишеться в такому вигляді.

$$c(x) = \frac{c_3 e^{\rho x} - c_B}{e^{\rho} - 1} + \frac{c_B - c_3}{e^{\rho} - 1} e^{\frac{\rho x}{\ell}} \quad (6.4.6)$$

Величина $\rho = \frac{V\ell}{D} = \text{Pe}$ називається числом Пекле, про яке йшлося в підрозд. 6.2. При малій швидкості переміщення середовища число Pe досить мале ($\text{Pe} \ll 1$). У цьому випадку в механізмі розповсюдження субстрату переважає молекулярна дифузія.

Розв'язок (6.4.6) можна записати в такому вигляді:

$$c(x) = c_3 \frac{e^{\frac{V\ell}{D}} - e^{\frac{Vx}{D}}}{e^{\frac{V\ell}{D}} - 1} - c_B \frac{1 - e^{\frac{Vx}{D}}}{e^{\frac{V\ell}{D}} - 1} \quad (6.4.7)$$

Якщо в правій частині рівності (6.4.7), користуючись правилом Лопітала [167], знайти границю при $V \rightarrow 0$, то одержимо стаціонарний розв'язок задачі для того випадку, коли перенос речовини відбувається за моделлю молекулярної дифузії, а саме:

$$c(x) = \lim_{V \rightarrow 0} c_3 \frac{e^{\frac{V\ell}{D}} - e^{\frac{Vx}{D}}}{e^{\frac{V\ell}{D}} - 1} - \lim_{V \rightarrow 0} c_B \frac{1 - e^{\frac{Vx}{D}}}{e^{\frac{V\ell}{D}} - 1} = c_3 \frac{\ell - x}{\ell} + c_B \frac{x}{\ell} = c_3 \frac{\ell - x}{\ell} + c_B \frac{x}{\ell}$$

або

$$c(x) = c_3 + \frac{c_B - c_3}{\ell} x,$$

тобто одержали рівність (6.3.9). Це підтверджує правильність побудованих моделей для цих двох стаціонарних процесів переміщення (розповсюдження) речовини.

Якщо розглянути інші граничні умови, а саме:

$$c(0) = c_3, \quad \left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=\ell} = -k, \quad (6.4.8)$$

то із загального розв'язку (6.4.3) одержимо:

$$A + B = c_3, \quad \frac{V}{D} B e^{\frac{V\ell}{D}} = -k,$$

$$A = c_3 + \frac{kD}{V} e^{-\frac{V\ell}{D}}, \quad B = -\frac{kD}{V} e^{-\frac{V\ell}{D}}$$

Отже, розв'язок у цьому випадку має такий вигляд:

$$c(x) = c_3 + \frac{kD}{V} e^{-\frac{V\ell}{D}} - \frac{kD}{V} e^{-\frac{V(\ell-x)}{D}} \quad (6.4.9)$$

або

$$c(x) = c_3 + \frac{kD}{V} e^{-\frac{Vx}{D}} \left(1 - e^{-\frac{Vx}{D}} \right). \quad (6.4.10)$$

Якщо в останній рівності знайти границю при $V \rightarrow 0$, то матимемо раніше одержаний розв'язок (6.3.11) для випадку молекулярної дифузії з граничними умовами (6.4.8) або (6.3.10).

6.4.2. Стационарна модель конвективної дифузії неконсервативних речовин

Якщо речовина при розповсюдженні взаємодіє з навколишнім рухомим середовищем або з іншою речовиною, що знаходиться в навколишньому середовищі, то стаціонарний процес розповсюдження даної речовини при лінійній кінетиці взаємодії можна описати такою математичною моделлю (крайовою задачею):

$$D \frac{d^2 c}{dx^2} - V_x \frac{dc}{dx} - \gamma c = 0, \quad (6.4.11)$$

$$c(0) = c_3, \quad c(\ell) = c_B. \quad (6.4.12)$$

Характеристичне рівняння і його розв'язки мають вигляд:

$$Dr^2 - V_x r - \gamma = 0, \quad (6.4.13)$$

$$r_1 = \frac{V - \sqrt{V^2 + 4\gamma D}}{2D}, \quad r_2 = \frac{V + \sqrt{V^2 + 4\gamma D}}{2D}. \quad (6.4.14)$$

Отже, загальний розв'язок крайової задачі запишеться таким чином:

$$c(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}. \quad (6.4.15)$$

Використовуючи граничні умови (6.4.12), знайдемо сталі A і B :

$$A + B = c_3, \quad A e^{r_1 \ell} + B e^{r_2 \ell} = c_B;$$
$$A = \frac{c_3 e^{r_2 \ell} - c_B}{e^{r_2 \ell} - e^{r_1 \ell}}, \quad B = \frac{c_B - c_3 e^{r_1 \ell}}{e^{r_2 \ell} - e^{r_1 \ell}}.$$

Тепер шуканий розв'язок запишеться у такому вигляді:

$$c(x) = \frac{c_3 e^{r_2 \ell} - c_B}{e^{r_2 \ell} - e^{r_1 \ell}} e^{r_1 x} + \frac{c_B - c_3 e^{r_1 \ell}}{e^{r_2 \ell} - e^{r_1 \ell}} e^{r_2 x}, \quad (6.4.16)$$

де r_1 і r_2 визначаються за формулами (6.4.14).

Якщо у формулах (6.3.14), (6.4.16) покласти $V = 0$, то одержимо математичну модель молекулярної дифузії із самоочищенням, тобто формулу (6.3.47), а якщо у формулах (6.3.14), (6.4.16) покладемо $\gamma = 0$, то одержи-

мо математичну модель конвективної дифузії без самоочищення, тобто формулу (6.4.6)

Якщо в кінці шляху розповсюдження речовини в рухомому середовищі відомий градієнт концентрації, то матимемо такі граничні умови:

$$c(0) = c_3, \quad \left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=l} = -k. \quad (6.4.17)$$

У цьому випадку сталі A і B , що входять у загальний розв'язок (6.4.15), мають такий вигляд:

$$A = \frac{c_3 r_2 e^{r_2 l} - k}{r_2 e^{r_2 l} - r_1 e^{r_1 l}}, \quad B = \frac{-k + c_3 r_1 e^{r_1 l}}{r_2 e^{r_2 l} - r_1 e^{r_1 l}}, \quad (6.4.18)$$

а шуканий розв'язок запишеться так:

$$c(x) = \frac{c_3 r_2 e^{r_2 l} - k}{r_2 e^{r_2 l} - r_1 e^{r_1 l}} e^{r_1 x} + \frac{k - c_3 r_1 e^{r_1 l}}{r_2 e^{r_2 l} - r_1 e^{r_1 l}} e^{r_2 x}. \quad (6.4.19)$$

Якщо у формулах (6.4.14), (6.4.19) покласти $V = 0$, то одержимо формулу (6.3.55), тобто математичну модель розповсюдження речовини в нерухомому середовищі із самоочищенням при граничних умовах (6.3.52), а якщо у формулах (6.4.14), (6.4.19) покласти $\gamma = 0$, то одержимо формулу (6.4.9), що описує розповсюдження речовини в рухомому середовищі без самоочищення і перетворень при граничних умовах (6.4.8).

Отже, знайдені розв'язки (6.4.16) і (6.4.19) є найбільш загальними із розглянутих математичних моделей стаціонарного одновимірного процесу розповсюдження речовини (або угруповання організмів). Метод послідовного ускладнення математичної моделі і, навпаки, одержання більш простих (частинних) моделей із загальних є важливим способом ефективного використання математичних моделей, що враховує складність поставленої задачі та її мету

6.4.3. Нестационарна конвективна дифузія неконсвативних речовин

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли відбувається неусталене розповсюдження речовини або організмів у рухомому середовищі за наявності біохімічних перетворень або джерел і стоків, які можуть моделювати народження і смертність організмів. У цьому випадку математична модель представляється у вигляді такої крайової задачі

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma c = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (6.4.20)$$

$$c(0, t) = c_3, \quad \left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=l} = -k, \quad (6.4.21)$$

$$c(x, 0) = c_0(x) = c_0 = \text{const.} \quad (6.4.22)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді суми

$$c(x, t) = u(x) + w(\lambda, t), \quad (6.4.23)$$

де $u(x)$ – розв'язок відповідної стаціонарної задачі (6.4.11), (6.4.17) і має вигляд (6.4.19), функція $w(x, t)$ – розв'язок крайової задачі з однорідними граничними умовами, а саме:

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - V_x \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma w = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (6.4.24)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w_x(\ell, t) = 0; \quad (6.4.25)$$

$$w(x, 0) = c(x, 0) - u(x) = c_0 - u(x), \quad (6.4.26)$$

де $u(x)$ визначається рівністю (6.4.19).

Розв'язок крайової задачі (6.4.24)–(6.4.26) шукаємо за допомогою методу відокремлення змінних (методу Фур'є), тобто шукаємо його у вигляді добутку:

$$w(x, t) = X(x)T(t). \quad (6.4.27)$$

Підставивши (6.4.27) у рівняння (6.4.24) та граничні умови (6.4.25), одержимо:

$$DX''T - V_x XT' - \gamma XT = XT', \quad (6.4.28)$$

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(\ell)T(t) = 0. \quad (6.4.29)$$

Після відокремлення змінних у рівнянні (6.4.28) маємо:

$$D \frac{X''}{X} - V_x \frac{X'}{X} - \gamma = \frac{T'}{T} = -\lambda^2. \quad (6.4.30)$$

Із співвідношень (6.4.30) з урахуванням однорідних граничних умов (6.4.29) випливає задача Штурма–Лівуїля:

$$D \frac{d^2 X}{dx^2} - V_x \frac{dX}{dx} + (\lambda^2 - \gamma)X = 0, \quad X(0) = X'(\ell) = 0. \quad (6.4.31)$$

Розв'язок характеристичного рівняння

$$Dr^2 - V_x r + (\lambda^2 - \gamma) = 0 \quad (6.4.32)$$

має вигляд

$$r_1 = -\frac{V_x}{2D} - \sqrt{\frac{V_x^2}{4D^2} - \frac{\lambda^2 - \gamma}{D}}, \quad r_2 = -\frac{V_x}{2D} + \sqrt{\frac{V_x^2}{4D^2} - \frac{\lambda^2 - \gamma}{D}}. \quad (6.4.33)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (6.4.31) записується у вигляді:

$$X(x) = e^{-\frac{V_x}{2D}x} \left(A \cos \sqrt{\frac{\lambda^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}}x + B \sin \sqrt{\frac{\lambda^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}}x \right). \quad (6.4.34)$$

Використовуючи граничні умови (6.4.31), одержимо:

$$X(0) = A = 0; \quad (6.4.35)$$

$$\begin{aligned} X'(x) &= e^{\frac{V_x}{2D}x} \frac{V_x}{2D} \left(A \cos \sqrt{\frac{\lambda_n^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}} x + B \sin \sqrt{\frac{\lambda_n^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}} x \right) + \\ &+ e^{\frac{V_x}{2D}x} \left(-A \sqrt{\frac{\lambda_n^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}} \sin \sqrt{\frac{\lambda_n^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}} x + \right. \\ &\left. + B \sqrt{\frac{\lambda_n^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}} \cos \sqrt{\frac{\lambda_n^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}} x \right) = \\ &= e^{\frac{V_x}{2D}x} \left(\frac{V_x}{2D} B \sin \sqrt{\frac{\lambda_n^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}} x + B \sqrt{\frac{\lambda_n^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}} \cos \sqrt{\frac{\lambda_n^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}} x \right); \end{aligned}$$

З останньої рівності одержуємо:

$$\operatorname{tg} \ell \sqrt{\frac{\lambda_n^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}} = -\frac{2D}{V_x} \sqrt{\frac{\lambda_n^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}}. \quad (6.4.36)$$

Позначивши

$$\sqrt{\frac{\lambda_n^2 - \gamma}{D} - \frac{V_x^2}{4D^2}} = \mu_n, \quad (6.4.37)$$

рівняння (6.4.36) перепишеться у такому вигляді

$$\operatorname{tg}(\mu_n \ell) = -\frac{2D}{V_x} \mu_n. \quad (6.4.38)$$

Розв'язавши рівняння (6.4.38), із співвідношення (6.4.37) знайдемо власні значення:

$$\lambda_n^2 = \gamma + \frac{V_x^2}{4D^2} + \mu_n^2. \quad (6.4.39)$$

Враховуючи (6.4.35) і (6.4.37), розв'язки крайової задачі (6.4.31) матимуть такий вигляд:

$$X_n(x) = B_n e^{\frac{V_x x}{2D}} \sin \mu_n x. \quad (6.4.40)$$

Із співвідношень (6.4.30) також рівняння

$$\frac{dT_n}{dt} = -\lambda_n^2 T_n, \quad (6.4.41)$$

розв'язок якого

$$T_n(t) = a_n e^{-\lambda_n^2 t}. \quad (6.4.42)$$

Отже, розв'язки рівняння (6.4.24), що задовольняють однорідним (нульовим) граничним умовам (6.4.25), запишуться у вигляді.

$$w_n(x, t) = X_n T_n = b_n e^{-\frac{V_x x}{2D} - \lambda_n^2 t} \sin \mu_n x, \quad (6.4.43)$$

де $b_n = a_n B_n$, а значення μ_n визначаються із рівняння (6.4.38).

Загальний розв'язок крайової задачі (6.4.24)–(6.4.26) матиме вигляд такого ряду Фур'є:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \mu_n x e^{-\left(\frac{V_x x}{2D} + \lambda_n^2 t\right)}, \quad (6.4.44)$$

коефіцієнти якого визначаються рівністю

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} [c_0 - u(x)] e^{-\frac{V_x x}{2D}} \sin \mu_n x dx, \quad (6.4.45)$$

причому $u(x)$ визначається формулою (6.4.15), а саме:

$$u(x) = A e^{\eta x} + B e^{\tau x}, \quad (6.4.46)$$

де сталі A і B визначаються рівностями (6.4.18).

Використовуючи співвідношення (6.3.113) і (6.4.38), знайдемо:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \left(c_0 - A e^{\eta x} - B e^{\tau x} \right) e^{-\frac{V_x x}{2D}} \sin \mu_n x dx = \\ &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \left(c_0 e^{-\frac{V_x x}{2D}} \sin \mu_n x - A e^{\left(\eta - \frac{V_x}{2D}\right)x} \sin \mu_n x - B e^{\left(\tau - \frac{V_x}{2D}\right)x} \sin \mu_n x \right) dx = \\ &= \frac{2c_0}{\ell} \left[\frac{e^{-\frac{V_x x}{2D}}}{\frac{V_x^2}{4D^2} + \mu_n^2} \left(-\frac{V_x}{2D} \sin \mu_n x - \mu_n \cos \mu_n x \right) \right]_0^{\ell} - \\ &- \frac{2A}{\ell} \left[\frac{e^{\left(\eta - \frac{V_x}{2D}\right)x}}{\left(\eta - \frac{V_x}{2D}\right)^2 + \mu_n^2} \left\{ \left(\eta - \frac{V_x}{2D} \right) \sin \mu_n x - \mu_n \cos \mu_n x \right\} \right]_0^{\ell} - \\ &- \frac{2B}{\ell} \left[\frac{e^{\left(\tau - \frac{V_x}{2D}\right)x}}{\left(\tau - \frac{V_x}{2D}\right)^2 + \mu_n^2} \left\{ \left(\tau - \frac{V_x}{2D} \right) \sin \mu_n x - \mu_n \cos \mu_n x \right\} \right]_0^{\ell} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2c_0}{\ell} \frac{\mu_n \cos \mu_n}{\frac{V_x^2}{4D^2} + \mu_n^2} - \frac{2A}{\ell} \left[\frac{e^{\left(\eta - \frac{V_x}{2D}\right)t}}{\left(\eta - \frac{V_x}{2D}\right)^2 + \mu_n^2} r_1 \sin \mu_n x + \frac{\mu_n}{\left(\eta - \frac{V_x}{2D}\right)^2 + \mu_n^2} \right] -$$

$$- \frac{2B}{\ell} \left[\frac{e^{\left(\eta - \frac{V_x}{2D}\right)t}}{\left(\eta - \frac{V_x}{2D}\right)^2 + \mu_n^2} r_2 \sin \mu_n x + \frac{\mu_n}{\left(\eta - \frac{V_x}{2D}\right)^2 + \mu_n^2} \right].$$

Отже, розв'язок крайової задачі (6.4.20)–(6.4.22) запишеться у такому вигляді:

$$c(x, t) = \frac{c_1 r_2 e^{r_2 t} + k}{r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}} e^{r_1 x} - \frac{c_1 r_1 e^{r_1 t} + k}{r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}} e^{r_2 x} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \mu_n x e^{-\frac{V_x x}{2D} - \lambda_n^2 t}, \quad (6.4.47)$$

де коефіцієнти b_n визначаються рівністю:

$$b_n = \frac{2}{\ell} \left\{ \frac{c_0 \mu_n \cos \mu_n}{q^2 + \mu_n^2} - A \left[\frac{e^{(\eta - q)t}}{\left(\eta - q\right)^2 + \mu_n^2} r_1 \sin \mu_n x + \frac{\mu_n}{\left(\eta - q\right)^2 + \mu_n^2} \right] - \right.$$

$$\left. - B \left[\frac{e^{(r_2 - q)t}}{\left(r_2 - q\right)^2 + \mu_n^2} r_2 \sin \mu_n x + \frac{\mu_n}{\left(r_2 - q\right)^2 + \mu_n^2} \right] \right\}, \quad q = \frac{V_x}{2D}. \quad (6.4.48)$$

6.5. Дослідження процесу біологічного очищення стічних вод за допомогою математичного моделювання

У даному підрозділі показано, як за допомогою однієї з математичних моделей процесу розповсюдження забруднень у рухомому середовищі неконсервативних речовин, що були розглянуті в параграфі 6.4.1, можна визначити основні параметри біореактора та швидкість біологічного очищення стічних вод.

6.5.1. Побудова концептуальної і математичної моделей

Біореактор являє собою прямокутну очисну споруду (канал або басейн) у вигляді прямокутної призми. На вхід у біореактор надходять стічні води з різними інгредієнтами забруднюючих речовин, кожен з яких, перебуваючи в біореакторі, трансформується (перетворюється) в нешкідливі або малотоксичні речовини. Найбільш токсичні органічні речовини за допо-

могою мікроорганізмів перетворюються в неорганічні речовини, які або осідають на дні реактора, або засвоюються фітопланктоном та іншими водними організмами. Таким чином, відбувається біологічне очищення стічних вод. Швидкість такого очищення залежить як від біомаси мікроорганізмів, так і від концентрації забруднень, що впливають на біомасу мікроорганізмів. Якщо в біореакторі процес стабілізувався, то концентрація забруднень у кожній точці біореактора не змінюватиметься протягом усього часу спостереження. Проте вздовж реактора в напрямку руху стічних вод концентрація забруднень зменшується, і на виході з біореактора вона стає найменшою. Ясно, що чим більший час стічні води знаходяться у біореакторі, тим краще вони очистяться. Час перебування стічних вод у біореакторі залежить від швидкості, з якою вони течуть у ньому. Отже, чим більша швидкість течії у біореакторі, тим менш очищена вода буде на виході з біореактора. У зв'язку з цим виникає задача визначення такої швидкості стічних вод у біореакторі, за якої концентрація забруднень на виході не перевищуватиме заданої гранично допустимої величини. Для розв'язання такої задачі потрібно застосувати метод математичного моделювання.

Загальне рівняння масопереносу домішок у рухомому розчині з урахуванням кінетики реакції перетворення (самоочищення) забруднюючих речовин записується у вигляді 6.4.11, а саме:

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(x, t, T, c) c = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (6.5.1)$$

де $c(x, t)$ - концентрація забруднень, D - коефіцієнт молекулярної дифузії, V_x - швидкість руху розчину, $\gamma(x, t, T, c)$ - функція, що описує кінетику біологічного самоочищення, t - час у добі.

У нашому випадку, враховуючи досить малий вплив молекулярних процесів на очищення стічних вод та їх стаціонарний характер, для моделювання біологічного очищення стічних вод у реакторі скористаємося таким рівнянням

$$V_x \frac{dc}{dx} = -\gamma(x, t, T, c) c. \quad (6.5.2)$$

Коефіцієнт швидкості очищення при сталій температурі визначимо такою рівністю:

$$\gamma(x, t) = \gamma_{\max} + (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) e^{-\frac{t}{\mu}}, \quad (6.5.3)$$

де постійні γ_{\min} , γ_{\max} і μ визначаються при верифікації (калібруванні) моделі на основі даних натурних спостережень.

Коефіцієнт швидкості біологічного очищення стічних вод γ може мати різну структуру, але основною його властивістю є те, що він повинен задовольняти таким двом умовам

$$\gamma(0) = \gamma_{\min}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma = \gamma_{\max}. \quad (6.5.4)$$

Ця властивість показує, що швидкість очищення стічних вод не може збільшуватись необмежено. Тому коефіцієнти швидкості очищення γ має асимптотичний характер обмеження.

Розв'язок диференціального рівняння шукатимемо при додатковій (початковій) умові $c(0) = c_{\text{ст}}$, де $c_{\text{ст}}$ - концентрація стічних вод, що надходять до реактора. Отже, математична модель біологічного очищення стічних вод описується такою крайовою задачею:

$$V_x \frac{dc}{dx} = - \left[\gamma_{\max} + (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) e^{-\frac{t}{\mu}} \right] c, \quad (6.5.5)$$

$$c|_{x=0(t=0)} = c(0) = c_{\text{ст}}. \quad (6.5.6)$$

Враховуючи, що $V_x = \frac{dx}{dt}$, крайову задачу (2.5), (2.6) перепишемо у такому вигляді:

$$\frac{dc}{dt} = - \left[\gamma_{\max} + (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) e^{-\frac{t}{\mu}} \right] c, \quad c(0) = c_{\text{ст}}. \quad (6.5.7)$$

Як було вже сказано, для математичної моделі (6.5.2) трофічну функцію $\gamma(x, t, c, B)$, що описує величину швидкості біологічного самоочищення, можна представити різними функціями, які задовольняють умові (6.5.4). Крім уже наведеної вище функції (6.5.3), такій умові задовольняє функція, що визначається рівнянням Міхаеліса-Ментен у такій формі:

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_{\max} t}{\gamma_m + t}, \quad (6.5.8)$$

де γ_{\max} і γ_m стали верифікації, причому стала Міхаеліса γ_m дорівнює такому значенню часу, при якому швидкість протікання реакції (споживання субстрату) дорівнює половині максимальної $\left(\gamma = \frac{1}{2} \gamma_{\max} \right)$.

Формулу Міхаеліса-Ментен можна узагальнити і записати як функцію часу, концентрації і біомаси мікроорганізмів, а саме:

$$\gamma(t, c, B) = \frac{\gamma_{\max} (t + c + B)}{\gamma_m + (t + c + B)}. \quad (6.5.9)$$

Аналогічно можна узагальнити трофічну функцію (6 5 3) і записати її у вигляді

$$\gamma(t, c, B) = \gamma_{\max} + (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) e^{-\frac{t+c+B}{\mu}} \quad (6 5 10)$$

Для деяких організмів трофічну функцію можна визначити як розв'язок логістичного рівняння, тобто

$$\gamma(t, c, B) = \frac{\gamma_{\min} \gamma_{\max}}{\gamma_{\min} + (\gamma_{\max} - \gamma_{\min}) e^{-rt}} \quad (6 5 11)$$

або в більш загальному вигляді

$$\gamma(t, c, B) = \frac{\gamma_{\min} \gamma_{\max}}{\gamma_{\min} + (\gamma_{\max} - \gamma_{\min}) e^{-r(t+c+B)}} \quad (6 5 12)$$

Розв'язавши крайову задачу (6 5 7), знайдемо функцію, що описує (моделює) динаміку забруднень (зміну їх концентрації)

$$c(t) = c_{\text{ст}} \exp \left[\mu (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) \left(e^{-\frac{t}{\mu}} - 1 \right) - \gamma_{\max} t \right], \quad t = \frac{x}{V_x} \quad (6 5 13)$$

Поклавши для зручності $\gamma_{\min} = 0$ і $\mu = m$, із розв'язку (6 5 13) одержимо таку формулу для обчислення концентрації забруднень у стічних водах, що рухаються в реакторі зі швидкістю V_x :

$$c(t) = c_{\text{ст}} \exp \left\{ \gamma_{\max} \left[m \left(1 - e^{-\frac{t}{m}} \right) - t \right] \right\}, \quad t = \frac{x}{V_x}, \quad (6 5 14)$$

де параметри моделі γ_{\max} і m поки що не визначені

6.5.2. Верифікація математичної моделі

Для проведення розрахунків необхідно спочатку за даними натурних спостережень провести верифікацію (калібровку) математичної моделі (6 5 14), тобто

визначити числові значення параметрів $\gamma_{\max} = \gamma$ і μ (див пунктирну лінію, що описує динаміку концентрації ХПК за даними натурних спостережень, рис 6 3)

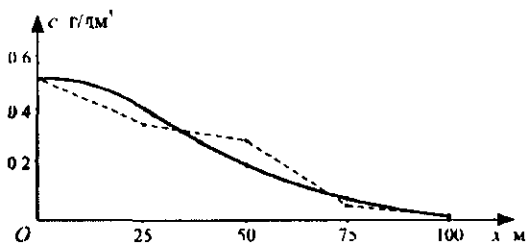


Рис. 6.3

Таблиця 6 1

Значення концентрацій забруднень по ХПК і зависях, г/дм³

Інгредієнт	На початку БР	25 м (10 дб)	50 м (20 дб)	75 м (30 дб)	100 м (40 дб)
ХПК	0,508	0 360	0 300	0 070	0,029
Зависі	0 035	0,030	0,027	0,020	0,016

Таблиця 6 2

Алгоритм обчислення концентрації забруднень

x	$-\frac{x}{vt}$	$\exp\left(-\frac{x}{vt}\right)$	$1 - \exp\left(-\frac{x}{vt}\right) = a$	at	$at - \frac{x}{v} = b$	$\exp(\gamma b)$	$c = c_0 \exp(\gamma b)$
1	2	3	4	5	6	7	8

У табл 6 1 подані результати натурних спостережень за біологічним очищенням стічних вод молокозаводу в біореакторі по ХПК та зависях. Відомо, що довжина біореактора $L = 100$ м, а швидкість руху стічних вод в біореакторі $v = 2,5$ м/добу. Як бачимо, у таблиці наведеш значення концентрації органічних речовин по ХПК і зависях на вході в біореактор і через кожні 25 м, тобто через 10, 20, 30, 40 дб перебування забруднень у біореакторі.

Верифікацію моделі проведитимемо за методом послідовних наближень, тобто для різних значень параметрів γ і t будемо знаходити значення концентрації $c(t)$ доти, поки це значення не почне збігатися з даними натурних спостережень. Обчислення зручно проводити в певній послідовності, тобто за алгоритмом, наведеним у табл 6 2, де в першій колонці записуються значення координати стічних вод у біореакторі ($x = 0$ м, $x = 25$ м, $x = 50$ м, $x = 75$ м, $x = 100$ м). Для кожного значення параметра γ ($\gamma = 1, 0,1, 0,5$ і т. д.) беруться кілька значень параметра t ($t = 10, 25, 50, 100$ і т. д.).

При остаточній верифікації математичної моделі доцільно визначити абсолютну і відносну середні квадратичні похибки.

Нагадаємо, що середня квадратична відносна похибка δ визначається за такою формулою (в процентах)

$$\delta = 100\% \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta c_i}{c_i} \right)^2} \quad (6.5.15)$$

або для даного випадку:

$$\delta = 100\% \sqrt{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{\Delta c_1}{c_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta c_2}{c_2} \right)^2 + \left(\frac{\Delta c_3}{c_3} \right)^2 + \left(\frac{\Delta c_4}{c_4} \right)^2 \right]}, \quad (6.5.16)$$

де $\Delta c_1, \Delta c_2, \Delta c_3, \Delta c_4$ – абсолютні похибки; c_1, c_2, c_3, c_4 – дані натурних спостережень в точках біореактора $\tau = 25$ м; $x = 50$ м, $\lambda = 75$ м, $x = 100$ м. Як показують розрахунки, найменша середня квадратична похибка одержується при значеннях параметрів верифікації $\gamma = 0,40$ і $m = 100$. При таких значеннях параметрів γ та m математичну модель можна вважати верифікованою із заданою точністю. Враховуючи, що при $\gamma = 0,45$ і $m = 100$ середня квадратична похибка дещо більша, але на виході біореактора значення концентрації менше значення, що спостерігається в природі, краще ці значення взяти за параметри верифікації. Графіки концентрацій, що побудовані за даними натурних спостережень (ламана пунктирна лінія) і результатами теоретичних (математичних) розрахунків (суцільна крива), наведені на рис. 6.3

Результати верифікації наведені у таблицях 6.3–6.6.

Таблиця 6.3

Верифікація моделі при $\gamma = 1; m = 10; 25; 50; 100$

1	2	3	4	5	6	7	8
1) $\gamma = 1, m = 10$							
10	1	0,368	0,632	6,32	-3,68	$2,522 \cdot 10^{-2}$	$1,281 \cdot 10^{-2}$
20	-2	0,135	0,865	8,65	11,35	$1,177 \cdot 10^{-5}$	$5,979 \cdot 10^{-6}$
30	-3	0,050	0,950	9,50	-20,50	$1,250 \cdot 10^{-9}$	$6,351 \cdot 10^{-10}$
40	-4	0,0183	0,982	9,82	-30,18	$7,816 \cdot 10^{-14}$	$3,971 \cdot 10^{-14}$
2) $\gamma = 1, m = 25$							
10	-0,4	0,670	0,330	8,25	-1,75	0,174	0,088
20	-0,8	0,449	0,551	13,775	-6,23	$1,98 \cdot 10^{-3}$	$1,01 \cdot 10^{-3}$
30	-1,2	0,301	0,699	17,475	-12,525	$3,63 \cdot 10^{-6}$	$1,846 \cdot 10^{-6}$
40	-1,6	0,202	0,798	19,95	-20,05	$1,96 \cdot 10^{-9}$	$9,96 \cdot 10^{-10}$
3) $\gamma = 1, m = 50$							
10	-0,2	0,819	0,181	9,05	-0,950	0,387	0,196
20	-0,4	0,670	0,330	16,5	-3,5	0,0302	0,0153
30	-0,6	0,549	0,451	22,55	-7,45	$5,81 \cdot 10^{-4}$	$2,954 \cdot 10^{-4}$
40	-0,8	0,449	0,551	27,55	12,45	$3,918 \cdot 10^{-6}$	$1,990 \cdot 10^{-6}$
4) $\gamma = 1; m = 100$							
10	-0,1	0,905	0,095	9,5	-0,5	0,607	0,308
20	-0,2	0,819	0,181	18,1	-1,9	0,1495	0,076
30	-0,3	0,741	0,259	25,9	-4,1	0,0166	$8,419 \cdot 10^{-3}$
40	-0,4	0,670	0,330	33,0	-7,0	$9,199 \cdot 10^{-4}$	$4,632 \cdot 10^{-4}$

Таблиця 6.4

Верифікація моделі при $\gamma = 0,1$; $m = 10; 25; 50; 100$

1	2	3	4	5	6	7	8
1) $\gamma = 0,1, m = 10$							
10	-1	0,368	0,632	6,32	-3,68	0,692	0,352
20	-2	0,135	0,865	8,65	-11,35	0,321	0,163
30	-3	0,050	0,950	9,50	-20,50	0,129	0,0654
40	4	0,0183	0,982	9,82	-30,18	0,049	0,0248
2) $\gamma = 0,1, m = 25$							
10	-0,4	0,670	0,330	8,25	-1,75	0,839	0,426
20	0,8	0,449	0,551	13,775	-6,23	0,56	0,284
30	-1,2	0,301	0,699	17,475	-12,525	0,286	0,145
40	-1,6	0,202	0,798	19,95	20,05	0,135	0,068
3) $\gamma = 0,1, m = 50$							
10	-0,2	0,819	0,181	9,05	0,950	0,909	0,462
20	-0,4	0,670	0,330	16,5	-3,5	0,705	0,358
30	-0,6	0,549	0,451	22,55	-7,45	0,475	0,241
40	-0,8	0,449	0,551	27,55	-12,45	0,288	0,146
4) $\gamma = 0,1, m = 100$							
10	-0,1	0,905	0,095	9,5	-0,5	0,951	0,483
20	-0,2	0,819	0,181	18,1	-1,9	0,827	0,420
30	-0,3	0,741	0,259	25,9	-4,1	0,664	0,337
40	0,4	0,670	0,330	33,0	-7,0	0,497	0,252

Таблиця 6.5

Верифікація моделі при $\gamma = 0,5$; $m = 10; 25; 50; 100$

1	2	3	4	5	6	7	8
1) $\gamma = 0,5, m = 10$							
10	1	0,368	0,632	6,32	-3,68	0,159	0,0807
20	-2	0,135	0,865	8,65	-11,35	$3,43 \cdot 10^3$	$1,743 \cdot 10^{-1}$
30	-3	0,050	0,950	9,50	-20,50	$3,54 \cdot 10^5$	$1,796 \cdot 10^{-5}$
40	-4	0,0183	0,982	9,82	-30,18	$2,795 \cdot 10^7$	$1,42 \cdot 10^7$
2) $\gamma = 0,5, m = 25$							
10	-0,4	0,670	0,330	8,25	-1,75	0,417	0,212
20	-0,8	0,449	0,551	13,775	-6,23	0,0445	0,0226
30	-1,2	0,301	0,699	17,475	-12,525	$1,906 \cdot 10^{-1}$	$9,68 \cdot 10^{-4}$
40	-1,6	0,202	0,798	19,95	20,05	$4,43 \cdot 10^5$	$2,25 \cdot 10^5$
3) $\gamma = 0,5, m = 50$							
10	0,2	0,819	0,181	9,05	-0,950	0,622	0,316
20	-0,4	0,670	0,330	16,5	-3,5	0,174	0,083
30	-0,6	0,549	0,451	22,55	7,45	0,0241	0,0123
40	-0,8	0,449	0,551	27,55	-12,45	$1,98 \cdot 10^3$	$1,05 \cdot 10^3$
4) $\gamma = 0,5, m = 100$							
10	-0,1	0,905	0,095	9,5	-0,5	0,779	0,395
20	-0,2	0,819	0,181	18,1	-1,9	0,387	0,196
30	-0,3	0,741	0,259	25,9	-4,1	0,129	0,0654
40	0,4	0,670	0,330	33,0	-7,0	0,0302	0,0153

Верифікація моделі при $\gamma = 0,2; 0,3; 0,4; 0,45$ і $m = 100$

1	2	3	4	5	6	7	8
1) $\gamma = 0,2, m = 100$							
10	-0,1	0,905	0,095	9,5	-0,5	0,905	0,460
20	-0,2	0,819	0,181	18,1	-1,9	0,684	0,347
30	-0,3	0,741	0,259	25,9	-4,1	0,404	0,205
40	0,4	0,670	0,330	33,0	-7,0	0,247	0,125
2) $\gamma = 0,3; m = 100$							
10	-0,1	0,905	0,095	9,5	-0,5	0,861	0,437
20	-0,2	0,819	0,181	18,1	-1,9	0,566	0,288
30	-0,3	0,741	0,259	25,9	-4,1	0,292	0,148
40	-0,4	0,670	0,330	33,0	-7,0	0,122	0,062
3) $\gamma = 0,4, m = 100$							
10	-0,1	0,905	0,095	9,5	-0,5	0,819	0,416
20	-0,2	0,819	0,181	18,1	-1,9	0,468	0,238
30	-0,3	0,741	0,259	25,9	-4,1	0,194	0,098
40	-0,4	0,670	0,330	33,0	-7,0	0,061	0,036
4) $\gamma = 0,45, m = 100$							
10	-0,1	0,905	0,095	9,5	-0,5	0,798	0,406
20	-0,2	0,819	0,181	18,1	-1,9	0,425	0,216
30	0,3	0,741	0,259	25,9	-4,1	0,158	0,080
40	-0,4	0,670	0,330	33,0	-7,0	0,043	0,022

6.5.3. Проведення імітаційного експерименту

За допомогою верифікованої математичної моделі (6.5.14), яку тепер запишемо в такому вигляді:

$$c(x) = 0,508 \exp \left\{ 0,4 \left[100 \left(1 - \exp \frac{-x}{100v} \right) - \frac{x}{v} \right] \right\}, \quad (6.5.15)$$

можна проводити різні імітаційні (чисельні) експерименти. Зокрема, можна провести такий імітаційний експеримент: 1) обчислити концентрацію забруднень у стічних водах на виході біореактора ($x = 100$ м) при різних швидкостях течії в біореакторі, а саме: при $v = 12,5$ м/добу, $v = 5$ м/добу і $v = 1,25$ м/добу, 2) дати аналіз роботи біореактора по очищенню стічних вод при різних швидкостях очищення стічних вод, тобто при різних швидкостях течії в біореакторі.

У табл. 6.7 наведено результати обчислення концентрації очищених вод на виході біореактора при різних швидкостях їх очищення. Як видно з результатів такого чисельного (імітаційного) експерименту, із збільшенням швидкості очищення стічних вод концентрація забруднень (органічної речовини по ХПК) на виході біореактора збільшиться. Зокрема, при збільшенні швидкості течії забруднених вод у біореакторі з 2,5 м/добу до

Таблиця 6.7

Результати чисельного (імітаційного) експерименту

1	2	3	4	5	6	7	8
1) $v = 12,5$ м/добу							
2	-0,02	0,980	0,0198	1,98	-0,0199	0,991	0,503
4	-0,04	0,961	0,0392	3,92	-0,0789	0,965	0,490
6	-0,06	0,942	0,0582	5,82	-0,176	0,924	0,469
8	-0,08	0,923	0,0769	7,69	-0,31	0,870	0,442
2) $v = 5$ м/добу							
5	-0,05	0,951	0,0488	4,88	0,12	0,947	0,481
10	-0,1	0,905	0,0952	9,52	0,48	0,806	0,409
15	-0,15	0,861	0,1393	13,93	-1,07	0,618	0,314
20	-0,2	0,819	0,1813	18,13	-1,873	0,430	0,219
3) $v = 1,25$ м/добу							
20	0,2	0,819	0,1813	18,13	-1,873	0,430	0,219
40	0,4	0,670	0,330	33,0	-7,0	0,042	0,022
60	-0,6	0,549	0,4512	45,12	-14,88	0,0012	$6,27 \cdot 10^{-4}$
80	0,8	0,449	0,5507	55,07	24,93	$1,341 \cdot 10^{-5}$	$6,81 \cdot 10^{-6}$

12,5 м/добу, тобто у 5 разів, концентрація забруднень на виході реактора збільшується в 20 разів, а при збільшенні швидкості від 2,5 м/добу до 5 м/добу, тобто в 2 рази, концентрація забруднень на виході реактора збільшується в 10 разів. При зменшенні швидкості з 2,5 м/добу до 1,25 м/добу, тобто в 2 рази, концентрація забруднень зменшується на кілька порядків. Звідси можна зробити висновок, що при швидкості руху стічних вод в біореакторі $v = 2,5$ м/добу процес очищення найкраще задовольняє практичним вимогам, за умови, що концентрація забруднень не повинна перевищувати $0,3$ г/дм³ по ХПК.

Примітка За допомогою математичної моделі (6.5-14) рекомендуємо провести дослідження процесу очищення стічних вод у біореакторі відносно змінлив (див табл. 6.1). Доцільно провести верифікацію та імітаційний експеримент по очищенню стічних вод за іншими показниками (іншими параметрами) якості води.

ІМІТАЦІЙНЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ПРОБЛЕМИ ГІДРОЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ: ПИТАННЯ ТЕОРІЇ І ПРАКТИКИ

Розглядаються структура і основні положення організації та проведення екологічного моніторингу, показали роль і місце математичного моделювання в системі екологічного моніторингу.

7.1. Пріоритети в екології

Тепер уже ніхто не сумнівається в тому, що, не розв'язавши екологічних проблем, суспільство не може далі розвиватись. Забруднення навколишнього природного середовища та інші негативні фактори сучасної цивілізації поставили під загрозу не тільки існування рослинного й тваринного світу, а й життя самої людини. Екологічні проблеми охоплюють досить широкий діапазон питань, які нині потребують негайного розв'язання на різних рівнях суспільних, державних, регіональних і міжнародних структур. Тому дуже важливо визначити пріоритети в численних проблемах і питаннях, що виникають у галузі екології.

У доісторичні часи екосистеми не раз зазнавали різних «травм» і «шоків» від посух, повеней, землетрусів, пожеж тощо. Вижили й далі розвивались лише ті, які адаптувалися до негативних впливів, що систематично виникали протягом усього часу еволюційного розвитку. Природні системи, які нині існують, не є ламкими, навпаки, вони досить гнучкі й стійкі. Проте такі властивості не безмежні. Якщо на ранніх стадіях розвитку суспільства вплив його на природу був не дуже значим і не викликав помітних змін у навколишньому середовищі, то зараз тиск факторів антропогенного походження стає таким потужним, що люди вже не можуть собі дозволити, як це було раніше, нехтувати його негативними наслідками. Адже, крім того, що людина інтенсивно експлуатує природні невідновлювані й відновлювані ресурси, внаслідок її господарської діяльності виникають такі явища, як ерозія ґрунтів та забруднення атмосфери, гідросфери й літосфери відходами промисловості і сільського господарства. Масштаби впливу людини на різні компоненти біосфери з року в рік розширюються, і це призводить до зміни життєво важливих параметрів довкілля (геофізичних, геохімічних, гідрометеорологічних та ін.), які значною мірою позначаються на розвитку рослинного й тваринного світу, на житті людини та її здоров'ї. З усього сказаного випливає, що однією з пріоритетних проблем екології є розробка науково обґрунто-

ваних рекомендацій для створення таких стратегій й тактики (технологій) взаємовідносин між людиною та природою, які змогли б забезпечити нормальне функціонування всіх елементів біосфери, зокрема самої людини.

Яким чином підійти до розв'язання цієї проблеми? Слід зазначити, що вести спостереження за всіма параметрами біосфери навряд чи доцільно та й практично неможливо, хоча й існує система глобального моніторингу, яка дає змогу визначати зміни найважливіших параметрів стану біосфери. Особливо важко дати необхідну оперативну оцінку тим екологічним змінам, що відбуваються в біологічних компонентах біосфери під впливом антропогенних факторів. Отже, для прийняття оперативних рішень, спрямованих на поліпшення стану природних систем і навколишнього середовища, глобальний моніторинг не завжди є ефективним: він може бути корисним тільки для визначення деяких стратегічних напрямів в екологічній політиці. Нині, мабуть, найважливішою проблемою всієї екологічної діяльності, зокрема й організації системи екологічного моніторингу, є проблема одержання екологічної оцінки і прогнозу стану різних екосистем та основних компонентів біосфери (атмосфери, гідросфери та літосфери) з метою подальшого керування їх станом і зупинення їх деградації [46, 56, 114, 117, 164].

Особливо серйозне занепокоєння викликають стан водних об'єктів та якість природних вод. Адже, з одного боку, численні водні об'єкти є основними джерелами прісної води, такої необхідної для різноманітних потреб людини і майже для всіх галузей народного господарства; без води неможливе життя, і вона має бути певної, нормальної якості. З іншого боку, треба враховувати, що вода є розчинником більшості речовин, у тому числі й токсичних, які негативно впливають на біологічні системи і дуже шкідливі для здоров'я людини. Природні води перебувають у постійному кругообігу, добре взаємодіють з основними компонентами біосфери, зокрема з атмосферою й наземними екосистемами. Через це більшість промислових, сільськогосподарських та побутових забруднюючих речовин рано чи пізно потрапляють у річки, канали, озера, водосховища та інші водні об'єкти. Усі водні об'єкти відіграють роль своєрідних природних індикаторів екологічного стану не тільки водних систем, а й усієї площі водозбору з її атмосферою й наземними екосистемами. Ось чому розробка гідроекологічної оцінки та прогнозу мають бути в центрі уваги будь-якої системи екологічних досліджень і насамперед гідроекологічного моніторингу.

7.2. Наукові основи гідроекологічного моніторингу

Перш ніж уживати будь-яких екологічних заходів, провадити наукові дослідження чи розробляти програми, треба одержати якнайповнішу й найдетальнішу інформацію про екологічну ситуацію в тому чи іншому регіоні, області або районі. Однією з обов'язкових умов при

цьому є організація екологічного моніторингу та створення банку даних основних гідроекологічних показників, необхідних для оцінки та прогнозування стану водних екосистем і якості природних вод.

Під екологічним моніторингом розуміють систему повторних спостережень у просторі й часі за певними компонентами біосфери (або екосистеми), які перебувають під впливом природних і антропогенних факторів і яких вибрано з усього різноманіття біологічних об'єктів з метою виявлення, оцінки, прогнозування та регулювання стану природного середовища й природних систем.

Визначення поняття *гідроекологічного моніторингу* відрізняється від наведеного тільки формулюванням мети, що, як уже зазначалося, передбачає оцінку й прогноз стану водних екосистем та якості природних вод на основі одержаної гідроекологічної інформації з наступною розробкою рекомендацій для проведення заходів, спрямованих на їх поліпшення та відновлення.

Розглянемо **найважливіші вимоги до системи гідроекологічного моніторингу**. Методи одержання, обробки, накопичення, впорядкування та використання гідроекологічної інформації повинні бути науково обґрунтованими, базуватися на принципах системного аналізу, засобах інформатики та методах імітаційного математичного моделювання. При цьому цілі, завдання й методи гідроекологічного моніторингу слід вибирати залежно від його типу (виду), який може бути *локальним* (імпактім), *місцевим* (у межах району чи області), *національним* (у межах однієї країни), *регіональним* (як у межах держави, так і на міждержавному рівні) і *глобальним*, що охоплює всю біосферу. Крім того, характерною особливістю будь-якого гідроекологічного моніторингу є *басейновий принцип*, тобто збирання, накопичення, аналіз і оцінка інформації мають бути прив'язані до певного басейну водної системи або водного об'єкта, а, отже, і до водозбірної площі. У зв'язку з басейновим принципом найефективнішим видом гідроекологічного моніторингу є регіональний, який здебільшого охоплює національні, місцеві й локальні види моніторингу.

При розробці системи гідроекологічного моніторингу необхідно розв'язати такі питання:

1. Розробити схему гідроекологічного районування басейну водної системи чи водного об'єкта, поділивши головну річку, її основні притоки та інші водні об'єкти басейну на окремі великі ділянки (елементи першого порядку).

2. Розробити мережу поділу великих ділянок головної річки та інших водних об'єктів басейну на малі ділянки за географічними, екологічними, економічними й соціальними умовами (елементи другого порядку).

3. Визначити місце розташування станцій (пунктів) спостереження та відбору проб на створах, що відділяють великі й малі ділянки одна від одної.

4. Визначити місце розташування обов'язкових (стаціонарних) і факультативних станцій (пунктів) спостереження й відбору проб, а також спеціа-

лізованих пунктів для одержання інформації з ділянок річки, притоків, водосховищ, озер та інших водних об'єктів, де екологічні умови найкритичніші (елементи третього порядку).

5. Розробити систему показників і критеріїв їх гідроекологічної оцінки, які б дали змогу науково обгрунтовано визначити екологічний стан водних об'єктів, їх екосистем та якість води.

6. Провести уніфікацію, інтеркалібрування та апробацію методів і засобів лабораторного аналізу одержаних проб.

7. Організувати комп'ютерну систему статистичної обробки даних, створення баз і банків даних щодо всіх гідроекологічних показників.

8. Створити інформаційно-експертну систему для оцінювання, прогнозування і регулювання стану водних екосистем, якості води та інших компонентів водного об'єкта.

До системи сучасного гідроекологічного моніторингу можуть входити такі елементи (складові):

1) мережа обов'язкових і факультативних станцій (пунктів) спостереження та відбору проб;

2) методи й засоби відбору та лабораторного аналізу проб;

3) система комп'ютерної обробки первинної інформації та різні бази гідроекологічних даних (їх створюють на місцевому, районному, обласному або відомчому рівнях);

4) центральна спеціалізована база (банк) даних усіх гідроекологічних показників, необхідних для оцінювання і прогнозування основних кількісних характеристик (параметрів) стану водних екосистем та якості природних вод (їх створюють на національному або регіональному рівнях);

5) імітаційні математичні моделі гідроекологічних, гідрохімічних та гідробіологічних процесів, що відбуваються у водних системах;

6) інформаційно-експертна система для гідроекологічного оцінювання, прогнозування та регулювання якості природних вод та стану водних екосистем.

Усю цю систему доцільно поділити на дві частини (блоки). До першої слід віднести ті елементи, які стосуються розробки структури мережі станцій (пунктів) гідроекологічного моніторингу, їх методичного та технічного забезпечення (перші три елементи). До другої частини ввійдуть центральний спеціалізований банк даних, система управління ним, система гідроекологічних оцінок і банк імітаційних математичних моделей, що описують гідрологічні, гідрохімічні та гідробіологічні процеси. Вся друга частина є інформаційно-експертною системою і являє собою завершальний етап створення системи гідроекологічного моніторингу.

Під час районування певного водного об'єкта і визначення мережі станцій (пунктів) спостережень і відбору проб рекомендується така ієрархічна структура:

а) за допомогою вузлових (як правило, стаціонарних) станцій головну річку поділяють на великі ділянки, які разом з притоками й озерами, що містяться в басейні головної річки, називаються водними об'єктами (елементи мережі моніторингу першого порядку),

б) за допомогою додаткових станцій (пунктів) великі ділянки головної річки, притоки, озера та інші водні об'єкти поділяють на невеликі ділянки, для кожної з яких характерними є певні географічні, екологічні та економічні умови (елементи другого порядку),

в) невеликі ділянки можна поділити на ще менші, які називають районами ділянок і разом з виділеними окремо станціями включають до елементів мережі моніторингу третього порядку

г) визначають кількість і місце розташування пунктів відбору проб на кожній невеликій ділянці таким чином, щоб одержана гідроекологічна інформація про стан водної екосистеми та якість води була достатньо репрезентативною

Визначивши мережу станцій, необхідно встановити, чи є додаткові станції, які б давали інформацію про забрудненість атмосфери, підземних вод і ґрунтів. Такі станції, власне, не входять безпосередньо в мережу станцій гідроекологічного моніторингу, але інформацію, яку гут одержують, слід враховувати, коли визначають вплив забруднення цих компонентів біосфери на якість води й стан водних екосистем

Усю одержану інформацію треба статистично обробляти з наступним накопиченням її у вигляді локальних, місцевих, районних, обласних, національних, регіональних баз (банків) даних. Для забезпечення всієї цієї роботи необхідно створити відповідну комп'ютерну інфраструктуру, завершивши таким чином формування першої частини (блоку) гідроекологічного моніторингу

Гідроекологічний моніторинг буде ефективним тільки в тому разі, коли інформація, що накопичується в банках даних, дасть змогу оцінювати, прогнозувати й регулювати стан водних екосистем і якість природної води. Отже, всю гідроекологічну інформацію необхідно впорядкувати, класифікувати, проаналізувати та оцінити, щоб можна було зрозуміти, які негативні процеси та явища виникають у водних об'єктах у зв'язку із забрудненням навколишнього середовища та шкідливим впливом інших антропогенних факторів. Більше того, одержана гідроекологічна інформація та створена система оцінки гідроекологічних показників разом з формалізованими методами управління базами даних і методами математичного моделювання мають забезпечити можливість на основі накопиченої гідроекологічної інформації приймати необхідні рішення, спрямовані на зміну (регулювання) певних параметрів (показників) довкілля з метою поліпшення стану водних екосистем та якості природних вод. Саме ці важливі завдання і розв'язують у рамках другого блоку описаної структури гідроекологічного моніторингу

7.3. Інформаційно-експертна система оцінювання стану водних об'єктів – основний елемент ідроекологічного моніторингу

Технічною базою цієї системи можуть бути IBM-сумісні комп'ютери будь-якого типу Система складається з трьох основних підсистем (рис 7 1)

1 Спеціалізована база нормативних обов'язкових і факультативних (додаткових) гідроекологічних показників, поділених на спеціальні блоки (банк даних)

2 Експертна система оцінювання всіх представлених у базі даних показників з класифікацією водних екосистем та якості природних вод залежно від стану їхнього екологічного благополуччя (банк знань)

3 Система імітаційних математичних моделей (банк моделей), що описують динаміку основних показників якості природних вод, а також гідрологічні, гідрохімічні й гідробіологічні процеси, зокрема мінералізацію та іонний склад води, динаміку розчиненого у воді кисню та концентрацію органічних речовин, динаміку біогенних речовин і концентрацію різних забруднень з урахуванням самоочисної здатності водойм, антропо-існого навантаження, водного і теплового режиму

На сьогоднішній день, на жаль, є чимало труднощів, пов'язаних з екологічними нормативами Для об'єктивного оцінювання стану будь-яких природних систем, зокрема водних, не можна задовольнитися недостатньо обґрунтованими, переважно якісними, критеріями оцінки, що їх пропонують різні фахівці та науковці Сьогодні вже не можна обмежитися визначенням тільки гранично допустимих концентрацій (ГДК) для різних інгредієнтів, адже більшість забруднювачів змінюють свої характеристики токсичності залежно від впливу дуже багатьох факторів, які визначаються гідрологічним, гідрохімічним і гідробіологічним режимами, і тому їх не можна врахувати, коли встановлюють величину ГДК Система ГДК не враховує й явища синергізму Крім того, водну екосистему слід розглядати як єдиний живий організм, стан якого визначається нормальним функціонуванням кожного його органа (компонента екосистеми) Отже, за одними або навіть кількома показниками не можна точно визначити стан водної екосистеми, зміни в її функціонуванні

Тому, розробляючи системи екологічної оцінки та здійснюючи екологічне прогнозування, необхідно виявити кількісні критерії й визначити спеціальний набір нормативних показників, які б відображали не тільки якість навколишнього середовища (повітря, води тощо), а й стан біоти, зокрема водних екосистем До цього слід залучати фахівців різних галузей знань ідроекологів, гідробіологів, іхтіологів, гідрохіміків, токсикологів, паразитологів, радіоекологів, гідрологів та ін Слід також підкреслити, що таку систему не можна побудувати, не застосовуючи сучасних форматизованих методів, методів інформатики та математичного моделювання

ВХІД:
вхідні дані за окремими блоками
гідроекологічних показників

**ГІДРОЕКОЛОГІЧНА
ОЦІНКА, ПРОГНОЗУВАННЯ
І МОДЕЛЮВАННЯ**

ВИХІД:
аналіз стану водних екосистем
та розробка рекомендацій щодо
їх покращення

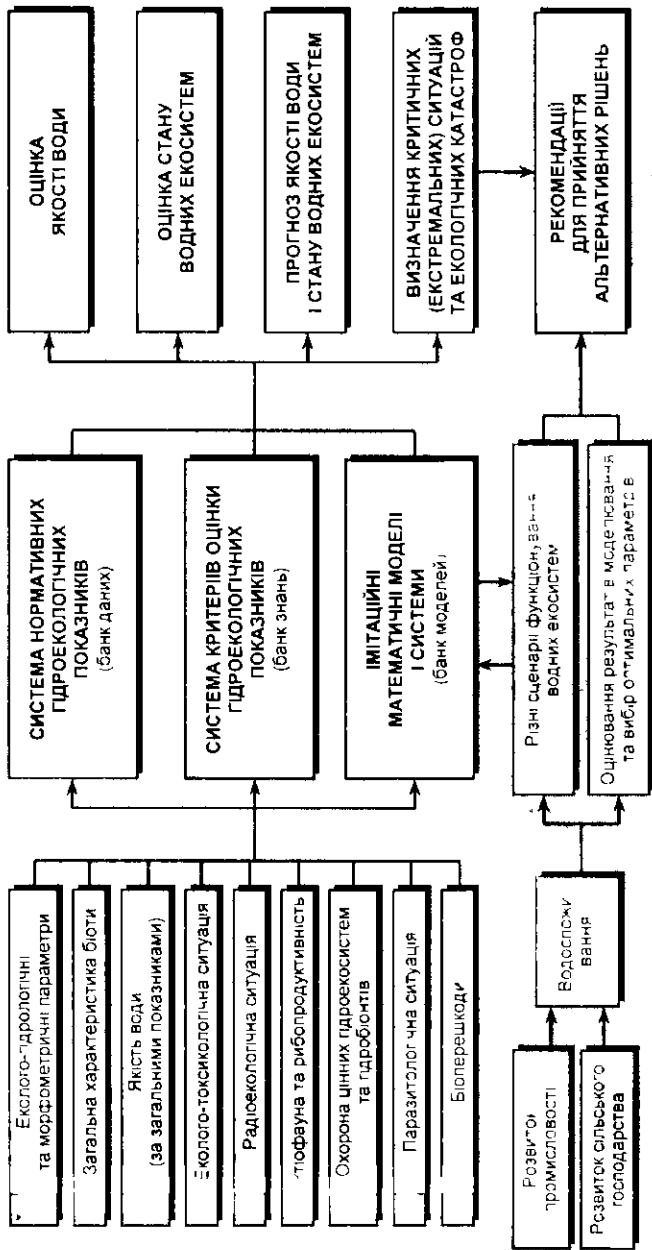


Рис. 7.1. Блок-схема інформаційно-експертної системи екологічної оцінки стану водних об'єктів і якості природних вод

7.4. Імітаційне математичне моделювання – важлива складова інформаційно-експертної системи

База гідроекологічних даних і система критеріїв їх оцінювання з відповідним математичним забезпеченням дають змогу визначити якість природних вод, установити, до якого класу вони належать, ретроспективно оцінити стан водних екосистем, ступінь їхньої евтрофікації, а також виявити інші функціональні особливості екосистем. Це одна з основних функцій інформаційно-експертної системи. Інша, не менш важлива функція цієї системи, полягає в тому, що вона дає можливість моделювати різні екологічні, зокрема критичні ситуації, які можуть виникати в природі внаслідок інтенсивного антропогенного впливу.

Імітаційне математичне моделювання (ИММ) визначають як процес створення моделі реальної системи та проведення з цією моделлю експериментів з метою осмислити поведінку системи або оцінити різні стратегії (ситуації), які можна врахувати, керуючи цією системою. Тому імітаційне моделювання за допомогою заздалегідь розроблених сценаріїв дає змогу розглянути наслідки різних варіантів антропогенного навантаження в басейні ріки чи будь-якого іншого водного об'єкта. За допомогою таких імітаційних експериментів можна розробити найбільш обґрунтовані прогнози з варіантами найгірших (екстремальних) екологічних ситуацій, при цьому виявивши основні причини й закономірності негативних екологічних наслідків. Процеси формування водних екосистем, їхніх біоценозів слід розглядати в тісному зв'язку з питаннями їх функціонування, стійкості, стабільності й гомеостазу. Тільки на основі глибоких фундаментальних гідроекологічних досліджень, що розкривають причинно-наслідкові взаємозв'язки між основними механізмами формування, функціонування та еволюційного розвитку водних систем, можна розробити науково обґрунтовану методику керування якістю природних вод і станом водних екосистем. Важливе місце в цій методиці мають посісти методи системного аналізу, математичного та імітаційного моделювання.

Як свідчить світова практика сучасних екологічних досліджень, метод імітаційного математичного моделювання є винятково ефективним, а в ряді випадків і єдиною можливістю для одержання кількісної оцінки та прогнозування стану водних екосистем, для визначення реакцій екосистем на вплив природних і антропогенних факторів.

Система імітаційного математичного моделювання, яка окремими блоками входить до інформаційно-експертної системи оцінки, прогнозування та регулювання стану водних екосистем, як правило, складається з таких імітаційних математичних моделей:

- 1) моделі водного режиму водотоків і водойм, яка враховує підземний стік, випаровування з водної поверхні, водність року, розподіл води за сезонами й місяцями, водоспоживання та інші параметри водного режиму,

2) моделі зміни загальної мінералізації та іонного складу води в річках, водосховищах та озерах залежно від водності, метеофакторів, водоспоживання та об'єму промислових, сільськогосподарських і побутових скидів,

3) моделі динаміки концентрації біогенних речовин (азоту, фосфору тощо) з урахуванням площі водозбору та їхньої гідрохімічної і гідробіологічної трансформації,

4) моделі динаміки кількості розчинених у воді кисню та органічних речовин з урахуванням їхньої взаємодії та впливу природних і антропогенних факторів,

5) моделі міграції, трансформації та накопичення радіонуклідів у різних компонентах водної системи (вода, дно, гідробіонти),

6) моделі біопродуктивності водотоків і водойм з урахуванням кормової бази, водного й температурного режимів, кліматичних факторів та антропогенного впливу

Проведення гідроекологічних досліджень за допомогою імітаційного моделювання дозволяє відповісти, зокрема, на такі питання

- як змінюється мінералізація води в різних водних об'єктах, коли змінюються водний режим, антропогенне навантаження та метеорологічні умови,
- якою є динаміка біогенних речовин і як вона впливає на евтрофікацію водойм, особливо водосховищ,
- як змінюються основні показники забруднення водних об'єктів та як вони впливають на якість води,
- як впливають антропогенні фактори (в т.ч. процеси евтрофікації) і кисневий режим на функціонування водних екосистем, їхню самоочисну здатність та екологічну сміливість

Процес побудови математичних моделей і проведення імітаційного моделювання досить складний, тому доцільно поділити його на чотири етапи

На першому етапі з'ясовують гідроекологічні проблеми, закономірності динаміки основних гідроекологічних параметрів (показників), можливість формалізації і математичного описування різних гідроекологічних процесів, будують блок-схему взаємодії різних компонентів водної системи із зовнішніми природними та антропогенними факторами. Цей етап, як правило, закінчується побудовою концептуальних екологічних моделей водного об'єкта

Проведення наступного, досить відповідального етапу відбувається з обов'язковим залученням висококваліфікованих спеціалістів-математиків, добре обізнаних на основах екології й гідробіології та методах математичного моделювання. На цьому етапі за допомогою диференціальних рівнянь або іншого математичного апарату описуються основні закономірності взаємодії та розвитку всіх елементів водних систем, тобто будують математичні моделі гідрологічних, гідрохімічних і гідробіологічних про-

цесів і явищ, що відбуваються в річках, водосховищах, каналах, лиманах та озерах

На третьому етапі розробляють алгоритми та програми для чисельної реалізації математичних моделей на ЕОМ, визначають систему імітаційних математичних моделей для проведення чисельного (імітаційного) експерименту. На цьому етапі здійснюють також калібрування (верифікацію) побудованих математичних моделей з використанням тестових завдань і даних натурних спостережень щодо конкретних водних об'єктів.

Четвертий етап, власне, і є етапом імітаційного математичного моделювання, який підготовлено першими трьома. На цьому етапі закінчують верифікацію математичних моделей з урахуванням різних варіантів розвитку того чи іншого гідробіологічного процесу та умов, за яких він може відбуватись. Складають найбільш імовірні сценарії функціонування моделюваної гідроекологічної системи, щоб виявити механізми і параметри керування цією системою, її біопродуктивністю та якістю природних вод.

Література

- 1 Авакин А. Б., Сизтанкин В. П., Шаронов В. А. Водохранилища – М. Мысль, 1987 – 325 с.
- 2 Алекс П. Ключи к экологии. Л. Гидрометеониздат, 1982 – 97 с.
- 3 Аксельруд Г. А., Лысянских В. М. Система твердое тело – жидкость – Л. Химия, 1984 – 254 с.
- 4 Александров Г. А., Логофет Д. О. Динамическая модель совместного круговорота органического вещества и азота в биоценозе переходного болота // Математическое моделирование биогенетических процессов. М. Наука, 1985 – С. 80–97.
- 5 Алексеев В. В. Динамическая устойчивость водных биоценозов // Водные ресурсы – 1973 – № 3 – С. 156–166.
- 6 Алексеев В. В., Гухев А. М., Максимов В. Н., Федоров В. Д. Динамика биомассы фито- и зоопланктона в пелагеали Белого моря // Гидробиол. журнал – Т. X – № 2, 1974 – С. 5–13.
- 7 Алексеев В. В. Динамические модели водных биоценозов. В кн. Человек и биосфера – Вып. 1. М. МГУ, 1976. С. 3–137.
- 8 Андерсон Дж. М. Экология и науки об окружающей среде. Биосфера, экосистемы, человек – Л. Гидрометеониздат, 1985 – 165 с.
- 9 Андерсен М. Г., Берт Т. П., Ханкс Р. Дж. и др. Гидроэкологическое прогнозирование. Пер. с англ. / Под ред. М. Г. Андерсена и Т. П. Берта – М. Мир, 1988 – 736 с.
- 10 Араши В. И., Цумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде – М. Истекиздат, 1953 – 616 с.
- 11 Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений – М. Наука, 1978 – 304 с.
- 12 Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1984 – 271 с.
- 13 Арнольд В. И. Теория катастроф – М. Наука, 1990 – 128 с.
- 14 Бевертон Р., Холт С. Динамика численности промысловых рыб – М. Пищевая промышленность, 1969 – 248 с.
- 15 Бек М. Е. Моделирование содержания растворенного кислорода на участке реки, далеком от эстуария // Математические методы контроля загрязнения воды. М. Мир, 1961 – С. 165–200.

- 16 *Бейли Н* Математика в биологии и медицине. Пер с англ. М Мир 1970. 326 с.
- 17 Биологические процессы и самоочищение на загрязненном участке реки / Под ред Г Г Винберга. Минск БГУ, 1973. 192 с.
- 18 *Бочвер Ф М, Лапиш Н Н, Орадовская А Е* Защита подземных вод от загрязнения – М Недра, 1976 – 264 с.
- 19 *Бреховских В Ф* Гидрофизические факторы формирования кислородного режима водоемов. М Наука 1988. 168 с.
- 20 *Веригин Н Н* Некоторые вопросы химической гидродинамики представляющие интерес для мелiorации и гидрогеологии // Изв АН СССР 1953 № 10 С 1369-1382
- 21 *Вернадский В И* Химическое строение биосферы Земли и ее окружение. М Наука, 1965 – 374 с.
- 22 *Винберг Г Г, Ахметов С И* Опыт исследования математической модели водной экосистемы // Биологические основы рыбного хозяйства и регулирование морского рыболовства // Труды ВНИИРО – Т XIV – № 11 – Вып 1 – М Пищевая промышленность 1969 – С 49–75
- 23 *Владимиров В С* Уравнения математической физики – М Наука, 1967 – 436 с.
- 24 *Вальсрир В* Математическая теория борьбы за существование. М Наука, 1976. 285 с.
- 25 *Ворович И И, Горюков А С, Горстко А Б и др* Рациональное использование водных ресурсов бассейна Азовского моря. Математические модели. М Наука 1981 – 360 с.
- 26 *Галкин Л М, Судаков А Н* О выборе типа уравнений для прогностических моделей загрязнения // Оптимальное управление природными и экономическими системами. Новосибирск Наука, 1966. С 24-28.
- 27 *Галкин Л М* Задачи при построении математических моделей самоочищения водоемов и водоотгогов // Самоочищение и диффузия на внутренних водоемах – Новосибирск, 1980 – С 7–47
- 28 *Галкин Л М, Асафонова В Т* Влияние отравляющих веществ на динамику численности одноклеточных организмов в средах с ограниченными ресурсами / Моделирование переноса вещества и энергии в природных системах. Новосибирск Наука 1964. С 155-160
- 29 *Галлахер Л, Ховин Дж Ц* Распространение загрязнений в эстуарии / Математические модели контроля загрязнения воды. Пер с англ / Под ред А Дженмса. М Наука 1961. С 229–243
- 30 *Гарленд Дж Х Н* Нитрификация в реке Трент // Математические модели контроля загрязнения воды. М Мир 1961. С 201–228
- 31 *Гильдерман Ю И* Лекции по высшей математике для биологов. Новосибирск Наука, 1974 – 410 с.
- 32 *Гинка Н Л* Общая химия. Л Химия 1973. 727 с.
- 33 *Горстко А Б, Доминговский Ю А, Сурков Ф А* Модели управления эколого-экономическими системами. М Наука 1984. 199 с.
- 34 *Гребенча М К* Курс математического анализа. Ч 6. Звучание дифференциальных уравнений. Пер з рос. – К Рат шк. 1939 – 316 с.
- 35 *Гудменко Ф С* Дифференциальные уравнения. К Вид во КДУ 1958 – 208 с.
- 36 *Дажо Р* Основы экологии – М Прогресс, 1975 – 415 с.
- 37 *Дарвин Ч* Собрание сочинений. Т 1. Кн 1. М Л 1925.
- 38 *Девиш Г Б* Таблицы интегралов и другие математические формулы – М Наука, 1966 – 228 с.
- 39 *Дородницын А А* Математика и описательные науки. В кн Число и мысль – Вып 5 – М Знание, 1982 – С 6–15
- 40 *Демьянов Ю Э, Литвин Ф Ф* Применение математических методов и ЭВМ в биологии – М Изд во МГУ, 1981. 135 с.
- 41 *Дружинин Н И, Шишкин А И* Математическое моделирование и прогнозирование загрязнения поверхностных вод суши. Ц Гидрометеонздат 1984. 390 с.
- 42 *Засосов А В* Динамика численности промысловых рыб. М Пищевая промышленность, 1976. 312 с.
- 43 *Зенин А А, Белоусова Н В* Гидрохимический словарь – Л Гидрометеонздат, 1988 – 240 с.

- 44 *Ивахненко А. И. Мюллер И. А.* Самоорганизация прогнозирующих моделей – К. Техника, 1985 – 223 с.
- 45 *Иешко У. И.* Популяционная биология гельминтов рыб – Л. Наука, 1988 – 118 с.
- 46 *Израэль Ю. А.* Экология и контроль состояния природной среды – М. Гидрометеоиздат, 1984 – 560 с.
- 47 *Казначеев В. П.* Учение о биосфере – М. Знание, 1985 – 79 с.
- 48 *Камшилов М. М.* Биология в век научно-технического прогресса // Биология и современное научное познание – М., 1980 – С. 244.
- 49 *Камшилов М. М.* Биотический круговорот – М. Наука – 1970 – 160 с.
- 50 *Канторович Л. В. Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа – Изд. 5-е – М.–Л. Физматгиз, 1962 – 703 с.
- 51 *Климитов П. П. Конопов В. М.* Динамика подземных вод. Учеб. для техникумов – Изд. 2-е – М. Высш. шк., 1985 – 384 с.
- 52 *Константинова А. С.* Общая гидробиология – М. Высш. шк. 1986 – 472 с.
- 53 *Костицын В. А.* Эволюция атмосферы и климата – М. Наука, 1984 – 96 с.
- 54 *Косыжков Н. С. Гинер Э. Б. Смирнов М. М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики – М. Физматгиздат, 1962 – 767 с.
- 55 *Кранивиц В. Ф. Свиридов Ю. М. Тарко А. М.* Математическое моделирование глобальных биосферных процессов – М. Наука, 1982 – 272 с.
- 56 *Куташмедов Ю. А. Пошкарпов Г. Г. Корогодин В. И.* Принципы и методы оценки радиоемкости экологических систем. Эвристичность радиобиологии – К. Наук. думка 1988 – С. 109–115.
- 57 *Лаврик В. И. Савенков В. Н.* Справочник по конформным отображениям – К. Наук. думка, 1970 – 252 с.
- 58 *Лаврик В. И. Милотин О. Ф.* Про розсолювання ґрунтів при фільтрації з каналу в горизонтальну дрену // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1974 – № 10 – С. 901–905.
- 59 *Лаврик В. И.* О двух краевых задачах неустановившегося конвективной диффузии в случае фильтрации грунтовых вод со свободной поверхностью // Укр. мат. журн. 1976 – Т. 28 – № 5 – С. 677–681.
- 60 *Лаврик В. И.* Теоретичні дослідження процесів забруднення й засолення підземних вод // Вісн. АН УРСР. 1979 – № 2 – С. 63–70.
- 61 *Лаврик В. И.* О решении краевых задач конвективной диффузии растворимых веществ, когда скорость фильтрации усредняется по одной из криволинейных координат. Теория и расчеты фильтрации – К. Наук. думка 1980 – С. 83–96.
- 62 *Лаврик В. И.* Решение задач массопереноса водорастворимых веществ в случае зависимости коэффициента конвективной диффузии от скорости фильтрации / Препринт 81.18 – К. Ин-т математики АН УССР, 1981 – С. 3–24.
- 63 *Лаврик В. И.* Решение краевой задачи конвективной диффузии водорастворимых веществ с изменяющимся во времени граничным условием. Дифференциальные уравнения с частными производными в прикл. задачах – К. Ин-т математики АН УССР, 1982 – С. 68–69.
- 64 *Лаврик В. И.* Краевые задачи в области охраны подземных вод от загрязнения // Охрана окружающей среды от загрязнения промышленности выбросами ЦЭП. Л. Ленингр. лесотехн. акад., 1983 – С. 15–19.
- 65 *Лаврик В. И.* Расчет и прогнозирование физико-химического состава поверхностных вод с помощью математического моделирования // Охрана окружающей среды от загрязн. пром. выбросами ЦЭП. Л. Ленингр. лесотехн. академия 1985 – С. 9–13.
- 66 *Лаврик В. И. Дао Миль Нгюк В. Сяку А. П.* Математическое моделирование процессов качественного состава поверхностных и подземных вод при их взаимодействии / Препринт – К. Ин-т математики АН УССР, 1986 – 60 с.
- 67 *Лаврик В. И.* Математическое моделирование процессов распространения примесей при двумерной фильтрации из бассейнов сточных вод // Охрана окружающей среды от загрязн. пром. выбросами ЦЭП – Л. ТТА, 1986 – С. 10–14.

68 *Лаврик В И* Об одной математической модели определения и прогнозирования качественного состава поверхностных вод // Гидробиологич журнал – Т 20 – № 2 – К Наук думка, 1986 – С 88–91

69 *Лаврик В И* Математическое моделирование процессов формирования качества подземных вод при их взаимодействии с поверхностными водами / Междунар симпозиум по контролю и управлению ресурсами подземных вод – Дрезден 1987 – 12 с

70 *Лаврик В И Кислев Н И* Методологические аспекты математического моделирования экосистем / Научно-технический прогресс и биология – К Наук думка, 1988 – С 197–215

71 *Лаврик В И Фильчакова В П Яшин А А* Конформные отображения финико-топологических моделей – К Наук думка, 1990 – 374 с

72 *Лаврик В И Мержко А И, Сиренко Л А Тимченко В М* Экологическая емкость и ее количественная оценка // Гидробиол журнал – 1991 – № 3 – С 13–24

73 *Лаврик В И* Экологическая емкость и самоочищающая способность водных экосистем, питания их рыбы килькинской озерки // Ойкумена Укр еколог вісник – 1991 – № 4 – С 44–55

74 *Лаврик В И* Импациентное математическое моделирование и проблемы гидробиологического мониторинга, питания горня и практики / Ойкумена, Укр еколог вісник – 1992 – № 5–6 – С 82–91

75 *Лаврик В И* Роль математического моделирования в выработке оптимального взаимодействия между человеком и природой // Биология и практика: методолог и мировоззренческие аспекты – К Наук думка 1992 – С 62–72

76 *Лаврик В И* Математическое моделирование миграции и накопления радионуклидов в абиотических и биотических компонентах водной экосистемы // Радиоактивное и химическое загрязнение Днепра и его водохранилища после аварии на ЧАЭС – К Наук думка 1992 – С 169–178

77 *Лаврик В И* Основные направления развития математического моделирования применительно к изучению и прогнозированию состояния пресноводных экосистем // Развитие гидробиологических исследований в Украине – К Наук думка, 1993 – С 132–147

78 *Лаврик В И Никифорович Н А* Методические основы разработки информационно-экспертной системы для автоматизированной оценки состояния водных экосистем / Препринт К Ин-та гидробиологии АН Украины, 1993 – 37 с

79 *Лаврик В И Никифорович Н А* Вопросы математического моделирования процессов самоочищения подземных и поверхностных вод / Гидрометеорология. Вып 68 – К Наук думка 1994 – С 36–40

80 *Лаврик В И Никифорович Н А Билык А И* Математическое моделирование и прогнозирование динамики основных гидроэкологических показателей качества поверхностных вод // Гидробиолог журн – 1997 – Т 33 – № 5 – С 93–106

81 *Лаврик В И* Информационно-экспертная система оценки и прогнозирования качества природных экосистем / Гидробиолог журн – 1996 – Т 32 – № 2 – С 105–112

82 *Лаврик В И, Билык А И Никифорович Н А* Определение оптимального водно-солевого режима озер Ялпуг и Кузурдан с помощью математического моделирования // Гидробиолог журн – 1996 – Т 32 – № 4 – С 103–109

83 *Лаврик В И* Методы математического моделирования в экологии – К Фитосоциентр, 1998 – 131 с

84 *Лаврик В И Никифорович Н А* Математическое моделирование в гидробиологических исследованиях – К Фитосоциентр 1998 – 287 с

85 *Лаврик В И Давыдов О Н Брелицкий Л И* Некоторые концептуальные подходы к моделированию системы «паразит – хозяин» в условиях токсического загрязнения водной среды // Гидробиолог журнал 1998 – Т 34 – № 5 – С 104–111

86 *Лаврик В И* Основы математического моделирования процессов физико-химического и биологического самоочищения водных экосистем // Гидробиолог журн – 1999 – Т 35 – № 3 – С 15–39

87 *Лакш В Т* Биометрия – М Высшая шк., 1980 – 343 с

88 *Левич В И* Физико-химическая гидродинамика – М Физматгиздат, 1959 – 699 с

- 89 *Лейбин Б М* «Модели мира» и образ человека. Критический анализ идей Римского клуба. М: Наука, 1982 – 255 с
- 90 *Теонов А В* Математическое моделирование трансформации соединений фосфора в пресноводных экосистемах (на примере оз. Балатон) – М: Наука, 1986 – 152 с
- 91 *Логофет Д О* Что такое математическая экология. Математ. модели в экологии и генетике – М: Наука, 1981 – С. 8–17
- 92 *Лыков А В* Теория теплопроводности – М: Высшая шк, 1967 – 599 с
- 93 *Ляшко И И, Макаров В Л, Скоробогатько А А* Методы вычислений – К: Наук думка, 1977 – 406 с
- 94 *Ляшко И И, Великованенко И М, Лаврик В И, Мистецкий Г Е* Метод мажорантных областей в теории фильтрации – К: Наук думка, 1974 – 200 с
- 95 *Макаев В М, Коновалов И М* Гидравлика – Л: Речиздат, 1940 – 236 с
- 96 *Марри Дж* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. Пер с англ. – М: Мир, 1983 – 397 с
- 97 *Марчишин С М* Экологичный словарь-довдник. Основн. термины и понятия – К: Рідна мова, 1998 – 220 с
- 98 *Марчук Г Н* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды – М: Наука, 1982 – 304 с
- 99 *Маскет М* Течение однородных жидкостей в пористой среде. Пер с англ. – М: Л: Гостолтехиздат, 1949 – 628 с
- 100 Математические модели в экологии и генетике – М: Наука, 1981 – 176 с
- 101 Математические модели контроля загрязнения воды / Под ред. А. Джеймса – М: Мир, 1981 – 472 с
- 102 Математическое моделирование биогеоэотических процессов. М: Наука, 1985 – 126 с
- 103 Математические проблемы в биологии. Сб. статей под ред. Р. Беллмана. Пер с англ. – М: Мир, 1966 – 278 с
- 104 Методы математической биологии (в 8 книгах) – Кн. 1. Общие методы анализа биологических систем – К: Вища шк, 1980 – 239 с
- 105 Методы математической биологии (в 8 книгах) – Кн. 2. Методы синтеза алгебраических и вероятностных моделей биологических систем – К: Вища шк, 1981 – 312 с
- 106 Методы математической биологии (в 8 книгах) – Кн. 3. Методы синтеза динамических моделей биологических систем – К: Вища шк, 1981 – 327 с
- 107 *Медоуз Д Х, Медоуз Д Л, Рэндерс И и др.* Пределы роста. Пер с англ. – М: Изд-во МГУ – 207 с
- 108 *Мещуткин В В* Математическое моделирование популяций и сообществ водных животных – Л: Наука, 1971 – 196 с
- 109 Методы охраны подземных вод от загрязнения и истощения / Под ред. И. К. Гавич – М: Недра, 1985 – 320 с
- 110 Моделирование переноса вещества и энергии в природных системах – Новосибирск: Наука – 1984 с
- 111 Микробиология загрязненных вод. Пер с англ. / Под ред. Р. Митчеллапер – М: Медицина, 1976 – 323 с
- 112 *Моисеев Н Н* Математические задачи системного анализа – М: Наука, 1981 – 487 с
- 113 *Моисеев Н Н* Динамика биосферы и глобальные модели // Число и мысль – Вып. 5 – М: Знание, 1982 – С. 56–113
- 114 *Моисеев Н Н* Человек, среда, общество – М: Наука, 1982 – 240 с
- 115 *Моисеев Н Н, Александров В В, Турко А М* Человек и биосфера. Опыт системного анализа и эксперименты с моделями – М: Наука, 1985 – 271 с
- 116 *Моисеев Н Н* Экология человечества глазами математика – М: Молодая гвардия, 1988 – 254 с
- 117 *Одум Ю* Основы экологии – М: Мир, 1975 – 740 с
- 118 *Одум Ю* Экология. В 2-х т. Пер с англ. – М: Мир, 1986 – Т. 1 – 328 с, Т. 2 – 376 с

- 119 *О Коннор Дональд Дж Томпс Роберт В, ди Торо Доминик М* Экологические модели Системный подход к управлению водными ресурсами Пер с англ / Под ред А Бисваса – М Наука, 1965 – С 280–312
- 120 *Орлов Д Т* Модели эстуария Системный подход к управлению водными ресурсами Пер с англ / Под ред А Бисваса – М Наука, 1965 – С 246–279
- 121 *Ортега Дж, Луи У* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений Пер с англ / Под ред А А Абрамова – М Наука, 1966 – 288 с.
- 122 *Остривадкин М В* Об уравнении, относящемся к распределению теплоты внутри жидкости – Полн собр соч в 3-х т – К Изд-во АН УССР, 1959 – Т 1 – С 75–79
- 123 *Павловский Н Н* Неравномерное движение грунтовых вод – М Гостехиздат, 1930 – 58 с., (дальнейшее развитие вопроса) Л Кубуч 1932 – 80 с
- 124 *Патрашова А И Арутюнян Н Х* Диффузия солей при одномерной фильтрации // Изв ВНИИ – 1941 – 1 30 – С 64–77
- 125 *Полубаринова Кочина П Я* Теория движения грунтовых вод Изд 2 е – М Наука 1977 – 510 с
- 126 Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967) // Под ред П Я Полубариновой-Кочиной М Наука, 1967 545 с
- 127 *Раичико А И* Математическая теория диффузии в приложениях – К Наук думка 1981 – 396 с
- 128 *Раковський П С* Курс вищої математики - Харків Вид-во Харк держун ту, 1960 293 с
- 129 *Рамад Ф* Основы прикладной экологии воздействие человека на биосферу Пер с англ – Л Гидрометеоиздат, 1981 – 543 с
- 130 *Рахлин В К* Общество и живая природа Краткий очерк истории взаимодействия – М Наука, 1989 215 с
- 131 *Реймерс Н Ф* Экология Теория, законы, правила, принципы и гипотезы М Россия молодая, 1994 – 367 с
- 132 *Реймерс Н Ф* Природопользование Словарь-справочник – М Мысль, 1990 – 640 с
- 133 *Риксфс Р* Основы общей экологии – М Мир 1979 424 с
- 134 *Ринальди С* Моделирование процесса загрязнения рек // Теория систем в отношении к проблемам жизни окружающей среды / Под ред С Ринальди – К Вища шк, 1981 – С 153–178
- 135 *Роддигер И Д* Прогноз качества воды водосмов-приемников сточных вод – М Стройиздат, 1984 – 263 с
- 136 *Романенко В Д Окснюк О П Жуковский В Н Стольберг Ф В Лаврик В И* Экологическая оценка воздействия гидротехнического строительства на водные объекты – К Наук думка 1990 256 с
- 137 *Романовский Ю М, Степанова Н В Чернявский Д С* Математическая биофизика – М Наука 1984 – 304 с
- 138 *Рубин А Б, Пытьева Н Ф, Ризниченко Г Ю* Кинетика биологических процессов Учебн пособие – М Изд во МИ У, 1977 – 328 с
- 139 *Рубин А Б* Биофизика (в 2-х книгах) – Кн I Теоретическая биофизика М Высшая шк, 1987 – 319 с
- 140 *Саати Т Л* Математические модели конфликтных ситуаций М Сов радио, 1977 – С 47–53
- 141 *Самойленко А М Кривошей С А Перестюк А М* Дифференциальные уравнения Примеры и задачи К Вища шк, 1984 408 с
- 142 Самоочищение и диффузия во внутренних водоемах Новолибирск Наука 1980 187 с
- 143 *Свирижев Ю М* Математические модели в экологии Число и мысль – Вып 5 – М Знание, 1982 – С 16 55
- 144 *Свирижев Ю М* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии – М Наука, 1987 – 366 с
- 145 *Семевский Ф Н, Семенов С М* Математическое моделирование экологических процессов Л Гидрометеоиздат, 1982 – 280 с

- 146 Системный подход к управлению водными ресурсами / Под ред. А. Бисваса – М. Наука, 1985 – 392 с
- 147 Смит Дж. Модели в экологии. Пер. с англ. – М. Мир, 1976 – 184 с
- 148 Страшкраба М., Гнаук А. Пресноводные экосистемы. Математическое моделирование. Пер. с англ. – М. Мир, 1989 – 376 с
- 149 Сукачев В. Н. Биогеоценология и фитоценология // ДАН СССР – 1945 – Т. 47 – № 6 – С. 447–449
- 150 Сукачев В. Н. Основные понятия лесной биогеоценологии // Основы лесной биогеоценологии – М. Наука, 1964 – С. 5–49
- 151 Теория систем в приложении к проблемам защиты окружающей среды. Пер. с англ. / Под ред. С. Ринальди – К. Высшая шк., 1981 – 264 с
- 152 Торрилли Дж. И. М. Математические модели в физиологии растений. Пер. с англ. – К. Наук. думка, 1982 – 310 с
- 153 Тихонов А. И., Самарский А. А. Уравнения математической физики – М. Наука, 1966 – 724 с
- 154 Троицкая П. Факторная экология. Пер. с пол. – К. Вища шк., 1989 – 232 с
- 155 Федоров В. Д., Гильманов Т. Г. Экология – М. МГУ, 1980 – 464 с
- 156 Фишчаков П. Ф. Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями. В 2-х т. – К. Изд-во АН СССР, 1959–1960 – Т. 1 – 256 с, Т. 2 – 308 с
- 157 Фишчаков П. Ф. Справочник по высшей математике – К. Наук. думка, 1972 – 743 с
- 158 Форрестер Дж. Мировая динамика. Пер. с англ. – М. Наука, 1978 – 167 с
- 159 Франк Каменский Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике – М. Наука, 1967 – 491 с
- 160 Фрид Ж. Загрязнение подземных вод. М. Недра, 1981 – 304 с
- 161 Хатчинсон Д. Лимнология – М. Прогресс, 1969 – 593 с
- 162 Холт А. Д. и Фендлман Р. Л. Определение понятия системы. Исследования по общей теории систем – М. Прогресс, 1969 – С. 252–281
- 163 Хвляцкий М. И., Фролов И. И. Моделирование процессов интрузии в эстуариях и потемных водоносных горизонтах – М. Наука, 1988 – 144 с
- 164 Храмов С. С. Проблема окружающей среды в деятельности ООН – М. Наука, 1976 – 191 с
- 165 Шварц С. С. Эволюция биосферы и экологическое прогнозирование // Вестник АН УССР – М. Наука, 1976 – 2 – С. 61–72
- 166 Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука – М. Наука, 1978 – 418 с
- 167 Шиманский И. С. Математический анализ – К. Рад. школа, 1966 – 648 с
- 168 Яремчук Ф. П., Рудченко П. А. Алгебра и элементарные функции. Справочник. Изд. 2-е, доп. – К. Наук. думка, 1976 – 686 с
- 169 Anderson R. M. Population dynamics of the cestode *Caryophyllaeus lanceps* (Pallas, 1781) in the bream (*Abramis brama*) // *J. Anim. Ecol.* – 1974 – Vol. 72 – P. 305–321
- 170 Anderson R. M. Seasonal variation in the population dynamics of *Caryophyllaeus lanceps* // *Parasitology* – 1976a – Vol. 72 – P. 281–305
- 171 Anderson R. M. Dynamic aspects of parasite population ecology. *Ecological Aspects of Parasitology* – Ch. 21 – Amsterdam, 1976 – P. 431–461
- 172 Anderson R. M. The regulation of host population growth by parasites species // *Parasitology* – 1978 – Vol. 76 – P. 119–157
- 173 Anderson R. M. The influence of parasitic infection on the dynamics of host population growth // *Population Dynamics* / Ed. by R. M. Anderson, B. D. Turner, L. R. Taylor. Oxford, 1979 – P. 245–281
- 174 Bennett I. P., Rathbun R. F. Recreation in open-channel flow // *Geol. Surv. Profess. Pap.* 1972 – N 737 – P. 1–75
- 175 Boussinesq J. Recherches theoriques sur l'ecoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le debit des sources. *J. math. pures et appl.* – 1904 – 10, n. 1, 5–78 (Complement, 1904, № 4, 363–394)

176. Churchill M. A., Elmore H. L. The prediction of stream reaeration rates // J. Sanit. Eng. Div. Proc. ASCE.- 1962.- Vol. 88.- N 4.- P. 1-46.
177. Colt L. E. The computation and reporting of dissolved gas level // Water Res.- 1983.- Vol. 17.- N 8.- P. 841-849.
178. Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon.- Paris, 647 p.
179. Dupuit J. Etudes theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux.- Paris, 1863.- 304 p.
180. Givoglou E. C., Wallace I. R. Characterization of stream reaeration capacity: Rep. EPA-R2-72-012, US EPA, D.C., Oct. 1972.- 47 p.
181. Krebs Charles I. Ecology. The Experimental Analysis of Distribution and Abundance.- Harper Collins College Publishers, New York, 1996.- 801 p.
182. Lunghein W. B., Durum W. H. The aeration capacity of streams: US Geol. Surv. Circ. N 542. Peston (VA), 1967.- 6 p.
183. Lavrik V. I., Bilyk A. N., Nikiforovich N. A. Main Mathematical Models for the Simulation Modeling of Pollution Process in Surface and Underground Waters. Proceeding of the Second International IAWQ Specialized Conference and Symposia on Diffusive Pollution.- Brno and Prague, Czech Republic, August 13-18, 1995, Part II.- P. 303-307.
184. Lavrik V. I., Bilyk A. N., Nikiforovich N. A. Multichamber simulation modeling of water pollution control in the basin of the river Danube, Novi Sad, Jugoslavia, 20-23 June 1989, Theme 4. Experiences and measures of water quality control. P. 285-290.
185. Lavrik V. I., Bilyk A. N., Nikiforovich N. A. Multi-Chamber Simulation Modelling of Water Quality in Reservoir // Systems Analysis Modeling Simulation. 7(1990)8. Academic-Verlag Berlin.- P. 625-635.
186. Lavrik V. I., Oleynick A. Y. Theoretical investigation of heat and mass transfer during two-dimensional seepage of underground Waters // Textes des Communications presenters our Symposium sur Les Transferts de Chaleur et de Masse en Milieux Poreux, Toulouse 26.28 Aout 1980. Sujets 3-4, 12.- P. 1-11.
187. Lotka A. J. Elements of Mathematical Biology.- New York: Dover Publications Inc., 1956.- P. 88-94.
188. Lotka A. J. Elements of Physical Biology, Baltimore, Williams and Wilkins, 1925.- 460 p. (Reprinted as Elements of Mathematical Biology, New York, Dover, 1956).
189. Monod J. Recherches sur la Croissance des Cultures Bacteriennes.- Paris: Hermann, 1942.
190. Padden T. J., Gloyne E. F. Simulation of stream processes in model river: Rep, Neme-70-23. CRWR-72 Univ. of Texas. Austln (Tex.), 1971.- 36 p.
191. Pearl R., Reed L. I. On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation. - Proc. Nat. Acad. Sci., (Wash) 6, 1930.- P. 275-288.
192. Streeter H. W., Phelps E. B. A study of the pollution and natural purification of the Ohio River.- Bulletin N 146, U.S. Public Health Service, 1925.- P. 13-21.
193. Tsoivoiglou E. G., Wallace J. R. Characterization of stream reaeration capacity: Rep. EPA-R2-72-012, US EPA.D.C., Oct.- 1972.- 47 p.
194. Verhulst P. F. Notis sur la quela population suit dans son acroissement // Corresp. Math. Phys. 10, 1838.- P. 113-121.
195. Wang L. K., Vielkind D., Mu Nao Wang. Mathematical models of dissolved oxygen concentration in fresh water // Ecol. Model.- Vol. 5.- N 2.- P. 115-123.
196. Wilson G. T., Mcleod N. A critical appraisal of empirical equations and models for the prediction of the coefficient of reaeration of deoxygenation water // Water Res.- 1974.- Vol. 8.- N 6.- P. 341-366.

Зміст

Передмова	3
Розділ 1. ПРОБЛЕМИ ЕКОЛОГІЇ І МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ	
1.1. Біосфера та актуальність проблеми охорони навколишнього природного середовища	6
1.2. Екологічний підхід до вивчення навколишнього середовища за інтенсивного антропогенного впливу	8
1.3. Основні принципи математичного та імітаційного моделювання	11
1.4. Системний підхід до побудови математичних моделей	17
Розділ 2. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ЕКОЛОГІЇ	
2.1. Поняття змінної величини та функції	22
2.1.1. Основні поняття та означення	22
2.1.2. Способи задання функції	24
2.2. Лінійна функціональна залежність	26
2.2.1. Означення лінійної функції, її графік	26
2.2.2. Застосування в екології	27
2.3. Пряма і обернена пропорційна залежності	29
2.3.1. Означення, основні формули, графіки	29
2.3.2. Застосування в екології, модель типу «хижак – жертва»	31
2.4. Дробово-лінійна функція. Рівняння Міхаеліса–Ментен	31
2.4.1. Означення і формула	31
2.4.2. Рівняння Міхаеліса–Ментен	32
2.5. Степенева функція	33
2.5.1. Означення, формула і графіки	33
2.5.2. Застосування в екології	34
2.6. Показникова та логарифмічна функції, їх застосування до опису розмноження популяцій	35
2.6.1. Означення, формули і графіки	35
2.6.2. Приклади застосування в екології	37
2.7. Тригонометричні функції та їх застосування до моделювання періодичних процесів	39
2.7.1. Означення та графіки	39
2.7.2. Основні співвідношення	43
2.7.3. Моделі періодичних процесів	45
Розділ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ	
3.1. Поняття похідної та її застосування до вивчення законів природи, операції диференціювання та інтегрування	48
3.1.1. Задачі, що приводять до поняття похідної	48
3.1.2. Означення похідної та невизначеного інтегралу	50
3.1.3. Приклади застосування похідної до моделювання біологічних, хімічних і фізичних процесів	53
3.2. Побудова емпіричних формул, метод найменших квадратів	56
3.2.1. Постановка задачі, побудова емпіричної формули графічним методом	56
3.2.2. Побудова емпіричної формули методом найменших квадратів для моделювання лінійних процесів	58

3.2.3. Побудова емпіричної формули методом найменших квадратів для моделювання нелінійних процесів	61
3.2.4. Метод середніх величин	64
3.3. Загальні принципи моделювання екологічних систем за допомогою диференціальних рівнянь, стаціонарні розв'язки та їх стійкість	65
3.3.1. Загальний вигляд математичної моделі	66
3.3.2. Стійкість стаціонарних розв'язків	68
3.4. Моделювання динаміки чисельності окремих популяцій	72
3.4.1. Експоненціальний закон	72
3.4.2. Логістичне рівняння	75
3.5. «Жорсткі» та «м'які» математичні моделі динаміки популяцій	78
3.5.1. Дослідження найпростіших моделей	78
3.5.2. Оптимізація параметрів для «жорстких» і «м'яких» моделей	79
3.6. Динаміка біоценозів як наслідок міжвидових взаємовідносин	83
3.6.1. Основні типи взаємовідносин	83
3.6.2. Математичні моделі популяцій при взаємовідносинах «охижак – жертва»	85
3.6.3. Структура трофічної функції	88
3.7. Моделювання трофічного ланцюга	90
3.7.1. Концептуальна модель трофічного ланцюга	90
3.7.2. Математична модель трофічного ланцюга	92
3.7.3. Математичні моделі спрощеного трофічного ланцюга водної екосистеми	92
3.8. Моделювання системи «паразит – хазяїн» в умовах токсичного забруднення водного середовища	96
3.8.1. Актуальність проблеми моделювання	96
3.8.2. Побудова простих моделей	97
3.8.3. Побудова складних моделей	100

Розділ 4. ПРОБЛЕМА МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ФУНКЦІОНУВАННЯ ВОДНИХ ЕКОСИСТЕМ

4.1. Основні принципи та особливості математичного моделювання гідроекологічних процесів	103
4.1.1. Характерні особливості водних екосистем	103
4.1.2. Основні задачі гідроекології	105
4.2. Моделювання абіотичних процесів: математичні моделі водного та гідрохімічного режимів	107
4.2.1. Концептуальна модель гідрохімічного режиму	107
4.2.2. Побудова просторової і багатокамерної моделей	110
4.2.3. Приклади чисельних розрахунків	115
4.2.4. Побудова трикомпонентної імітаційної моделі	117
4.2.5. Моделювання процесів забруднення підземних вод	120

Розділ 5. КИСНЕВИЙ РЕЖИМ І ДЕСТРУКЦІЯ ОРГАНІЧНИХ РЕЧОВИН. МОДЕЛЬ РК–БПК

5.1. Математичні моделі динаміки РК і БПК	129
5.1.1. Модель Фелпса–Стрітера	129
5.1.2. Багатокамерна двокомпонентна модель	130
5.2. Визначення невідомих параметрів моделі	137
5.2.1. Визначення сталої неконсервативності	137
5.2.2. Визначення концентрації насичення	138
5.2.3. Емпіричні формули для визначення коефіцієнта аерації	139
5.2.4. Модель Фелпса–Стрітера для відкритих систем	141

Розділ 6. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ ЕКОСИСТЕМ

6.1. Загальний вигляд математичної моделі динамічної системи з розподіленими характеристиками.....	144
6.2. Побудова моделей масопереносу в нерухомому та рухомому середовищах	145
6.3. Одновимірні моделі розповсюдження речовини в нерухомому середовищі	149
6.3.1. Стационарна модель молекулярної дифузії без джерел і перетворень	149
6.3.2. Нестационарна молекулярна дифузія консервативних речовин	151
6.3.3. Стационарна модель молекулярної дифузії з процесами перетворення речовини	156
6.3.4. Нестационарна молекулярна дифузія неконсервативних речовин	160
6.4. Одновимірні моделі розповсюдження речовини в рухомому середовищі	167
6.4.1. Стационарна модель конвективної дифузії без джерел і перетворень	168
6.4.2. Стационарна модель конвективної дифузії неконсервативних речовин ..	170
6.4.3. Нестационарна конвективна дифузія неконсервативних речовин	171
6.5. Дослідження процесу біологічного очищення стічних вод за допомогою математичного моделювання	175
6.5.1. Побудова концептуальної і математичної моделей	175
6.5.2. Верифікація математичної моделі	178
6.5.3. Проведення імітаційного експерименту	182

Розділ 7. ІМІТАЦІЙНЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ПРОБЛЕМИ ГІДРОЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ: ПИТАННЯ ТЕОРІЇ І ПРАКТИКИ

7.1. Пріоритети в екології.....	184
7.2. Наукові основи гідроекологічного моніторингу	185
7.3. Інформаційно-експертна система оцінювання стану водних об'єктів – основний елемент гідроекологічного моніторингу	189
7.4. Імітаційне математичне моделювання – важлива складова інформаційно-експертної системи.....	191

Література	193
-------------------------	-----

Навчальне видання

Володимир Іванович ЛАВРИК

**МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОЛОГІЇ**

Навчальний посібник

Редактор *Т. О. Зарембо*

Художнє оформлення *Н. В. Михайличенко*

Технічний редактор *Т. М. Новикова*

Верстка *Г. Г. Пузиренка*

Коректор *І. Г. Ярошенко*

Підписано до друку 04.04.2002 р. Формат 60×84¹/₁₆.
Гарнітура Times New Roman Папір офсет № 1 Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 11,86 Обл.-вид. арк. 12,75 Зам. 2-54

Видавничий дім «КМ Академія»
Свідоцтво про реєстрацію № 770 від 15.01.2002 р.
Друкарня НаУКМА

Адреса видавництва та друкарні:
04070, Київ, вул. Сковороди, 2.
Тел./факс (044) 416-60-92, 238-28-26.

Лаврик В. І.

Л13 **Методи математичного моделювання в екології: Навч. посіб. для студ. екол. і біол. спец. вищ. навч. закл.- К.: Вид. дім «КМ Академія», 2002.– 203 с.**

ISBN 966-518-029-0

У посібнику розглядаються як найпростіші математичні моделі, що будуються за допомогою основних елементарних функцій, так і більш складні моделі, побудовані на основі апарату теорії диференціальних рівнянь. Значне місце в посібнику відведено питанням кінетики біологічних і хімічних процесів, а також моделюванню гідрохімічного та кисневого режимів водних екосистем, процесам молекулярного та турбулентного масопереносу.

ББК 20.1в6я73