Н. А. ПЛОХИНСКИЙ

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

НОВОСИБИРСК
1960

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЦИТОЛОГИИ И ГЕНЕТИКИ

Н. А. ПЛОХИНСКИЙ

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Под редакцией
члена-корреспондента АН СССР
Н. П. ДУБИНИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР
НОВОСИБИРСК
1960

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие биометрии за последние десятилетия привело к разработке особой системы анализа результатов экспериментов и наблюдений, получившей у нас название *дисперсионного анализа**.

Основы дисперсионного анализа были разработаны английским ученым Р. А. Фишером (R. A. Fischer) и опубликованы в его книге «Statistical methods for research workers» (1925), выдержавшей к 1954 г. уже 12 изданий**.

Этот новый метод оказался столь плодотворным и общим, что появилась необходимость в объединении усилий ученых разных стран по его дальнейшей разработке.

В 1955 г. состоялось два международных совещания по вопросам биометрии и дисперсионного анализа — в Бразилии и во Франции.

Биологическое общество, входящее в качестве секции в Международный союз биологических наук, организовало в Бразилии международный симпозиум, посвященный роли биометрической техники в биологических исследованиях, в котором участвовали 98 ученых разных стран.

Еще более интересным был международный коллоквиум, проведенный в Париже в июле 1955 г., посвященный вопросам многофакторного дисперсионного анализа. На нем было заслушано и обсуждено 26 сообщений, в том числе доклады ученых разных стран, специально занимающихся усовершенствованием методов дисперсионного анализа. Были доклады, касавшиеся и чисто биологических тем: о применении дисперсионного анализа к явлениям биологической изменчивости и о применении дисперсионного анализа к изучению смертности.

Такое развитие методов дисперсионного анализа вызвало

---

* В английской терминологии — analysis of variance, в немецкой — Varanzanalyse, во французской — analise pactorielle.

** Имеется русский перевод: Р. А. Фишер, Статистические методы для исследователей, пер. с англ. Перегудова, 1958.

появление новых понятий и способствовало усовершенствованию практических приемов прикладной биологии в области растениеводства, зоотехнии, генетики

Особенно эффективным во многих странах за последнее время стало новое понятие — «наследуемость»*, являющееся типичным понятием дисперсионного анализа это та доля общего фенотипического разнообразия признака, которая вызвана разнообразием наследственных задатков по данному признаку в изучаемой группе особей при определенных условиях

Идеи дисперсионного анализа повлияли и на методику некоторых практических приемов, например, на методику испытания производителей по потомству, которая в своих последних вариантах включает учет наследуемости селекционных признаков

Кроме указанной работы Р А Фишера, из литературы по дисперсионному анализу, вышедшей за границей, можно рекомендовать следующие работы

1 R A Fischer, The design of experiments, 1935,
2 G Snedecor, Statistical Methods 5-th Edition, 1956,
3 O Kempthorne, An Introduction to Genetic Statistics, 1957,
4 Erna Weber, Grundriss der Biologischen Statistics 3-tte Auflage, 1957,
5 H Ruther, G Specht, Feldversuch, 1956

В Советском Союзе первое описание основ дисперсионного анализа было сделано Н Ф Деревицким в дополнительных главах к учебнику В Иогансена «Элементы точного учения об изменчивости и наследственности», перевод которого у нас вышел в 1933 г.

Затем в 1938, 1939 и 1940 гг вышли книги Ю Л Поморского «Статистический анализ комплекса признаков», «Новейшие методы вариационной статистики» и «Методы статистического анализа экспериментальных данных», в которых не только излагаются в популярной форме методы Фишера но и даются описания новых работ автора по дисперсионному анализу Эти работы Ю Л Поморского стали настольным пособием для всех советских ученых, применяющих в своих работах дисперсионный анализ

В 1947 г была опубликована книга В И Романовского «Применение математической статистики в опытном деле», в которой излагаются принципы и приемы дисперсионного анализа и, в частности, показано применение метода случайных

* В английской терминологии — heritability

блоков, метода латинского квадрата и построение комплексного опыта. Кроме того, в этой работе В. И. Романовский и некоторые обычные приемы биометрии, например, сравнение средних величин, предлагает в форме, которая целиком основывается на идеях дисперсионного анализа.

В 1948 г. вышло пособие В. Н. Перегудова «Статистические методы обработки данных полевого опыта», в котором на многочисленных примерах показаны различные приемы дисперсионного анализа в растениеводстве и, в частности, подробно описаны способы сравнения частных средних.

После 1948 г. изложение дисперсионного анализа у нас давалось только в технической литературе, так как в технике этот метод с большим успехом применяется при анализе результатов лабораторных работ и при массовом контроле качества продукции. Из таких изданий, интересных для биологов, можно указать труд советского ученого А. М. Длина «Математическая статистика в технике», третье издание которого вышло в 1958 г.

Предлагаемая читателю работа имеет целью изложить элементарные основы дисперсионного анализа с учетом интересов и математической подготовки биологов, зоотехников и растениеводов.

В книге излагаются способы построения и анализа однофакторных, двухфакторых и трехфакторных равномерных, пропорциональных и неравномерных, рэндомизированных дисперсионных комплексов при изучении количественных и качественных признаков.

По дисперсионному анализу качественных признаков и по изучению особенностей неравномерных комплексов в книге приведены оригинальные работы автора.

Для усвоения описываемых в книге приемов дисперсионного анализа требуется знакомство с обычными методами биометрии (вариационной статистики): вычисление средних величин и показателей разнообразия, особенно среднего квадратического отклонения для малых групп, нахождение ошибок репрезентативности и определение достоверности выборочных величин, вычисление показателей статистической связи и особенно корреляционного отношения, построение вариационных рядов, корреляционных решеток и обработка их по методу произведений и по методу сумм при анализе многочисленных групп.

Изложение сущности и приемов дисперсионного анализа в предлагаемой читателю книге имеет некоторые особенности, касающиеся терминологии, заключительной сводки результатов и некоторых других деталей метода.

Необходимость унифицировать терминологию дисперсионного анализа вызывается тем обстоятельством, что основные термины этого метода — дисперсия, варианса, девиата — различными авторами прилагаются к различным величинам: или к сумме квадратов центральных отклонений, или к этой сумме, деленной на число степеней свободы.

Величина

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma (V - M)^2}{\nu}$$

будет нами называться девиатой в соответствии с английским термином deviation (отклонение) или с французским déviation (отклонение), так как при этом унифицируются термины, связанные с величиной среднего квадратического отклонения, носящего английское название standard deviation.

По аналогичным причинам сумма квадратов центральных отклонений $C = \Sigma\ (V - M)^2$, являющаяся первичной мерой разнообразия, изменчивости, рассеяния признака, будет называться дисперсией, что соответствует английскому термину dispersion (рассеивание, разбросанность) или французскому — dispersement (рассеяние).

Заключительная сводка дисперсионного анализа, даваемая в форме особой таблицы, у подавляющего большинства авторов по существу просто копирует таблицы, приведенные в упоминавшейся работе Фишера. Между тем, современное развитие дисперсионного анализа позволяет значительно углубить сводку, включив в нее не только показатели достоверности влияний, но также и показатели степени влияния факторов, их сочетаний и суммарного действия на результативный признак. В настоящей книге в соответствии с этим сводные таблицы даются в более расширенной форме.

ОСНОВЫ МЕТОДА

Сущность дисперсионного анализа состоит в изучении статистических влияний одного или нескольких факторов на результативный признак.

Результативный признак (y) это признак, который изучается как результат статистического влияния факторов: организованных в исследованиях (x) и неорганизованных (z).

Факторы — это любые воздействия или состояния, разнообразие которых может так или иначе отражаться на разнообразии результативного признака.

Под статистическим влиянием факторов в дисперсионном анализе понимается отражение в разнообразии результативного признака того разнообразия изучаемых факторов, которое организовано в исследовании.

Под разнообразием мы будем понимать наличие неодинаковых значений каждого признака у разных особей, объединенных в группу.

Разнообразие группы особей, по изучаемому признаку может иметь разную степень, которая обычно измеряется показателями разнообразия (или «изменчивости»): лимитами, средним квадратическим отклонением, коэффициентом вариации.

В дисперсионном анализе степень разнообразия индивидуальных и средних значений признака измеряется и сравнивается особыми способами, составляющими специфику этого общего метода.

Организация факторов заключается в том, что каждому изучаемому фактору придается несколько значений. В соответствии с этими значениями каждый фактор разбивается на несколько градаций; для каждой градации подбирается по принципу случайной выборки, несколько особей, у которых впоследствии и измеряется величина результативного признака.

Организация факторов может осуществляться путем подбора опытных и контрольных групп для последующего проведения эксперимента или путем привлечения первичных материалов ранее проведенных наблюдений.

Для того, чтобы выяснить степень и достоверность влияния изучаемых факторов, надо измерить и оценить ту часть общего разнообразия, которая вызывается этими факторами.

Делается это при помощи двух величин: дисперсии и девиаты.

Дисперсией мы будем называть и само наличие разнообразия в группе и первичную меру, которая определяет степень этого разнообразия. Дисперсия как первичная мера разнообразия равна сумме квадратов центральных отклонений:

$$C = \Sigma D^2.$$

Общая дисперсия признака

$$C_y = \Sigma (V - M_0)^2 = \Sigma D_y^2.$$

Здесь V — вариант, отдельное значение результативного признака,

M_0 — общая средняя по всему комплексу.

Общее разнообразие результативного признака всегда больше того разнообразия, которое связано со статистическим влиянием организованных факторов. Происходит это потому, что ни в одном исследовании нельзя освободиться от действия всего множества остальных факторов, так или иначе влияющих на изменение результативного признака; во многих исследованиях этого и не требуется.

Поэтому при проведении дисперсионного анализа *общая дисперсия признака* C_y в изучаемой группе расчленяется на дисперсию, вызванную организованными факторами, или *факториальную дисперсию* (*частная дисперсия*) C_x, и дисперсию, вызванную остальными, неорганизованными в данном опыте факторами, или *случайную дисперсию* (*остаточная дисперсия*) C_z, причем сумма факториальной и случайной дисперсий всегда равна общей дисперсии:

$$C_x + C_z = C_y;$$

факториальная дисперсия равна

$$C_x = \Sigma (M_x - M_0)^2 = \Sigma D_x^2,$$ *

---

* С учетом числа вариантов, для которых рассчитана каждая средняя M_x эта формула примет следующий вид

$$C_x = \Sigma n_x (M_x - M_0)^2 = \Sigma n_x D_x^2.$$

а случайная дисперсия

$$C_z = \Sigma (V - M_x)^2 = \Sigma D_z^2,$$

где M_x —частная средняя результативного признака по каждой отдельной градации организованных факторов.

В дисперсионном анализе используется свойство суммы квадратов центральных отклонений, заключающееся в том, что если несколько полностью независимых источников разнообразия действуют одновременно и создают общее разнообразие признака, то сумма частных дисперсий, измеряющих частные влияния, всегда равна общей дисперсии, характеризующей общее разнообразие признака, возникшее под действием всех источников разнообразия.

$$\Sigma D_1^2 + \Sigma D_2^2 + \ldots \Sigma D_n^2 = \Sigma D_0^2.$$

Если взять отношения частных дисперсий к общей, то сумма всех таких отношении (долеи или процентов) будет равна единице, или 100%.

Каждое отношение будет показывать долю участия отдельного фактора в формировании общего разнообразия результативного признака. Эти отношения частных дисперсий к общей и принимаются в дисперсионном анализе за показатели степени статистического влияния на результативный признак факторов как организованных в опыте — $\eta_x^2 = \frac{C_x}{C_y}$, так и неорганизованных $-\eta_z^2 = \frac{C_z}{C_y}$. При этом

$$\eta_x = \sqrt{C_x C_y}$$

есть корреляционное отношение — обычный показатель криволинейной связи двух признаков.

Дисперсия, как показатель разнообразия, зависит от числа особей в группе. Для определения степени влияния факторов это обстоятельство не имеет значения. Для других же целей, в частности для установления достоверности влияния факторов, обнаруженного при выборочном исследовании, необходим показатель, свободный от указанной зависимости, допускающий сравнение групп, различных по числу входящих в них элементов Таким показателем является девиата.

Д е в и а т о й мы будем называть дисперсию, приходящуюся на один элемент свободного разнообразия или на одну степень свободы. Девиата равна сумме центральных отклонений, деленной на число степеней свободы:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma D^2}{\nu},$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma (V - M_0)^2}{\nu_y},$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma (M_x - M_0)^2}{\nu_x},$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\Sigma (V - M_x)^2}{\nu_z}.$$

Здесь σ_y^2 — общая девиата по всему комплексу;

σ_x^2 — частная девиата по организованным факторам, или факториальная девиата;

σ_z^2 — *частная девиата по неорганизованным* факторам, или случайная девиата;

ν — число степеней свободы;

D — центральное отклонение,

M_x, M_0 — частная и общая средние.

Корень квадратный из девиаты $\left(\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma D^2}{\nu}}\right)$ есть обычный показатель математической статистики — среднее квадратическое отклонение.

Девиаты используются в дисперсионном анализе для определения достоверности влияния, обнаруженного в выборочном исследовании. Достоверность влияния фактора определяется отношением факториальной девиаты к случайной девиате:

$$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}.$$

Если это отношение равно или больше определенной стандартной величины, влияние считается достоверным с определенной степенью вероятности. Стандартные отношения девиат определяются по специальным таблицам, приведенным в приложении.

Значение отдельных приемов дисперсионного анализа можно показать на следующем упрощенном примере.

Изучается действие на результативный признак y (например, *рост, продуктивность, плодовитость, размеры, выживаемость* и т. д.) двух факторов A и B. Каждый фактор берется в двух градациях: A_1 и A_2, B_1 и B_2. Для обоих факторов первая градация — это слабая степень, вторая — сильная (например, низкая и высокая температура, слабая и сильная влажность, малая и большая доза химического или биологического препарата, различные условия кормления, двукратная и трехкратная дойка и т. д.).

Для каждой из четырех градаций двух факторов — A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2 по способу случайной выборки выбрано по две особи; у всех восьми особей измерен в определенное время результативный признак; результаты записаны в виде статистического комплекса, показанного в табл. 1.

Таблица 1

Градации первого фактора	A_1		A_2	
Градации второго фактора	B_1	B_2	B_1	B_2
Варианты результативного признака	9, 11	3, 5	1, 3	7, 9

При анализе подобных комплексов обычно решаются два основных вопроса:

1) имеют ли значение для результативного признака изучаемые факторы в их общем суммарном действии;

2) какова роль каждого фактора в отдельности и в их сочетаниях.

Знакомство с приемами дисперсионного анализа лучше начинать с разрешения первого, более простого вопроса. Для этой цели можно принять, что действует один фактор x, имеющий все указанные градации, которые организованы в исследовании для всех изучающихся факторов.

В приведенном примере этот обобщенный статистический комплекс примет вид, показанный в табл. 2.

Таблица 2

Градации факторов	x_1	x_2	x_3	x_4
Варианты результативного признака	9, 11	3, 5	1; 3	7, 9

Анализ полученного комплекса проводится по следующим этапам.

Нахождение общей дисперсии C_y. Как уже указывалось $C_y = \Sigma(V - M_0)^2$

В приведенном примере сумма всех вариантов равна $\Sigma V = 9 + 11 + 3 + 5 + 1 + 3 + 7 + 9 = 48$, число вариантов $n = 2 \times 4 = 8$. Следовательно, общая средняя будет равна

$$M = \frac{\Sigma V}{n} = \frac{48}{8} = 6$$

Сумма квадратов отклонений каждого варианта от общей средней будет равна

$$\Sigma (V - M_0)^2 = (9-6)^2 + (11-6)^2 + (3-6)^2 + (5-6)^2 + (1-6)^2 + (3-6)^2 + (7-6)^2 + (9-6)^2 = 9 + 25 + 9 + 1 + 25 + 9 + 1 + 9 = 88$$

Это и есть общая дисперсия всего комплекса вариантов $C_y = 88$.

Нахождение факториальной дисперсии C_x. Для выяснения величины факториальной дисперсии надо рассчитать средние результативного признака для каждой градации, затем из каждой такой частной средней вычесть общую среднюю комплекса, полученные центральные отклонения возвести в квадрат, каждый квадрат помножить на соответствующую частоту градации и полученные произведения сложить. Получится искомая факториальная дисперсия

$$C_x = \Sigma n_x D_x^2 = \Sigma n_x (M_x - M_0)^2$$

Для приведенного примера все эти действия собраны в табл. 3.

Таблица 3

Градации факторов	x_1	x_2	x_3	x_4	
Варианты результативного признака	9, 11	3, 5	1, 3	7, 9	$n=8$
Суммы вариантов	20	8	4	16	$\Sigma V = 48$
Частные средние M_x	10	4	2	8	$M_0 = 6$
Центральные отклонения ряда средних $(M - M_0)$	+4	−2	−4	+2	
Квадраты центральных отклонений $D_x^2 = (M_x - M_0)^2$	16, 16	4, 4	16, 16	4, 4	$C_x = 80$

Полученные квадраты центральных отклонений надо для сравнимости дисперсий подставить вместо каждого варианта, поэтому центральных отклонений взято столько, сколько вариантов имеется в каждой градации. Сумма всех этих значений и есть факториальная дисперсия $C_x = \Sigma D_x^2 = 80$.

Нахождение степени влияния фактора производится путем деления факториальной дисперсии на общую:

$$\eta_{yx}^2 = \frac{C_x}{C_y} = \frac{80}{88} = 0{,}91.$$

Это значит, что 91% всего разнообразия результативного признака определяется разнообразием организованных факторов. Эта величина является показателем степени статистического влияния данного фактора на результативный признак.

Нахождение случайной дисперсии C_z. Нахождение случайной дисперсии $C_z = \Sigma (V - M_x)^2 = \Sigma D_z^2$ для приведенного примера показано в табл. 4.

Таблица 4

Градации факторов	x_1	x_2	x_3	x_4	
Варианты результативного признака	9; 11	3; 5	1; 3	7; 9	
Частные средние M_x	10	4	2	8	
Частные центральные отклонения $D_z = V - M_x$	−1; +1	+1; −1	−1; +1	−1; +1	
Квадраты частных центральных отклонений $D_z^2 = (V - M_x)^2$	1; 1	1; 1	1; 1	1; 1	$C_z = 8$

Варианты первой градации 9 и 11 имеют центральные отклонения от своей частной средней ($M_x = 10$), равные −1 и +1. Квадраты центральных отклонений равны +1 и +1, а $\Sigma D_z^2 = 1 + 1 = 2$.

Для второй градации $\Sigma D_z^2 = 1 + 1 = 2$, для третьей градации $\Sigma D_z^2 = 1 + 1 = 2$ и для четвертой градации $\Sigma D_z^2 = 1 + 1 = 2$.

Сумма квадратов центральных отклонений вариантов от частных средних для всех четырех градаций равна 8. Это и есть случайная дисперсия.

Случайная дисперсия в сумме с факториальной дисперсией составляет общую дисперсию $C_x + C_z = 80 + 8 = 88 = C_y$.

Степень влияния неорганизованных факторов

$$\eta_{z}^{2} = \frac{C_z}{C_y} = \frac{8}{88} = 0,09.$$

Это значит, что влияние неорганизованных факторов в приведенном примере составляет всего 9% от общего влияния всех факторов.

Таким образом в приведенном примере выявилась степень влияния факторов на разнообразие результативного признака в следующих размерах:

влияние организованного фактора (объединенное действие двух факторов — A и B)	91%
влияние факторов, неорганизованных в данном опыте	9 »
влияние всех факторов	100»

Такие результаты указывают на большую силу влияния изучаемого фактора.

Графическое изображение влияния фактора при однофакторном комплексе можно выполнить следующим образом: на оси абсцисс наносят на равных расстояниях столько точек, сколько имеется градаций фактора. Из каждой такой точки по оси ординат отмеряется расстояние, пропорциональное

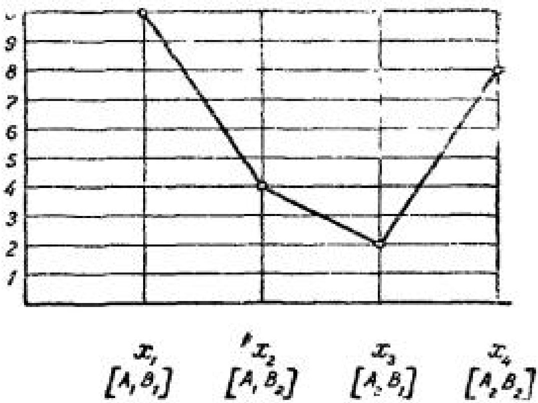

Рис. 1. График влияния фактора (объединенного) на результативный признак

значению частной средней для данной градации фактора. Полученные точки соединяются прямыми линиями.

Для разбираемого примера графическое изображение влияния на результативный признак фактора x представлено на рис. 1.

График показывает, что при изменении фактора от x_1 до x_4 результативный признак сначала уменьшается, потом возрастает. Такое влияние одного необъединенного фактора встречается редко. Но в данном случае градациями фактора x являются четыре комбинации градаций двух факторов. Поэтому раскрытие причин такого сложного влияния необходимо производить, восстановив двухфакторный статистический комплекс, что и будет показано в соответствующем разделе. А теперь продолжим изучение однофакторного комплекса.

Определение достоверности влияния организованного фактора. Для определения достоверности влияния организованного фактора необходимо рассчитать факториальную и случайную девиаты, взять отношение их и по специальной таблице определить достоверность полученного отношения. Для получения девиаты надо дисперсию разделить на число степеней свободы, которые в однофакторном комплексе определяются следующим образом:

а) для общей дисперсии число степеней свободы равно числу значений результативного признака без одного:

$$\nu = n - 1, \qquad 8 - 1 = 7;$$

б) для факториальной дисперсии число степеней свободы равно числу градаций фактора без одного:

$$\nu_x = r_x - 1, \qquad 4 - 1 = 3;$$

в) для случайной дисперсии число степеней свободы равно числу значений результативного признака без числа градаций фактора:

$$\nu_z = n - r_x, \qquad 8 - 4 = 4;$$

г) суммы степеней свободы частных дисперсий должны быть равны числу степеней свободы общей дисперсии:

$$\nu_x + \nu_z = \nu_y, \qquad 3 + 4 = 7.$$

В приведенном примере девиаты имеют следующие значения:

факториальная девиата $\sigma_x^2 = \frac{80}{3} = 26{,}7,$

случайная девиата $\sigma_z = \frac{8}{4} = 2{,}0.$

Для получения показателя достоверности влияния организованного фактора надо найти отношение факториальной девиаты к случайной:

$$F_x = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} = \frac{26{,}7}{2} = 13{,}4\ .$$

Чтобы определить, достаточен ли полученный показатель для того, чтобы считать влияние организованного фактора достоверным, необходимо сравнить полученный критерий со стандартным отношением девиат при данных числах степеней свободы.

При данных числах степеней свободы ν_x и ν_z и при заданной вероятности того, что различие сравниваемых дисперсий не случайно, необходимо, чтобы отношение $\sigma_x^2 : \sigma_z^2$ было равно или больше определенного, стандартного отношения девиат. Например, если дисперсия по фактору x имеет три степени свободы, а по случайным факторам — четыре степени свободы ($\nu_x = 3$, $\nu_z = 4$), то стандартными отношениями их девиат будут следующие три числа: 6,6; 16,7; 56,1. Эти числа взяты из таблицы стандартных отношений девиат (см. приложение), которая составлена таким образом, что первое число соответствует вероятности $P_1 = 0{,}95$, второе — $P_2 = 0{,}99$ и третье — $P_3 = 0{,}999$.

В нашем примере критерий $F_x = 13{,}4$ и превышает первую степень вероятности, и приближается ко второй, что для многих исследований считается достаточным ($P > 0{,}95$). Это значит, что наблюденное в опыте влияние фактора не может быть объяснено случайными причинами, так как факториальная дисперсия оказалась достоверно больше случайной дисперсии.

Вследствие этого заключение о сильном влиянии фактора, изученного в выборке, можно перенести и на всю генеральную совокупность в соответствующих условиях.

В таблице стандартных отношений девиат в верхней строке для каждого столбца даны значения ν_1 — числа степеней свободы для первой девиаты, стоящей в числителе отношения и относящейся к факториальной дисперсии.

В левом столбце таблицы для каждой строки указаны значения ν_g — числа степеней свободы для каждой второй девиаты, стоящей в знаменателе отношения и относящейся к случайной дисперсии.

В каждой клетке таблицы приведено три значения стандартных отношений девиат, соответствующих трем указанным ступеням вероятности.

Таблица стандартных отношений девиат может быть использована также при сравнении обычных выборочных сигм. Для этого надо сигмы возвести в квадрат, бо́льшую девиату разделить на меньшую и полученный показатель сравнить со стандартными отношениями в соответствии с числами степеней свободы, которые в данном случае равны числу вариантов без одного.

В приведенном примере выяснено влияние на результативный признак суммарного действия двух факторов A и B, которое в целях упрощения было принято за действие одного фактора.

Установлено, что суммарное действие этих двух факторов на данный результативный признак очень велико и достоверно. Остались невыясненными два вопроса:

1. Каково значение каждого из этих факторов в отдельности при выравненном действии другого?

2 Каково значение различий их совместного действия при разных комбинациях градаций?

Для разрешения этих вопросов требуется развернутый статистический комплекс, показанный в табл. 5.

Таблица 5

Градации первого фактора . .	A_1		A_2		
Градации второго фактора . . .	B_1	B_2	B_1	B_2	
Варианты результативного признака	9; 11	3; 5	1; 3	7; 9	$n=8$ $\Sigma V=48$ $M=6$

Такой комплекс называется **двухфакторным**.

Решение двухфакторного статистического комплекса проводится по следующим этапам.

Нахождение общей дисперсии (производится так же, как и при однофакторном комплексе):

$$C_y = (9-6)^2 + (11-6)^2 + (3-6)^2 + (5-6)^2 + (1-6)^2 + \\ + (3-6)^2 + (7-6)^2 + (9-6)^2 = 88.$$

Нахождение случайной дисперсии (производится так же, как и для однофакторного комплекса):

а) частные средние по четырем градациям:

$$10;\ 4;\ 2;\ 8;$$

б) отклонение каждого варианта от своей частной средней:

$$-1;\ +1;\ -1;\ +1;\ -1;\ +1;\ -1;\ +1;$$

в) квадраты этих отклонений:

$$+1;\ +1;\ +1;\ +1;\ +1;\ +1;\ +1;\ +1;$$

г) сумма квадратов этих отклонений:

$$C_z = 8.$$

Нахождение дисперсии суммарного действия для организованных факторов показано в табл. 6.

Таблица 6

Градации первого фактора	A_1		A_2		
Градации второго фактора	B_1	B_2	B_1	B_2	
Варианты результативного признака	9; 11	3; 5	1; 3	7; 9	$n=8$ $\Sigma V=48$
M_x	10	4	2	8	$M=6$
D_x	+4	−2	−4	+2	
D_x^2	16; 16	4;4	16; 16	4; 4	$C_x=80$

В последней строке величины D_x^2 надо взять в каждой градации столько раз, сколько вариантов имеется в этой градации. Делается это для того, чтобы можно было сравнивать дисперсии, полученные из разного числа слагаемых.

Нахождение частных факториальных дисперсий отдельно по каждому фактору проводится следующим образом.

Дисперсия по фактору A измеряется степенью разнообразия частных средних по градациям этого фактора:

$$C_A = \Sigma n_A (M_A - M_0)^2.$$

В приведенном примере фактор A имеет две градации: A_1 и A_2. Для каждой такой градации имеется одинаковая комбинация градаций другого фактора: B_1 и B_2.

Это обстоятельство дает право считать выравненным действие фактора B для разных градаций фактора A.

Для каждой градации фактора A имеется по четыре варианта. *Если сумму вариантов разделить на их число, то по* каждой градации мы получим частные средние M_A.

Для получения дисперсии таких средних надо взять сумму квадратов их отклонений от общей средней (взвешенных численностью градации фактора), что и показано в табл 7.

Таблица 7

Градации первого фактора	A_1		A_2		
Градации второго фактора	B_1	B_2	B_1	B_2	
Варианты результативного признака V	9; 11	3; 5	1; 3	7; 9	
Градация фактора A	A_1		A_2		
Варианты по градациям фактора A	9; 11; 3; 5		1; 3; 7; 9		$n=8$ $\Sigma V=48$
Сумма вариантов по градациям фактора A	28		20		
Частные средние по градациям фактора A (M_A)	7		5		$M_0=6$
Центральные отклонения частных средних D_A	−1		—1		
Квадраты центральных отклонений D_A^2	1; 1; 1; 1		1; 1; 1; 1		$C_A=8$

Для каждой градации фактора A надо взять по четыре квадрата центральных отклонений — по числу вариантов. Это необходимо для сравнимости частных и общих дисперсий.

В нашем примере получилось, что в суммарном действии обоих факторов ($C_x=80$) действие фактора A равно $C_A=8$ или составляет всего 10% от суммарного действия организованных факторов и 9% от общего действия всех факторов.

Аналогично вычисляется дисперсия по фактору B. Расчет ее для приведенного примера показан в табл. 8. Оказалось, что дисперсия по фактору B равна $C_B=0$.

Такой результат есть следствие равенства частных средних по фактору B: $M_{B_1}=6$ и $M_{B_2}=6$ (средние по градациям не различаются, дисперсия равна нулю). Это значит, что при такой организации статистического комплекса, какая была в проведенном исследовании, влияние фактора B

при выравненных значениях фактора A не проявляется в разнообразии результативного признака.

Таблица 8

Градации первого фактора	A_1		A_2		
Градации второго фактора	B_1	B_2	B_1	B_2	
V	9; 11	3; 5	1; 3	7; 9	
Градация фактора B	B_1		B_2		
Варианты с градациями фактора B . .	9; 11; 1; 3		3; 5; 7; 9		$n=8$ $\Sigma V=48$
Суммы вариантов по градациям фактора B	24		24		
Частные средние по градациям фактора B (M_B)	6		6		$M_o=6$
Центральные отклонения частных средних D_B	0		0		
Квадраты центральных отклонений D_B^2	0; 0; 0; 0		0; 0; 0; 0		$C_B=0$

Нахождение факториальной (частной) дисперсии по сочетаниям факторов является специфической особенностью дисперсионного анализа.

Дисперсия по сочетаниям факторов A и B есть своеобразное и обычно с трудом понимаемое явление в области корреляционных связей. Эта дисперсия составляет ту часть общей дисперсии результативного признака, которая вызвана различным действием одного фактора при разных градациях другого.

Для выяснения сущности дисперсии по сочетаниям факторов разберем более подробно приведенный пример двухфакторного комплекса. В этом примере действие каждого фактора в отдельности оказалось очень слабым ($\eta_A^2=9\%$

Градации факторов A и B	A_1B_1	A_1B_2	A_2B_1	A_2B_2
M_x	10	4	2	8

и $\eta^2_{B} = 0\%$), несмотря на то, что ряд частных средних (M_x), а также рис. 2, где дано графическое изображение действия фактора A и фактора B, указывают на то, что эти факторы вносят значительное разнообразие в дисперсию результативного признака и, следовательно, действуют сильно, а не слабо.

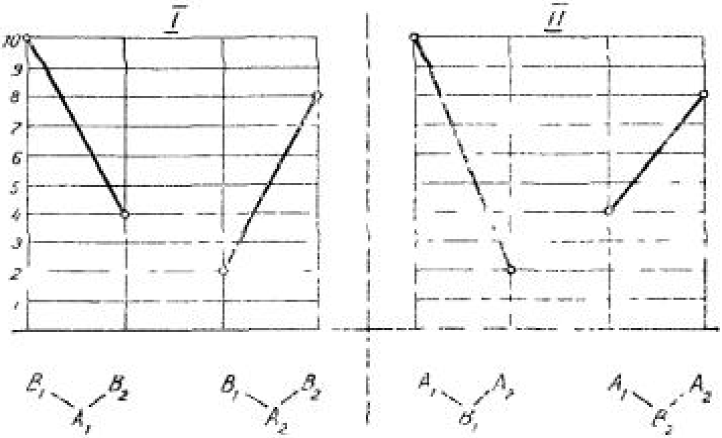

Рис. 2 График частных влияний:
I — фактора *B* при разных градациях фактора *A*, II — фактора *A* при разных градациях фактора *B*.

Достаточно фактору B измениться, как при одной градации первого фактора (A_1) результативный признак резко уменьшается (с 10 до 4), а при другой градации этого фактора (A_2) — резко увеличивается (с 2 до 8)

Точно так же действует и фактор A.

При одной градации второго фактора (B_1) изменение фактора A приводит к резкому падению значения результативного признака (с 10 до 2), а при другом значении (B_2) — к заметному увеличению (с 4 до 8).

По поводу полученных результатов может возникнуть еще одно недоумение, если вспомнить, что суммарное влияние обоих этих факторов на результативный признак очень велико: 91% от общего влияния всех факторов.

Как могли факторы, незначительно ($\eta^2_{A} = 9\%$) или совсем не влияющие на результативный признак ($\eta^2_{B} = 0$), при совместном действии оказать очень большое влияние ($\eta^2_{x} = 91\%$)?

В разбираемом примере соотношение **показателей** $\eta^2_{A} = 0{,}09$, $\eta^2_{B} = 0{,}00$ и $\eta^2_{x} = 0{,}91$ вполне объяснимо, так как отражает часто встречающуюся в жизни обусловленность влияний одних факторов другими

Не так уж редко отдельный фактор проявляется только тогда, когда другой фактор действует определенным образом В качестве примера может служить влияние температуры и влажности на рост организмов, влияние кормления и поения на вес и продуктивность животных, действие витамина и его растворителя на крепость молодняка и т д

Предположим, изучается влияние двух факторов — температуры и влажности — на рост каких-нибудь растительных организмов Вполне возможны следующие взаимоотношения этих факторов, аналогичные тем, которые обнаружились в разбираемом примере При нормальной температуре A_1 нормальная влажность B_1 благоприятна для роста, а повышенная влажность B_2 уже угнетает рост В нашем примере так и получилось при сочетании градации $A_1B_1 — M_x = 10$, а при $A_1B_2 — M_x = 4$

При повышенной температуре A_2, наоборот, низкая влажность B_1 недостаточна для нормального роста, и поэтому он замедлен, а повышенная влажность B_2 благоприятна и рост усиливается

В нашем примере при сочетании градации $A_2B_1 — M_x = 2$, а при $A_2B_2 — M_x = 8$

Если рассматривать каждый фактор в отдельности, то окажется, что температура без регулирования влажности и влажность без регулирования температуры слабо проявляются в разнообразии роста $\eta^2_{A} = 0,09$; $\eta^2_{B} = 0,00$

Если же организовать определенное сочетание факторов (их градации), например, при определенной температуре обеспечить определенную влажность, то различные комбинации градаций этих факторов создадут значительное разнообразие результативного признака, что и покажет их большое суммарное действие $\eta^2_{x} = 0,91$.

Из этих соображений возникла необходимость вскрывать и измерять степень влияния не только каждого фактора в отдельности, но также и их сочетаний, как части общего суммарного влияния

Проявляется влияние различных сочетаний изучаемых факторов заметным образом только в тех случаях, когда имеется различие в действии одного фактора при различных градациях другого

Специфическое действие сочетаний в дисперсионном комплексе выявляется тогда, когда при одной градации первого фактора второй фактор действует очень слабо или угне тающе, а при другой градации — сильно и стимулирует развитие результативного признака.

Например, при низких температурах повышение влажности тормозит рост, а при высоких, наоборот, стимулирует.

Поскольку всегда имеется некоторое различие в действии одного фактора при различных градациях другого, то всегда в каждой градации дисперсионного комплекса суммарное действие всех организованных факторов слагается из действия каждого фактора в отдельности и специфического действия их сочетаний.

Для расчета факториальной дисперсии по сочетаниям (C_{AB}) необходимо произвести следующие действия:

1. Составить ряды частных средних для каждой градации дисперсионного комплекса:

а) по суммарному действию организованных факторов (M_x),

б) по фактору A — M_A,

в) по фактору B — M_B.

Таблица 9

	A_1		A_2	
	B_1	B_2	B_1	B_2
V	9, 11	3; 5	1; 3	7, 9
M_x	$\frac{9+11}{2}=10$	$\frac{3+5}{2}=4$	$\frac{1+3}{2}=2$	$\frac{7+9}{2}=8$
M_A	$\frac{9+11+3+5}{4}=7$	$\frac{9+11+3+5}{4}=7$	$\frac{1+3+7+9}{4}=5$	$\frac{1+3+7+9}{4}=5$
M_B	$\frac{9+11+1+3}{4}=6$	$\frac{3+5+7+9}{4}=6$	$\frac{9+11+1+3}{4}=6$	$\frac{3+5+7+9}{4}=6$

Как составлять ряды частных средних показано в табл. 9. Они уже ранее были рассчитаны и представлены в табл. 6, 7, 8

Для расчета дисперсии сочетаний частные средние необходимо расставить по градациям комплекса определенным образом.

Величины M_x — 10; 4; 2 и 8 ставятся в соответствующих четырех градациях. По первой градации фактора A величина $M_A = 7$. Она ставится в двух первых градациях — A_1B_1 и A_1B_2, так как эти градации комплекса вместе и представляют одну первую градацию фактора A.

По второй градации фактора A величина $M_A=5$. Ставится она в двух последних градациях комплекса — A_2B_1 и A_2B_2, так как они вместе составляют вторую градацию фактора A.

По второй градации фактора A величина $M_B=6$ Ставится она в первой и третьей градациях комплекса — A_1B_1 и A_2B_1, так как они вместе составляют одну первую градацию фактора B.

По тем же соображениям величина $M_B=6$ по второй градации фактора B ставится во второй и четвертой градации комплекса.

2. Для трех рядов частных средних рассчитать центральные отклонения. Для этого нужно вычесть из каждой частной средней общую среднюю $M=6$. Эти действия показаны в табл. 10.

3. Рассчитать ряд центральных отклонений по ряду сочетаний (D_{AB}).

Для этого из каждого значения D_x нужно вычесть с соблюдением правила знаков D_A и D_B:

$$D_{AB}=D_x-D_A-D_B.$$

Полученные значения для D_{AB} надо возвести в квадрат и взять столько раз, сколько имеется вариантов в соответствующей градации. Сумма всех значений D^2_{AB} и будет дисперсией по сочетаниям факторов (C_{AB}). Эти действия показаны в табл. 11.

Таблица 10

$M=\frac{48}{8}=6$	A_1		A_2	
	B_1	B_2	B_1	B_2
V	9; 11	3; 5	1; 3	7; 9
M_x	10	4	2	8
M_A	7	7	5	5
M_B	6	6	6	6
D_x	+4	−2	−4	+2
D_A	+1	+1	−1	−1
D_B	0	0	0	0

Дисперсия по сочетаниям факторов получилась в масштабах разбираемого примера значительной:

$$C_{AB}=\Sigma D^2_{AB}=72.$$

Это указывает на то, что в изучаемом комплексе действие одного фактора сильно зависит от градаций другого.

Тут необходимо отметить следующие очень важные обстоятельства.

Полученные в анализе три частные дисперсии — C_A, C_B и C_{AB} — в сумме дают дисперсию суммарного действия организованных факторов

$$C_x = C_A + C_B + C_{AB},$$

$$80 = 8 + 0 + 72.$$

Так бывает только при определенной организации дисперсионных комплексов — при равномерных и пропорциональных комплексах, которые будут описаны ниже

Таблица 11

	A_1		A_2		
	B_1	B_2	B_1	B_2	
V	9,11	3,5	1,3	7,9	
D_x	$+4$	-2	-4	$+2$	
D_A	$+1$	$+1$	-1	-1	
D_B	0	0	0	0	
D_{AB}	$+4-1-$ $-0=+3$	$-2-1-$ $-0=-3$	$-4+1-$ $-0=-3$	$+2+1-$ $-0=+3$	
D^2_{AB}	9,9	9,9	9,9	9,9	$C_{AB}=72$

Возможны три вида взаимоотношений между суммой указанных трех частных дисперсий и дисперсией суммарного действия.

$$C_A + C_B + C_{AB} = C_x,$$

$$C_A + C_B + C_{AB} > C_x,$$

$$C_A + C_B + C_{AB} < C_x.$$

Первый случай дает возможность более просто находить дисперсию сочетаний, без предварительного определения величины D_{AB}.

При анализе равномерных и пропорциональных комплексов дисперсия сочетаний находится очень легко

$$C_{AB} = C_x - C_A - C_B.$$

Для нашего примера

$$C_{AB} = 80 - 8 - 0 = 72.$$

Второй и третий вид соотношений между суммой частных дисперсий и дисперсией суммарного действия имеют место в неравномерных дисперсионных комплексах. Поэтому при описании этих комплексов и будут указаны способы расчета дисперсии сочетаний.

Нахождение степени влияния факторов и их сочетаний производится так же, как и при однофакторном комплексе, путем деления частных дисперсий на общую.

Показатели влияния для приведенного примера имеют следующие значения:

для фактора A $\eta_{A}^{2} = \frac{8}{88} = 0,09;$

для фактора B $\eta_{B}^{2} = \frac{0}{88} = 0,00;$

для сочетаний факторов A и B $\eta_{AB}^{2} = \frac{72}{88} = 0,82;$

для суммарного действия организованных факторов

$$\eta_{x}^{2} = \frac{80}{88} = 0,91.$$

Проверка $\eta_{x}^{2} = \eta_{A}^{2} + \eta_{B}^{2} + \eta_{AB}^{2} = 0,09 + 0,00 + 0,82 = 0,91.$

Для случайных факторов $\eta_{z}^{2} = \frac{8}{88} = 0,09;$

для всех факторов $\eta_{y}^{2} = \frac{88}{88} = 1,00.$

Проверка $\eta_{y}^{2} = \eta_{x}^{2} + \eta_{z}^{2} = 0,91 + 0,09 = 1,00.$

Оказалось, что действие каждого из изученных факторов настолько сильно зависит от градаций другого, что при очень слабом влиянии каждого из них порознь различие их совместного влияния достаточно велико — 82% от общей суммы влияний всех признаков.

Приведенный выше ряд значений η_{i}^{2} и рис. 2 представляют общую характеристику результатов двухфакторного статистического комплекса.

Нахождение достоверности влияний факторов и их сочетаний производится путем нахождения отношений между факториальными девиатами и случайной девиатой $\left(F_{i} = \frac{\sigma_{i}^{2}}{\sigma_{z}^{2}}\right)$ и сопоставления полученных показате лей достоверности со стандартными отношениями девиат, находимыми по таблице

Необходимые для получения девиат числа степеней свободы при двухфакторном комплексе определяются следующим образом:

а) для общей дисперсии число степеней свободы равно числу значений результативного признака без одного

$$\nu_y = n - 1, \quad 8 - 1 = 7;$$

б) для дисперсии по первому фактору число степеней свободы равно числу градации этого фактора без одного

$$\nu_A = r_A - 1, \quad 2 - 1 = 1;$$

в) для дисперсии по второму фактору число степеней свободы равно числу градации этого фактора без одного

$$\nu_B = r_B - 1, \quad 2 - 1 = 1;$$

г) для дисперсии сочетания факторов число степеней свободы равно произведению этих чисел для обоих факторов

$$\nu_{AB} = \nu_A \cdot \nu_B, \quad 1 \times 1 = 1;$$

д) для суммарной дисперсии по организованным факторам число степеней свободы равно произведению числа градаций по обоим факторам без единицы

$$\nu_x = r_A \cdot r_B - 1, \quad 2 \times 2 - 1 = 3;$$

е) для случайной дисперсии число степеней свободы равно числу значений результативного признака без произведения числа градации по обоим факторам

$$\nu_z = n - r_A \cdot r_B, \quad 8 - (2 \times 2) = 4;$$

ж) сумма степеней свободы для всех частных дисперсий должна быть равна числу степеней свободы общей дисперсии

$$\nu_A + \nu_B + \nu_{AB} = \nu_x, \quad 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\nu_x + \nu_z = \nu_y, \quad 3 + 4 = 7$$

Чтобы получить девиаты, надо каждую дисперсию разделить на число степеней свободы, что для приведенного примера даст следующие результаты

для фактора A — $\sigma_A^2 = \frac{8}{1} = 8{,}0;$

для фактора B — $\sigma_B^2 = \frac{0}{1} = 0{,}0;$

для сочетаний факторов A и B — $\sigma^2_{AB} = \frac{72}{1} = 72{,}0$;

для суммарного действия организованных факторов — $\sigma^2_x = \frac{80}{3} = 26{,}7$;

для случайных факторов — $\sigma^2_z = \frac{8}{4} = 2{,}0$.

Показатель достоверности получается путем деления каждой факториальной дисперсии на случайную:

для фактора A — $F_A = \frac{8{,}0}{2{,}0} = 4{,}0$;

для фактора B — $F_B = \frac{0}{2{,}0} = 0{,}0$;

для сочетания фактора A и B — $F_{AB} = \frac{72{,}0}{2{,}0} = \underline{\underline{36{,}0}}$;

для суммарного действия организованных факторов —

$F_x = \frac{26{,}7}{2} = \underline{13{,}3}$.

Для окончательного суждения о достоверности влияний необходимо сравнить полученные показатели достоверности со стандартными отношениями девиат. Для этого нужно выписать из таблицы числа тех клеток, которые соответствуют имеющимся в комплексе числам степеней свободы.

ν_1 \ ν_2	1	3
4	74,1 41,2 7,7	56,1 16,7 6,6

Если полученный показатель достоверности равен или превышает третье стандартное отношение, его подчеркивают тремя чертами; если он превышает второе стандартное отношение, его подчеркивают двумя чертами; если первое — то одной. Если показатель достоверности оказался меньше первого стандартного отношения, то такой критерий подчеркивают волнистой линией.

Достоверность влияния факторов и их сочетаний в приведенном примере определяется следующим образом:

1. Для фактора A $F_A = 4{,}0$, т. е. меньше первого стандартного отношения (7,7). Влияние изолированного фактора A при выравненных значениях фактора B не достоверно. Нельзя считать, что и в соответствующей генеральной совокупности фактор A при выравненном действии фактора B будет оказывать влияние на изменения результативного признака.

2. Для фактора B $F_B = 0{,}0$.

3. Для сочетаний факторов A и B $F_{AB} = 36,0$. В этом случае показатель достоверности превысил второе стандартное отношение (21,2). Влияние различий в сочетании факторов достаточно достоверно: $P_{AB} > 0,99$. Это значит, что результаты данного выборочного исследования можно перенести и на всю соответствующую генеральную совокупность. И в ней различие сочетаний факторов оказывает большое влияние на результативный признак.

4. Для суммарного действия организованных факторов $F_x = 13,3$; показатель достоверности превысил первое стандартное отношение девиат (при $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 4$) и приближается ко второму. Это указывает на то, что суммарное действие изученных факторов также может считаться достоверным.

ТЕХНИКА ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Для того, чтобы, пользуясь дисперсионным анализом, получить правильные результаты, необходимо выполнять определенные правила организации дисперсионных комплексов. Кроме того, для облегчения счетной работы необходимо усвоить способы расчета дисперсии по специальным рабочим формулам.

Подбор факторов

При организации однофакторных комплексов фактором считается любой признак, влияние которого на результативный признак требуется изучить. Это могут быть другие признаки того же животного или растения, различные условия жизни, химические или биологические агенты и другие влияния.

При организации двух- и многофакторных комплексов свободный выбор факторов для исследования ограничен требованием полной независимости их между собою. Для таких комплексов нельзя в качестве двух факторов брать, например, вес и размер животных, так как эти признаки нельзя подбирать независимо друг от друга: при малом весе невозможно подобрать такие же значения размера, как и при большом весе.

Независимыми факторами могут быть, например, температура и влажность, пол и уровень кормления, химическое и биологическое воздействие.

Разделение факторов на градации

При проведении дисперсионного анализа не требуется, чтобы факторы были разделены обязательно на количественные градации в форме вариационного ряда. Как для однофакторных, так и для двух- и многофакторных комплексов факторы могут иметь и качественные градации, например, пол — мужской, женский; цвет волоса или пера — светло-серый, серый, темно-серый; упитанность — жирная, выше средней, средняя, ниже средней; крепость телосложения — слабая, нормальная, сильная

При установлении градации факторов нужно помнить, что результаты дисперсионного анализа в большой степени зависят от того уровня, на котором установлены градации факторов.

Если, например, изучается действие температуры, то при градациях 15°, 20°, 25° С может быть найдено достоверное влияние этого фактора на результативный признак, но это совсем не значит, что такое же сильное влияние будет при другом уровне градаций, например, 5°, 10°, 15° С.

Точно так же совместное различное действие пола и упитанности на привесы может проявиться в определенной степени при определенных градациях упитанности, но это не значит, что в той же степени проявится это влияние при других градациях упитанности.

Большое значение также имеет уровень группы неорганизованных факторов, которые составляют фон дисперсионного анализа. Например, комбинированное действие возраста и какого-нибудь стимулятора ожирения дают при одном уровне общего кормления и содержания определенный эффект, а при другом, например скудном кормлении и плохом содержании, может и совсем не проявиться.

Подбор особей

Результаты дисперсионного анализа в основном зависят от того, насколько правильно подобраны особи как по качеству, так и по количеству.

По своему качеству особи для дисперсионного анализа должны отражать ту генеральную совокупность, для изучения которой и проводится исследование.

По величине результативного признака особи должны быть подобраны по принципу случайной выборки. Лучше всего при отборе объектов для дисперсионного анализа поступать следующим образом.

Пусть для данной градации требуется, например, 20 особей, а имеется всего таких особей 30. Тогда номер каждой особи нужно записать на карточку. Все 30 карточек хорошо перетасовать и взять подряд без выбора первые 20 карточек или, наоборот, взять подряд только первые 10 карточек. В первом случае отберутся особи для исследования, во втором откинутся особи, лишние для данной градации.

Нарушение принципа случайности при отборе особей для дисперсионного анализа всегда приводит к неправильным, нерепрезентативным результатам

Организация дисперсионного комплекса с выполнением принципа случайности отбора вариантов называется **рэндомизацией***, а комплексы, организованные таким образом, называются **рэндомизированными**.

По количеству особи могут распределяться по градациям факторов различными способами: поровну, пропорционально, неравномерно. В соответствии с этим и организованные комплексы бывают равномерными, пропорциональными и неравномерными.

При равномерных и пропорциональных комплексах, как уже указывалось, сумма частных дисперсий равна общей ($C_A + C_B + C_{AB} = C_y$), если все эти дисперсии рассчитывать по указанным основным формулам, независимо друг от друга.

Наличие такого соотношения между дисперсиями очень облегчает проведение всего дисперсионного анализа.

При практическом проведении исследований методом дисперсионного анализа не всегда возможно организовать равномерный или пропорциональный комплекс. Иногда в процессе проведения опыта одна или несколько особей выбывают из опыта вследствие болезни, гибели или по другим причинам; иногда бывает очень трудно или невозможно найти требуемое количество особей для какой-нибудь одной или двух градаций. В таких случаях приходится работать с неравномерным комплексом, что очень усложняет расчеты.

В дальнейшем описание приемов дисперсионного анализа будет дано в основном для пропорциональных комплексов и для частного случая их — для равномерных комплексов.

В заключение будут даны методы работы и для случая неравномерного дисперсионного комплекса.

Пропорциональным комплекс будет в тех случаях, когда для разных градаций одного фактора частоты другого находятся в одинаковой пропорции, например:

	A_1		A_2	
	B_1	B_2	B_1	B_2
n_i	2	4	6	12
Отношения частот	1:2		1:2	

* По-английски random — выбранный наугад.

Неравномерным комплекс будет в тех случаях, когда для разных градаций одного фактора частоты другого находятся в неодинаковых пропорциях:

	A_1		A_2	
	B_1	B_2	B_1	B_2
n_x	2	4	6	10
Отношения частот	1 : 2		1 : 1,666...	

Равномерный комплекс есть частный случай пропорционального, когда отношение частот равно 1 : 1; 1 : 1 : 1 и т. д.

В некоторых случаях бывает легко организовать пропорциональный комплекс на базе имеющегося неравномерного. Как это сделать, можно показать на следующем примере.

Предположим, имеется некоторое количество особей, которые по своему качеству отвечают требованиям градаций двухфакторного комплекса, но по количеству не отвечают требованиям пропорциональности, что показано в табл. 12.

Таблица 12

	A_1			A_2		
	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3
n_x	3	10	13	11	30	39
	1 : 3,3 : 4,3			1 : 2,7 : 3,6		

Сумма частот по градациям	Пропор. число
$3 + 10 + 13 = 26$ (A_1)	1,0
$11 + 30 + 39 = 80$ (A_2)	3,1
$3 + 11 = 14$ (B_1)	1,0
$10 + 30 = 40$ (B_2)	2,9
$13 + 39 = 52$ (B_3)	3,7

Тут отношение частот фактора B по разным градациям фактора A неодинаково. Для A_1 отношение частот равно 1 : 3,3 : 4,3; для A_2 — 1 : 2,7 : 3,6.

Но в этом неравномерном комплексе отношения частот по градациям каждого фактора в отдельности (что показано в правой части таблицы) близки к определенным целым числам:

$$A_1 : A_2 \approx 1 : 3; \; B_1 : B_2 : B_3 \approx 1 : 3 : 4.$$

Эти числа пропорциональности можно использовать для построения пропорционального комплекса.

Для этого в каждой градации по обоим факторам надо *перемножить соответствующие числа пропорциональности*, затем фактические частоты разделить на эти произведения и взять наименьшее из полученных частных (a_{min}). Эту величину надо умножить на произведения чисел пропорциональности. Таким образом, мы получим частоты пропорционального комплекса, который образован из имеющегося непропорционального с наименьшей выбраковкой особей. Эти действия показаны в табл. 13.

Таблица 13

Организация пропорционального дисперсионного комплекса на базе имеющегося непропорционального

Градации первого фактора	A_1 (1)			A_2 (3)			
Градации второго фактора	B_1 (1)	B_2 (3)	B_3 (4)	B_1 (1)	B_2 (3)	B_3 (4)	
Фактические частоты n_V	3	10	13	11	30	39	$n = 106$
Произведения чисел пропорциональности (π)	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 3 = 3$	$1 \cdot 4 = 4$	$3 \cdot 1 = 3$	$3 \cdot 3 = 9$	$3 \cdot 4 = 12$	
$a = n_V : \pi$	3,0	3,3	3,3	3,7	3,3	3,3	$a_{min} = 3$
$\pi . a_{min} = n'_x$	3	9	12	9	27	36	$n' = 96$

Примечание. В скобках даны числа пропорциональности.

Равномерные и пропорциональные комплексы называются еще ортогональными.

Преобразование значений результативного признака

Для облегчения счетной работы можно значения результативного признака, неудобные для счета — многозначные, дробные, преобразовать в удобные — малозначные и выражаемые целыми числами.

После проведения всей счетной работы с преобразованными вариантами показатели $\eta_x^2 = \frac{C_x}{C_y}$ и $F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}$ получаются точными и не требуют никаких поправок. Другие показатели — $C = \Sigma D^2$, $\sigma^2 = \frac{C}{\nu}$ и $M = \frac{\Sigma V}{n}$ требуют восстановления, что легко сделать путем применения действий обратных тем, при помощи которых были преобразованы варианты результативного признака.

Возможны следующие преобразования:

1. Все варианты можно разделить на одно и то же число κ. Это делается не только тогда, когда все варианты делятся на это число без остатка, но и в случае перехода к новым единицам измерения. Если, например, признак выражен в миллиметрах большими числами с большим размахом крайних значений, то простая перемена единицы измерения на сантиметры будет равносильна делению всех чисел на 10. Точно так же перемена единицы измерения годового удоя с килограммов на центнеры равносильна делению всех чисел на 100, что можно сделать при большом размахе значений удоя в пределах изучаемого комплекса.

При перемене единицы измерения не требуется никаких поправок в новых единицах, результаты получаются точными.

Если деление происходит без изменения единицы измерения, то в конечные результаты надо внести соответствующие поправки: $C = \Sigma D^2$ и $\sigma^2 = C/\nu$ нужно умножить на κ^2, а $M = \frac{\Sigma V}{n}$ — умножить на κ.

2. Все варианты можно умножить на одно и то же число κ. Это делается тогда, когда варианты выражены дробными числами, например, 0,25, 0,37 и т. д. Умножая все варианты на 100, можно получить целые двузначные числа, удобные для счета.

Поправки в конечные результаты при таком преобразовании надо вносить обратные тем, которые вносятся в предыдущем случае.

3. От всех вариантов можно отнять одно и то же число A. Это лучше делать тогда, когда варианты образуют небольшой размах и деление их на число κ или умножение с последующим округлением может заметно снизить имеющиеся разнообразия результативного признака. Поправку в окончательный результат при этом способе преобразования требуется вносить только для средней арифметической M: нужно прибавить число A. Значения C, η^2, σ^2 и F никаких попра-

вок не требуют: они получаются точными в первоначальных единицах.

Вычитать лучше наименьшие значения.

4. Можно сделать двойное преобразование, аналогичное тому, которое проводят при расчете M и σ для больших групп на основе условных отклонений, выраженных в классовых промежутках. Из каждого варианта можно вычесть одно и то же число A, а полученный результат разделить на другое число κ. Полученные после такого преобразования C и σ^2 для восстановления нужно умножить на κ^2, а M — умножить на κ и прибавить к произведению A. Величины η^2 и F в этом случае не требуют никаких поправок.

Основные способы преобразования вариантов с указанием требуемых поправок для конечных результатов приведены в табл. 14.

Таблица 14

Способы преобразования вариантов и поправки для восстановления конечных результатов при дисперсионном анализе

Способ преобразования	Что надо сделать, чтобы исправить конечные результаты анализа, проведенного на преобразованных вариантах				
	$C = \Sigma D^2$	$\eta^2 = \frac{C_x}{C_y}$	$\sigma^2 = \frac{c}{\nu}$	$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}$	M
$\frac{V}{\kappa}$	умножить на κ^2	поправка не нужна	умножить на κ^2	поправка не нужна	умножить на κ
$V \cdot \kappa$	разделить на κ^2	•	разделить на κ^2	•	разделить на κ
$V - A$	поправка не нужна	•	поправка не нужна	•	прибавить A
$\frac{V - A}{\kappa}$	умножить на κ^2	•	умножить на κ^2	•	умножить на κ и прибавить A

ТЕХНИКА РАСЧЕТОВ

Расчет дисперсионных комплексов удобнее проводить по специальным рабочим формулам, отличающимся от тех формул, которые приводились в главе об основах метода в целях вскрытия сущности приемов дисперсионного анализа.

Рабочие формулы дают те же результаты, но значительно упрощают вычислительную работу.

Техника расчетов неодинакова для малых и больших групп: для больших групп невозможно технически провести работу так же просто, как и в случае малых групп.

Отнесение имеющегося материала к большой или малой группе обусловливается имеющейся вычислительной техникой. При наличии только простейших вычислительных приборов — конторских счет, арифмометра, логарифмической линейки — группу в 40—50 многозначных вариантов приходится считать уже большой группой.

При наличии более совершенных счетных машин, типа Кел, Архимед, Сар, Мерседес, группа из 100 двузначных вариантов может считаться еще малой группой.

Однофакторный комплекс

Когда изучается действие на результативный признак одного фактора, то имеется только одна пропорция частот по градациям этого фактора. Так как другого фактора нет, то эту пропорцию и не с чем сравнивать. Поэтому для однофакторных комплексов отпадает требование пропорциональности или равномерности: однофакторные комплексы ортогональны при любом соотношении частот по градациям фактора.

К однофакторным комплексам в полной мере относится требование рэндомизации, т. е. освобождения от тенденциозности в выборе объектов эксперимента и наблюдения. И, наконец, при однофакторных комплексах вполне применимы все описанные выше приемы преобразования вариантов.

Техника расчетов однофакторного комплекса для малых групп может быть показана на следующем примере.

При изучении действия одного из стимуляторов ожирения были установлены три градации этого фактора: первая доза — 0 (контрольная группа), вторая доза — 10 *г* и третья доза — 20 *г* в суточном рационе. В качестве результативного признака был принят привес животных за опытный период.

Для каждой градации фактора было выбрано с сохранением принципа рэндомизации по 2 особи, которые за опытный период показали разный привес, выражающийся в следующих числах: для первой дозы — 12 и 4 *г*, для второй дозы — 18 и 14 *г*, для третьей дозы — 8 и 4 *г*.

Оказалось возможным эти числа легко преобразовать путем вычитания из всех чисел минимального привеса (4 *г*), в результате чего получены варианты, более удобные для счета: для первой градации — 8 и 0, для второй градации — 14 и 10 и для третьей — 4 и 0. Такое преобразование не требует никаких поправок к окончательным результатам дисперсионного анализа (см. табл. 14).

Порядок вычислений показан в табл. 15. В первой строке записаны значения градаций (x) фактора: 0; 10; 20 и число градаций $r=3$. Во второй строке записаны значения результативного признака (варианты V) для соответствующих градаций в преобразованном виде — 8 и 0, 14 и 10, 4 и 0 и сумма всех вариантов $\Sigma V=36$. В третьей строке записаны квадраты вариантов — 64 и 0, 196 и 100, 16 и 0 и сумма квадратов вариантов $\Sigma V^2=376$. В четвертой строке записаны частоты по градациям (n_x) — 2; 2; 2 и сумма всех частот $n=\Sigma n_x=6$. В пятой строке записаны суммы вариантов (ΣV_x) по каждой градации: 8; 24; 4. В шестой строке записаны квадраты сумм вариантов по каждой градации $(\Sigma V)^2$ — 64; 576; 16. В седьмой строке записаны частные от деления этих квадратов на соответствующие частоты $\left(h=\frac{(\Sigma V_x)^2}{n_x}\right)$: 32; 288; 8 и сумма этих величин $\Sigma h=328$.

В восьмой строке записываются частные средние результативного признака по градациям фактора (M_x). Эти средние используются только для иллюстрации действия фактора, а не для расчета дисперсий.

В приводимом примере частные средние получены в преобразованном виде: на 4 единицы меньше действительных. Чтобы восстановить их действительное значение, нужно к каждой средней прибавить ту величину, которая была вычтена из каждого варианта (4). После этого получим ряд средних привесов: 8; 16; 6. В данном исследовании выяснено, что

Таблица 15

Техника расчетов при дисперсионном анализе однофакторного комплекса для малых групп

x	0	10	20	$r = 3$
V	8, 0	14; 10	4; 0	$\Sigma V = 36$
V^2	64; 0	196; 100	16; 0	$\Sigma V^2 = 376$
n_x	2	2	2	$n = 6$
ΣV_x	8	24	4	
$(\Sigma V_x)^2$	64	576	16	
$h = \frac{(\Sigma V_x)^2}{n_x}$	32	288	8	$\Sigma h = 328$
$M_x = \Sigma V_x : n_x$	4	12	2	$M = 6$

$H = \frac{(\Sigma V)^2}{n} = \frac{36^2}{6} = 216$		x	z	y
	C	112	48	160
$C_y = \Sigma V^2 - H = 376 - 216 = 160$	η^2	0,70	0,30	1,00
$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma h = 376 - 328 = 48$	ν	2	3	5
$C_x = \Sigma h - H = 328 - 216 = 112$	σ^2	56	16	—
Проверка: 112 + 48 = 160	F	3,5	ν_1 / ν_2	2
			3	148,5 30,8 9,6

малая доза стимулятора (10 *г*) благоприятно действует на привесы; увеличение дозы до 20 *г* уже угнетающе действует на привесы — они становятся меньшими, чем в контрольной группе.

Ряд средних результативного признака по градациям изучаемого фактора дает только первое представление о том, что получилось в данном исследовании.

Для окончательных выводов требуется определить, как уже указывалось, степень или силу воздействия фактора на результативный признак и достоверность результатов, полученных в проведенном выборочном исследовании.

Для определения степени влияния фактора, как известно, необходимо найти отношение факториальных дисперсий к общей, а для определения достоверности влияния необходимо найти отношение девиат (факториальной к случайной).

Расчеты, показанные в табл. 15, дают возможность получить наиболее простым способом требуемые дисперсии и девиаты.

После описанного выше заполнения клеток расчетной таблицы дальнейшие действия лучше располагать в следующем порядке:

1. Определить вспомогательную величину H путем возведения в квадрат общей суммы вариантов и деления полученной величины на общее число вариантов:

$$H = \frac{(\Sigma V)^2}{n} = \frac{36^2}{6} = \frac{1296}{6} = 216.$$

2. Определить величину общей дисперсии результативного признака. Делается это не непосредственно, как было показано в главе об основах метода, а по рабочей формуле:

$$C_y = \Sigma V^2 - H = 376 - 216 = 160.$$

3. Определить величину случайной дисперсии:

$$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma h = 376 - 328 = 48.$$

4. Определить величину факториальной дисперсии:

$$C_x = \Sigma h - H = 328 - 216 = 112.$$

Дальнейшие действия лучше расположить в форме сводки, приведенной в правом нижнем углу табл. 15. Все расчеты, необходимые для сводки, объяснены в главе об основах метода. Соответствующие формулы сгруппированы в табл. 16.

Таблица 16

Сводка результатов дисперсионного анализа однофакторного комплекса для малых групп

		x	z	y
Дисперсии	C	$\Sigma h - H$	$\Sigma V^2 - \Sigma h$	$\Sigma V^2 - H$
Степень влияния факторов	η	$\frac{C_x}{C_y}$	$\frac{C_z}{C_y}$	1,00
Число степеней свободы	ν	$r-1$	$n-r$	$n-1$
Девиаты	σ^2	$\frac{C_x}{\nu_x}$	$\frac{C_z}{\nu_z}$	—
Показатель достоверности влияния	F	$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}$	*Стандартные отношения девиат*	

Общий итог данного анализа можно выразить следующим образом

влияние организованного фактора	70%
влияние неорганизованных факторов	30 »
влияние всех факторов	100 »

Изучаемый фактор в выборке показал сильное влияние на результативный признак, но влияние это оказалось недостоверным, так что вывод о сильном влиянии еще нельзя перенести на генеральную совокупность. Для решения этого вопроса необходимы повторные исследования на более многочисленном материале.

Для многочисленных групп техника расчетов однофакторного дисперсионного комплекса показана на примере, представленном в табл. 17.

При изучении возрастных изменений веса животных была составлена корреляционная решетка (обычным способом), в которой было девять градаций фактора возраста (от 2 до 10 лет, с интервалом 1 год) и девять классов результативного признака — веса (от 200 до 600 *кг*, с интервалом 50 *кг*).

Таблица 17

Техника расчетов при дисперсионном анализе однофакторного комплекса для больших групп

x — фактор (возраст),
y — результативный признак (вес)

y	a \ x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n_y	533	247
600	+3						21	10	8	1	40	40	40
550	+2					35	56	28	7	1	127	167	207
500	+1				35	70	35	18	1		159	326	—
450	0			21	56	35					112	—	—
400	−1		1	28	21						50	74	—
350	−2		6	3							9	24	49
300	−3		8								8	15	25
250	−4	3	1								4	7	10
200	−5	3									3	3	3
n_x		6	16	52	112	140	112	56	16	2	512	123	87
Σfa		−27	−41	−34	+14	+140	+210	+104	+39	+5	Σfa		+410
$(\Sigma fa)^2$		729	1681	1156	196	19600	44100	10816	1521	25			
$h = \frac{(\Sigma fa)^2}{n_x}$		121,5	105,1	22,2	1,8	140,0	393,8	193,1	95,1	12,5	$\Sigma h = 1085,1$		

$S_1 = 533 - 123 = +410,\ H = \frac{410^2}{512} = 328,3$

$S_2 = 533 + 123 + 2\,(247 + 87) = 1324$

$C_y = S_2 - H = 1324 - 328,3 = 995,7$

$C_z = S_2 - \Sigma h = 1324 - 1085,1 = 238,9$

$C_x = \Sigma h - H = 1085,1 - 328,3 = 756,8$

	x	z	y
C	756,8	238,9	995,7
η	0,76	0,24	1,00
ν	8	503	511
σ^2	94,6	0,47	–
F	201,3	$\nu_2 \backslash \nu_1$	8
		503 (400)	3,4 2,5 2,0

Градации фактора (x) обозначены в заголовках девяти столбцов решетки, а классы результативного признака (средины классов) проставлены при обозначении строк (y).

Рядом с обозначением классов распределения результативного признака проставлены условные отклонения, выраженные в классовых промежутках (a).

Установление классов и условных отклонений признаков производится по обычным правилам обработки вариационных рядов по способу произведений.

В клетках решетки ставятся частоты, указывающие, сколько особей данного возраста имеют вес в пределах границ данного класса.

Составление корреляционной решетки производится по обычным правилам, применяющимся при расчетах коэффициента корреляции или корреляционного отношения.

В дисперсионном анализе однофакторного комплекса обработка корреляционной решетки начинается так, как это делается при вычислении корреляционного отношения, но заканчивается эта обработка особым способом, являющимся специфическим отличием дисперсионного анализа.

Требуется вначале приписать к корреляционной решетке внизу четыре строки, а справа — три столбца.

В первой строке — n_x — ставятся суммы частот по столбцам. Это есть вариационный ряд фактора (возраста) в разбираемом примере.

Во второй строке нужно проставить суммы произведений частот на отклонения (Σfa).

В разбираемом примере эти суммы составились следующим образом: для первого столбца (возраст 2 года) $\Sigma fa = 3 \cdot (-5) + 3 \cdot (-4) = -15 - 12 = -27$; для четвертого столбца (возраст 5 лет) $\Sigma fa = 35 \cdot (+1) + 56 \cdot (0) + 21 \cdot (-1) = +35 - 21 = +14$ и т. д.

В третьей строке надо проставить $(\Sigma fa)^2$: $(-27)^2 = 729$, $(-41)^2 = 1681$ и т. д.

Величины третьей строки нужно разделить на соответствующую частоту, и все полученные частные сложить. Это будет величина $h = \frac{(\Sigma fa)^2}{n_x}$ (четвертая строка). В разбираемом примере h для первого столбца равно $729 : 6 = 121{,}5$, а для всего комплекса $\Sigma h = 1085{,}1$.

Составление ряда квадратов вариантов для больших групп в целях облегчения вычислительной работы заменено расчетами вариационного ряда результативного признака, проводимыми в трех столбцах справа от корреляционной решетки.

В первом столбце записываются суммы частот n_y по строкам, что и дает вариационный ряд результативного признака. Сумма чисел этого столбца (Σn_y) должна быть равна Σn_x и составлять общую численность комплекса n. В разбираемом примере $n = \Sigma n_y = \Sigma n_x = 512$.

Во втором и третьем столбцах производится расчет вариационного ряда по способу сумм, в результате чего получаются две суммы — S_1 и S_2. Делается это по обычным правилам обработки распределений по способу сумм.

В разбираемом примере суммы накопленных частот в первом столбце будут $q_1 = 533$ и $r_1 = 123$, а во втором — $q_2 = 247$ и $r_2 = 87$.

Используя эти величины, определяются две суммы, требующиеся для дальнейшего анализа:

а) первая сумма

$$S_1 = q_1 - r_1 = 533 - 123 = +410.$$

Эта сумма должна быть равна сумме чисел второй добавочной строки:

$$S_1 = \Sigma fa = +410.$$

Если S_1 возвести в квадрат и полученное значение разделить на общую численность комплекса, то получится вспомогательная величина

$$H = \frac{S_1^2}{n} = \frac{410^2}{512} = 328,3;$$

б) вторая сумма рассчитывается следующим образом:

$$S_2 = q_1 + r_1 + 2(q_2 + r_2) = 533 + 123 + 2(247 + 87) = 1324.$$

Расчет дисперсий проводится при помощи уже полученных величин

$$C_y = S_2 - H = 1324 - 328,3 = 995,7,$$

$$C_z = S_2 - \Sigma h = 1324 - 1085,1 = 238,9,$$

$$C_x = \Sigma h - H = 1085,1 - 328,3 = 756,8.$$

Все эти действия приведены в нижней части табл. 17.

Получение результатов анализа — η^2, σ^2 и F — лучше производить по сводке, приведенной в правом нижнем углу табл. 17. Формулы, по которым рассчитываются величины, проставляемые в сводке, приведены в табл. 18.

Таблица 18

Сводка результатов дисперсионного анализа при обработке однофакторного комплекса для больших групп

		Организованные факторы (x)	Неорганизованные факторы (z)	Все факторы (y)
Дисперсии	C	$\Sigma h - H$	$S_2 - \Sigma h$	$S_2 - H$
Степень влияния факторов (квадрат корреляционного отношения)	η^2	$\frac{C_x}{C_y}$	$\frac{C_z}{C_y}$	1,00
Число степеней свободы	ν	$r - 1$	$n - r$	$n - 1$
Девиаты	σ^2	$\frac{C_x}{\nu_x}$	$\frac{C_z}{\nu_z}$	—
Отношение девиат — критерий достоверности влияния	F	$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}$	$\nu_1 =$ $\nu_2 =$	Стандартные отношения девиат

В приведенном примере получены следующие окончательные результаты.

влияние возраста на вес	76%
влияние неорганизованных факторов	24 »
влияние всех факторов . . .	100 »

Влияние изученного фактора оказалось сильным и настолько достоверным, что это заключение может быть с уверенностью перенесено на всю генеральную совокупность.

Двухфакторный комплекс

При изучении действия двух факторов в одном комплексе появляются новые требования, которых не было при анализе однофакторного комплекса.

В двухфакторных комплексах обязательно требуется независимость изучаемых факторов и, кроме того, желательно иметь пропорциональность частот, так как в этом случае расчеты значительно облегчаются.

Как и все другие комплексы, двухфакторные должны быть рэндомизированы; значения вариантов также могут быть преобразованы любым из способов, указанных ранее.

Изучая действия более одного фактора, необходимо учитывать не только влияние каждого фактора в отдельности, но и их сочетаний. В разделе об основах дисперсионного анализа был показан на примере непосредственный способ определения этих показателей (см. табл. 6—11).

Там были рассчитаны частные средние по фактору A, по фактору B, по сочетаниям факторов AB и по их общему суммарному действию — по фактору x.

По каждому ряду средних мы рассчитывали центральные отклонения, сумма квадратов которых и давала дисперсию по каждому фактору: $C_A = 8$, $C_B = 0$, $C_{AB} = 72$, $C_x = 80$.

В табл. 19 и 20, на том же примере, который приводился в разделе об основах дисперсионного анализа, показана техника расчетов двухфакторного комплекса для малых групп с применением рабочих формул. Результаты получились те же:

$$C_y = 88,\ C_z = 8,\ C_x = 80,\ C_A = 8,\ C_B = 0,\ C_{AB} = 72.$$

Расчет основного корреляционного ряда и оформление конечных результатов производится в основном, как и в случае однофакторного комплекса.

Рассмотрим более подробно получение новых показателей: C_A, C_B и C_{AB}.

По каждой градации фактора A и фактора B подсчитывается сумма частот и сумма вариантов (см. правую верхнюю часть табл. 19).

Эти суммы так же, как и суммы по градациям B_1 и B_2, берутся из основного корреляционного ряда. Полученные суммы возводятся в квадрат, а квадрат суммы делится на соответствующую сумму частот. Получается ряд значений

$$h_A = \frac{(\Sigma V_A)^2}{n_A}.$$

Сумма этих величин (Σh_A) и есть представитель влияния фактора A. Если из нее вычесть общую поправку $H = \frac{(\Sigma V)^2}{n}$, мы получим точную дисперсию по фактору A, так как $C_A = \Sigma h_A - H$.

Таким образом, $C_A = \Sigma h_A - H = 296 - 288 = 8$.

Аналогично находим: $C_B = \Sigma h_B - H = 288 - 288 = 0$.

Следовательно, основные величины получились точно такими же, как и при непосредственном способе расчета.

Техника расчетов при дисперсионном анализе двухфакторного комплекса для малых групп

	A_1		A_2		$r_A = 2$						
	B_1	B_2	B_1	B_2	$r_B = 2$		n_i	ΣV	$(\Sigma V)^2$	$h_i = \frac{(\Sigma V)^2}{n_i}$	M_i
V	9; 11	3; 5	1; 3	7; 9	$\Sigma V = 48$	A_1	4	28	784	196	7
V^2	81; 121	9; 25	1; 9	49; 81	$\Sigma V^2 = 376$	A_2	4	20	400	100	5
n_v	2	2	2	2	$n = 8$		8	48	$\Sigma h_A = 296$		
ΣV	20	8	4	16	$H = \frac{48^2}{8} = 288$	B_1	4	24	576	144	6
$(\Sigma V)^2$	400	64	16	256	—	B_2	4	24	576	144	6
$h = \frac{(\Sigma V)^2}{n_x}$	200	32	8	128	$\Sigma h = 368$		8	48	$\Sigma h_B = 288$		

$$C_y = 376 - 288 = 88$$
$$C_z = 376 - 368 = 8$$
$$C_x = 368 - 288 = 80$$
$$C_A = 296 - 288 = 8$$
$$C_B = 288 - 288 = 0$$
$$C_{AB} = 80 - 8 - 0 = 72$$

	A	B	AB	x	z	y
C	8	0	72	80	8	88
η^2	0,09	0,00	0,82	0,91	0,09	1,00
ν	1	1	1	3	4	7
σ^2	8	0	72	26,7	2,0	—
F	4	0	36	13,3		

ν_2 \ ν_1	1	3
4	74,1	56,1
	21,2	16,7
	7,7	6,6

Таблица 20

Сводка результатов дисперсионного анализа при обработке двухфакторных комплексов для малых групп

		A	B	AB	x	z	y
Дисперсии	C	$\Sigma h_A - H$	$\Sigma h_B - H$	$C_x - C_A - C_B$	$\Sigma h - H$	$\Sigma V^2 - \Sigma h$	$\Sigma V^2 - H$
Степень влияния	η	C_A/C_y	C_B/C_y	C_{AB}/C_y	C_x/C_y	C_z/C_y	1,00
Число степеней свободы	ν	$r_A - 1$	$r_B - 1$	$\nu_A \nu_B$	$r_A r_B - 1$	$n - r_A r_B$	$n - 1$
Девиаты	σ^2	C_A/ν_A	C_B/ν_B	C_{AB}/ν_{AB}	C_x/ν_x	C_z/ν_z	
Показатель достоверности влияния	F	$\frac{\sigma^2_A}{\sigma^2_z}$	$\frac{\sigma^2_B}{\sigma^2_z}$	$\frac{\sigma^2_{AB}}{\sigma^2_z}$	$\frac{\sigma^2_x}{\sigma^2_z}$		

Все дальнейшие действия показаны в нижней части табл 19, а соответствующие формулы приведены в табл 20

Для больших групп расчет двухфакторного комплекса ведется по той же схеме, что и однофакторного, с той только разницей, что вместо корреляционного ряда имеется корреляционная решетка

Дисперсионный анализ двухфакторного комплекса для больших групп показан на следующих примерах

Пример 1 На двух соседних пасеках разводились пчелы двух пород A_1 и A_2 В год, когда запасы меда были недостаточными, на каждой пасеке одной трети семей не давали весенней стимулирующей подкормки B_1, другой трети — давали небольшую весеннюю подкормку B_2 и остальной трети давали полную весеннюю подкормку B_3

В конце следующего лета был зарегистрирован сбор меда с каждого улья

Для выяснения преимуществ той или другой породы при разном уровне весенней подкормки полученные наблюдения были обработаны методом дисперсионного анализа Равномерный комплекс не удалось составить, поэтому наблюдения были собраны в пропорциональный комплекс со следующей пропорцией частот для A_1 — 12 16 14, для A_2 — 18 24 21. Отношение частот для A_1 и A_2 одинаково и равно 6 8 7

Результаты дисперсионного анализа показаны в табл 21

В данном случае приходится оперировать с трехзначными

Техника расчетов при дисперсионном анализе двухфакторного комплекса для больших групп

Сбор мела в кг	a	A_1B_1	A_1B_2	A_1B_3	A_2B_1	A_2B_2	A_2B_3	$r_A = 2$, $r_B = 3$: n_y	61	25		n_i	Σfa	$(\Sigma fa)^2$	$h_i = \frac{(\Sigma fa)^2}{n_i}$	$a_i = \frac{\Sigma fa}{n_i}$
75–79,9	+3			3			1	4	4	4	A_1	42	+7	49	1,17	+0,17
70–74,9	+2		1	6			6	13	17	21	A_2	63	−21	441	7,00	−0,33
65–69,9	+1		3	5		3	12	23	40	—		105	−14	$\Sigma h_A = 8,2$		
60–64,9	0	1	8			8	2	19	—	—	B_1	30	−54	2916	97,2	−1,80
55–59,9	−1	4	3		6	10		23	46	—	B_2	40	−13	169	4,2	−0,33
50–54,9	−2	6	1		7	3		17	23	29	B_3	35	+53	2809	80,3	+1,52
45–49,9	−3	1			5			6	6	6		105	−14	$\Sigma h_B = 181,7$		
n_x		12	16	14	18	24	21	105	73	35	—					
Σfa		−19	0	+26	−35	−13	+27	$S_1 = -14$								
$(\Sigma fa)^2$		361	0	676	1225	169	729	$S = 256$								
$h = \frac{(\Sigma fa)^2}{n_x}$		30,1	0	48,3	68,1	7,0	34,7	$\Sigma h = 188,2$								
$a_x = \frac{\Sigma fa}{n_x}$		1,6	0,0	+1,9	−2,0	−0,5	+1,3									

$$H = \frac{14^2}{105} = 1,9$$

$C_y = S_2 - H = 256 - 1,9 = 254,1$

$C_z = S_2 - \Sigma h = 256 - 188,2 = 67,8$

$C_x = \Sigma h - H = 188,2 - 1,9 = 186,3$

$C_A = \Sigma h_A - H = 8,2 - 1,9 = 6,3$

$C_B = \Sigma h_B - H = 181,7 - 1,9 = 179,8$

$C_{AB} = C_x - C_A - C_B = 186,3 - 6,3 - 179,8 = 0,2$

	A	B	AB	x	z	y
C	6,3	179,8	0,2	186,3	67,8	254,1
$\eta^2 = C_i : C_y$	0,02	0,71	0,00	0,73	0,27	1,00
ν	1	2	2	5	99	104
$\sigma^2 = C_i : \nu_i$	6,3	89,9	0,1	37,3	0,68	
$F = \frac{\sigma^2_i}{\sigma^2_z}$	9,3	132,2	0,01	55,0		

ν_2 \ ν_1	1	2	5
99	11,5	7,4	4,5
	6,9	4,8	3,2
	3,9	3,1	2,3

вариантами (72,5 — 63,8 и т. д.), поэтому первичная обработка корреляционной решетки произведена с применением условных отклонений.

Для получения дисперсий по отдельным факторам была составлена дополнительная табличка, помещенная в верхней правой части табл. 21. Эта табличка составляется так же, как и для малых групп. Здесь получены две необходимые величины: $\Sigma h_A = 8{,}2$ и $\Sigma h_B = 181{,}7$.

Расчет дисперсий C_y, C_z, C_x, C_A, C_B, C_{AB} дан в правой части табл. 21.

Окончательные результаты приведены в нижней части табл. 21 по той же форме, что и для малых групп. Тут же выписаны стандартные отношения девиат, взятые из таблицы (см. приложение), в соответствии с имевшимися степенями свободы.

Итог исследования можно кратко представить в следующем виде:

влияние породы	2%
влияние стимулирующей подкормки . .	71 »
влияние сочетания пород с разными дозами подкормки . .	0 »
суммарное влияние породы и подкормки .	73 »
влияние неорганизованных факторов .	27 »
**влияние всех факторов . . **	**100 »**

Влияние породы в данном случае оказалось незначительным, но достаточно достоверным: $P_A > 0{,}99$. При одинаковом разнообразии и среднем уровне весенней подкормки первая порода дала в среднем $62{,}5 + 5 \cdot 0{,}17 = 63{,}35$ *кг* меда с улья, *а вторая* $62{,}5 - 5 \cdot 0{,}33 = 60{,}85$ *кг, причем разность* между этими величинами должна считаться достоверной в такой же степени, как и влияние фактора породы в проведенном исследовании ($P_d = P_A > 0{,}99$).

Влияние весенней подкормки в данных условиях оказалось очень значительным — 71% от влияния всех факторов и в высшей степени достоверным — $P_B > 0{,}999$. Влияние сочетаний изученных факторов оказалось равным нулю. Это значит, что по градациям первого фактора (т. е. как на первую, так и на вторую породы) второй фактор (подкормка) действовал одинаково.

Организованные в наблюдении факторы — порода и подкормка — составили вместе бо́льшую часть общего влияния

(73%), а остальные, неорганизованные — 27%. Исследование дало четкие, достоверные, репрезентативные результаты.

Пример 2. В описываемом исследовании изучались различия указанных пород пчел еще и по их агрессивности (злобности, злобливости), которая оценивалась в баллах — от 1 до 5. Исследования проводились после дифференцированной весенней стимулирующей подкормки (фактор B в предыдущем примере, с градациями B_1, B_2, B_3) и для тех же двух пород пчел (A_1 и A_2).

Полученные материалы также были обработаны методом дисперсионного анализа. Техника обработки в данном случае представляет интерес в том отношении, что результативный признак выражается целыми малыми числами (от 1 до 5). Это позволяет еще более упростить расчеты, что и показано в табл. 22.

Сравнение тех же двух пород, в тех же условиях, но по степени агрессивности дало результаты, выражаемые следующим общим итогом:

влияние породы	57%
влияние подкормки . .	19 »
влияние сочетаний пород с различными дозами подкормки .	3 »
суммарное действие организованных факторов	79 »
влияние неорганизованных факторов .	21 »
влияние всех факторов . .	100 »

По агрессивности пчел породные различия оказались очень значительными: эти различия обусловили 57% общего разнообразия результативного признака; вторая порода имела средний балл за агрессивность — 3,9, а первая всего 2,2, причем разность между этими средними — 1,7 балла — должна считаться столь же достоверной, как и выявленное в опыте влияние породы: $F_A = 267$, $P_A > 0,999$.

Влияние подкормки на последующую агрессивность пчел оказалось достаточным — $\eta^2 = 0,19$ и в сильной степени достоверным — $F_B = 43$, $P_B > 0,999$.

Также вполне достоверным оказалось и различие совместного действия обоих изучавшихся факторов: породы и подкормки — $F_{AB} = 7$, $P_{AB} > 0,999$. Это говорит о том, что эти

Таблица **22**

Техника расчетов двухфакторных дисперсионных комплексов для качественных признаков

V	V^2	A_1: B_1	A_1: B_2	A_1: B_3	A_2: B_1	A_2: B_2	A_2: B_3	$r_A = 2$, $r_B = 3$
5	25						15	
4	16				7	16	6	
3	9		6	7	9	8		
2	4	8	10	7	2			
1	1	4						
n_x		12	16	14	18	24	21	$n = 105$
ΣfV		20	38	35	59	88	99	$\Sigma\Sigma f V = 339$
$(\Sigma fV)^2$		400	1444	1225	3481	7744	9801	
$h = \frac{(\Sigma fV)^2}{n_x}$		33,3	90,3	87,5	193,4	322,7	466,7	$\Sigma h = 1193,9$
ΣfV^2		36	94	91	201	328	471	$\Sigma fV^2 = 1221$
M_x		1,7	2,4	2,5	3,3	3,7	4,7	$M = 3,2$

	n_i	ΣV	$(\Sigma V)^2$	$h_i = \frac{(\Sigma V)^2}{n}$	M_i
A_1	42	93	8649	205,9	2,2
A_2	63	246	60516	960,6	3,9
	105	339	$\Sigma h_A = 1166,5$		3,2
B_1	30	79	6241	208,0	2,6
B_2	40	126	15876	396,9	3,1
B_3	35	134	17956	513,0	3,8
	105	339	$\Sigma h_B = 1117,9$		3,2

$$H = \frac{(\Sigma V)^2}{n} = \frac{339^2}{105} = 1094,4$$

$$C_y = \Sigma V^2 - H = 1221 - 1094,4 = 126,6$$

$$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma h = 1221 - 1193,9 = 27,1$$

$$C_x = \Sigma h - H = 1193,9 - 1094,4 = 99,5$$

$$C_A = \Sigma h_A - H = 1166,5 - 1094,4 = 72,1$$

$$C_B = \Sigma h_B - H = 1117,9 - 1094,4 = 23,5$$

$$C_{AB} = C_x - C_A - C_B = 99,5 - 72,1 - 23,5 = 3,9$$

	A	B	AB	x	z	y
C	72,1	23,5	3,9	99,5	27,1	126,6
$\eta^2 = \frac{C_i}{C_y}$	0,57	0,19	0,03	0,79	0,21	1,00
ν	1	2	2	5	99	104
$\sigma^2 = \frac{C_i}{\nu_i}$	72,1	11,7	1,9	19,9	0,27	
$F = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	267	43	7	74		

ν_2 \ ν_1	1	2	5
99	11,5 6,9 3,9	7,4 4,8 3,1	4,5 3,2 2,3

две породы по-разному увеличивают агрессивность при одинаковом увеличении подкормки. Это ясно видно из изменения средних баллов: первая порода увеличивает агрессивность в среднем на 0,8 балла (с 1,7 до 2,5), а вторая — на 1,4 балла (с 3,3 до 4,7), при том же увеличении подкормки с B_1 до B_3.

Результаты дисперсионного анализа хорошо могут быть показаны графическим способом.

Для двух последних примеров графики даны на рис. 3 и 4.

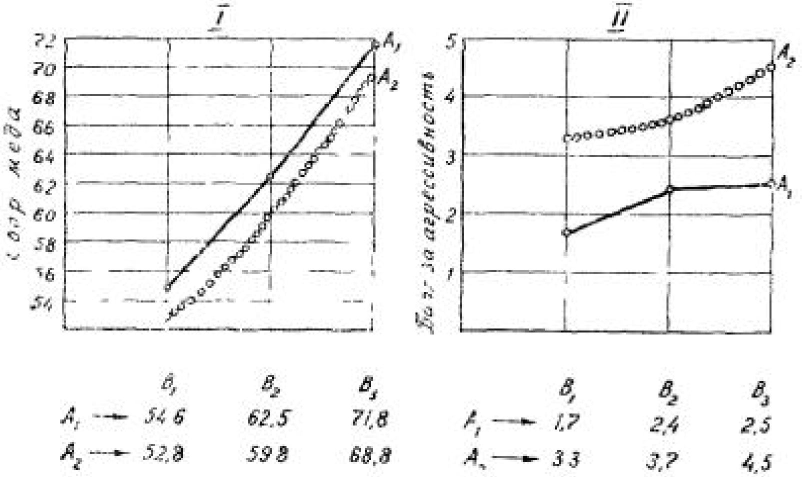

Рис. 3. Изменения сбора меда (I) и агрессивности пчел (II) в зависимости от величины весенней подкормки (В) и породы (А) пчел. Градация B_1 — подкормка отсутствует, B_2 — слабая подкормка, B_3 — полная подкормка. Градация A_1 — первая порода, A_2 — вторая порода.

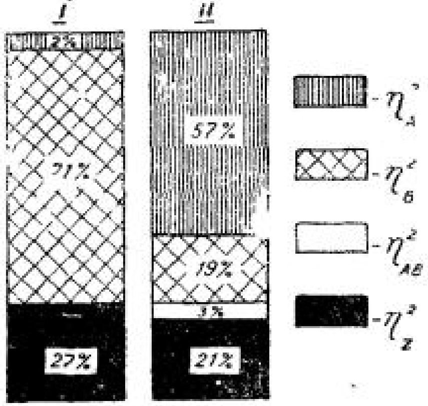

Рис. 4 Степень влияния породных различий (η_A^2), различий в подкормке (η_B^2), различий совместного действия породы и подкормки (η_{AB}^2) и неорганизованных факторов (η_Z^2) на сбор меда (I) и агрессивность пчел (II).

Трехфакторный комплекс

Дисперсионный анализ трехфакторного комплекса не имеет принципиальных отличий от анализа двухфакторного комплекса. С каждым новым фактором сильно возрастает сложность расчетов. Расчеты и анализ трехфакторного дисперсионного комплекса можно показать на следующем примере.

Для выяснения действия двух различных стимуляторов яйценоскости при различной полноценности рациона курнесушек был проведен опыт по методу трехфакторного дисперсионного комплекса с организацией следующих факторов:

1. Фактор A — первый стимулятор с двумя градациями: A_1 — рационы без стимулятора и A_2 — рационы со стимулятором.

2. Фактор B — второй стимулятор с двумя градациями: B_1 — рационы без стимулятора и B_2 — рационы с этим стимулятором.

3 Фактор C — полноценность рациона с двумя градациями: C_1 — обычные для данного хозяйства рационы без добавления минеральных веществ и C_2 — рационы с добавлением минеральных веществ.

Результативным признаком была яйценоскость, выражаемая числом снесенных яиц за опытный период.

Варианты были преобразованы путем вычитания постоянной величины, равной 20.

Такое преобразование не требует никаких поправок к основным показателям дисперсионного анализа (см. табл. 14), и только для средних величин (M), полученных для разных градаций факторов и их сочетаний, требуется очень простая поправка: прибавление 20. Например, если в результате анализа при комбинации градаций A_1 B_1 C_1 получена средняя яйценоскость $M_v = 0$, то это значит, что за опытный период куры снесли в среднем $0 + 20 = 20$ яиц.

Техника расчетов трехфакторного комплекса показана в табл. 23.

В табл. 23 приведен пример для малых групп и равномерных комплексов Этот пример подобран таким образом, что будет пригоден и для больших групп и для пропорциональных комплексов. При больших группах вместо первого ряда требуется отдельно составить корреляционную решетку и ее итоги (n_v, Σfa) выписать в две строки. Это и будут первые две строки расчетного корреляционного ряда, обозначенного в табл. 23 символами n_x и ΣV. Все дальнейшие действия должны производиться, как это показано в табл. 23.

Таблица 23

Техника расчетов при дисперсионном анализе трехфакторного комплекса

	A_1				A_2				$r_A = 2$
	B_1		B_2		B_1		B_2		$r_B = 2$
	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	$r_C = 2$
V	0 0	2,6	5,11	15,25	9,15	20 28	3,5	6 10	
n_x	2	2	2	2	2	2	2	2	$n = 16$
ΣV	0	8	16	40	24	48	8	16	$\Sigma V = 160$
$(\Sigma V)^2$	0	64	256	1 600	576	2304	64	256	—
$h = \frac{(\Sigma V)^2}{n_x}$	0	32	128	800	288	1152	32	128	$\Sigma h = 2560$
ΣV^2	0	40	146	850	306	1184	34	136	$\Sigma V^2 = 2696$
M_i	0	4	8	20	12	24	4	8	$M = 10$

$$H = \frac{(\Sigma V)^2}{n} = \frac{160^2}{16} = 1600$$

$$C_y = \Sigma V^2 - H = 2696 - 1600 = 1096$$

$$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma h = 2696 - 2560 = 136$$

$$C_x = \Sigma h - H = 2560 - 1600 = 960$$

$$C_A = \Sigma h_A - H = 1664 - 1600 = 64$$

$$C_B = \Sigma h_B - H = 1600 - 1600 = 0$$

$$C_C = \Sigma h_C - H = 1856 - 1600 = 256$$

$$C_{AB} = \Sigma h_{AB} - H - C_A - C_B = 2240 - 1600 - 64 - 0 = 576$$

$$C_{AC} = \Sigma h_{AC} - H - C_A - C_C = 1920 - 1600 - 64 - 256 = 0$$

$$C_{BC} = \Sigma h_{BC} - H - C_B - C_C = 1856 - 1600 - 0 - 256 = 0$$

$$C_{ABC} = C_x - C_A - C_B - C_C - C_{AB} - C_{AC} - C_{BC} = 960 - 64 - 0 - 256 - 576 - 0 - 0 = 64$$

	n_{ij}	ΣV	$(\Sigma V)^2$	$h_{ij} = \frac{(\Sigma V)^2}{n_{ij}}$	M_{ij}
A_1	8	64	4096	512	8
A_2	8	96	9216	1152	12
	16	160	$\Sigma h_A = 1664$		10
B_1	8	80	6400	800	10
B_2	8	80	6400	800	10
	16	160	$\Sigma h_B = 1600$		10
C_1	8	48	2304	288	6
C_2	8	112	12544	1568	14
	16	160	$\Sigma h_C = 1856$		10
A_1B_1	4	8	64	16	2
A_1B_2	4	56	3136	784	14
A_2B_1	4	72	5184	1296	18
A_2B_2	4	24	576	144	6
	16	160	$\Sigma h_{AB} = 2240$		10
A_1C_1	4	16	256	64	4
A_1C_2	4	48	2304	576	12
A_2C_1	4	32	1024	256	8
A_2C_2	4	64	4096	1024	16
	16	160	$\Sigma h_{AC} = 1920$		10
B_1C_1	4	24	576	144	6
B_1C_2	4	56	3136	784	14
B_2C_1	4	24	576	144	6
B_2C_2	4	56	3136	784	14
	16	160	$\Sigma h_{BC} = 1856$		10

$\nu_A = r_A - 1 = 2 - 1 = 1$	$\nu_{BC} = \nu_B \nu_C = 1 \cdot 1 = 1$
$\nu_B = r_B - 1 = 2 - 1 = 1$	$\nu_{ABC} = \nu_A \nu_B \nu_C = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
$\nu_C = r_C - 1 = 2 - 1 = 1$	$\nu_x = r_A r_B r_C - 1 = 8 - 1 = 7$
$\nu_{AB} = \nu_A \nu_B = 1 \cdot 1 = 1$	$\nu_z = n - r_A r_B r_C = 16 - 8 = 8$
$\nu_{AC} = \nu_A \nu_C = 1 \cdot 1 = 1$	$\nu_y = n - 1 = 16 - 1 = 15$

	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	x	z	y
C	64	0	256	576	0	0	64	960	136	1096
$\eta^2 = \frac{C_i}{C_y}$	0,06	0,00	0,23	0,53	0,00	0,00	0,06	0,88	0,12	1,00
ν	1	1	1	1	1	1	1	7	8	15
$\sigma^2 = \frac{C_i}{\nu_i}$	64	0	256	576	0	0	64	137	17	
$F = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	3,8	0	15,1	33,9	0	0	3,8	8,1		

ν_2 \ ν_1	1	7
8	25,4 11,3 5,3	12,5 6,2 3,5

Эта таблица может служить кратким справочником по технике расчетов трехфакторного комплекса для малых и больших групп равномерных и пропорциональных комплексов.

Итог всего анализа трехфакторного комплекса в приведенном примере выразился в следующих показателях:

действие первого стимулятора (A) . .	6%
действие второго стимулятора (B) . .	0 »
действие полноценности рациона (C) .	23 »
действие сочетаний первого стимулятора со вторым (AB)	53 »
действие сочетаний первого стимулятора с полноценностью рациона (AC) . .	0 »
действие сочетаний второго стимулятора с полноценностью рациона (BC) . .	0 »
действие сочетаний трех организованных факторов (ABC)	6 »
суммарное действие организованных факторов (x)	**88 »**
действие неорганизованных факторов (z)	12 »
действие всех факторов (y) . .	100 »

Анализ результатов дисперсионного анализа многофакторных комплексов лучше начинать с общих вопросов, касающихся суммарного действия всего комплекса организованных факторов.

Бывает полезно выяснить, насколько сильно влияние организованных факторов на повышение или понижение величины результативного признака относительно того среднего уровня, который поддерживается всеми факторами (организованными и неорганизованными).

В приведенном примере влияние организованных факторов составило 88%. На остальные, неорганизованные факторы пришлось всего 12%. Это указывает на то, что факторы, взятые для исследования, оказались достаточно сильными в их общем влиянии на яйценоскость и что это сильное влияние достоверно: $C_x = 88\%$, $P_x > 0{,}99$.

После анализа общего действия организованных факторов следует перейти к изучению влияний каждого фактора сначала в отдельности, а потом в сочетании с другими факторами.

В приведенном примере выявилось достаточно сильное и достоверное действие фактора C — введение в рацион минеральных веществ: $C_C = \underline{\underline{23\%}}$, $P_C > 0{,}99$.

Как именно выразилось это действие, показывает основной ряд частных средних M_x, представленный в форме графика на рис. 5 (см. также табл. 23; здесь ко всем значениям M_x прибавлено 20).

$$\left.\begin{array}{l} A_1B_1C_1 - 20 \\ A_1B_1C_2 - 24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A_1B_2C_1 - 28 \\ A_1B_2C_2 - 40 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A_2B_1C_1 - 32 \\ A_2B_1C_2 - 44 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A_2B_2C_1 - 24 \\ A_2B_2C_2 - 28 \end{array}\right\}.$$

Из числового ряда (или из графика) ясно видна особенность действия фактора C: при всех градациях факторов A и B фак-

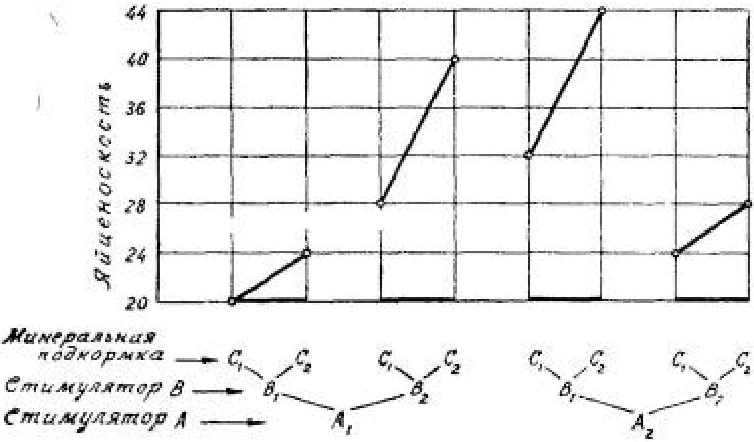

Рис. 5 Влияние на яйценоскость кур минеральной подкормки.
C_1 — подкормка отсутствует, C_2 — подкормка введена при различных градациях двух стимуляторов A и B градации A_1 и B — стимулятор отсутствует, A_2 и B_2 — стимулятор введен

тор C действовал одинаково: при градации C_1 (при отсутствии минеральной подкормки) яйценоскость была низка, при C_2 (с минеральной подкормкой) она повышалась.

Вывод о том, что минеральная подкормка положительно влияет на яйценоскость, оказался настолько достоверным, что стало возможным в качестве первого практического результата проведенного опыта заключить о недостатке минеральных веществ в обычных рационах птичника и уверенно внести рекомендацию: добавлять в рацион всех несушек те минеральные вещества, которые были испытаны в опыте.

Сочтания фактора C с обоими другими оказались равными нулю $C_{AC} = 0$, $C_{BC} = 0$

Это указывает на то, что добавка минеральных веществ повышает яйценоскость одинаково сильно как при наличии, так и при отсутствии каждого из двух испытанных стимуляторов.

Анализ действия каждого из остальных двух факторов показал, что каждый из испытанных стимуляторов в отдельности имеет слабое действие на яйценоскость: $C_A = 6\%$. $C_B = 0\%$. В то же время очень большое и достоверное влияние показало их сочетание:

$$C_{AB} = \underline{\underline{53\%}}, \ P_{AB} > 0{,}999$$

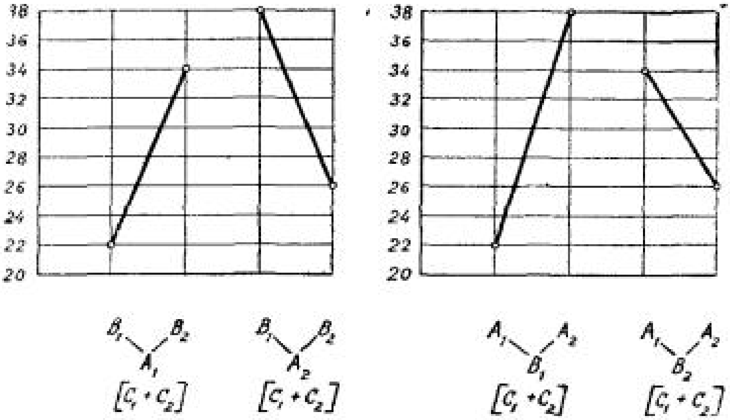

Рис 6 Влияние на яйценоскость кур стимуляторов A и B при усредненных величинах минеральной подкормки (C_1, C_2), градация A_1 и B_1 — стимулятор отсутствует, A_2 и B_2 — стимулятор введен.

Как уже указывалось при анализе двухфакторного комплекса, такие результаты могут быть вследствие неодинакового или обратного действия одного фактора при разных градациях другого. Это становится ясным, если обратить внимание в табл. 23 на ряд частных средних по комбинациям градаций обоих стимуляторов, помещенных в столбце M (к числам ряда прибавлено 20):

$$A_1B_1 - 22 \left\{ \begin{matrix} A_1B_2 - 34 \\ A_2B_1 - 38 \end{matrix} \right\} A_2B_2 - 26.$$

При отсутствии обоих стимуляторов яйценоскость была самая низкая: $A_1B_1 - 22$. Если введен какой-нибудь один стимулятор, яйценоскость резко увеличивается:

$$A_1B_2 - 34, \ A_2B_1 - 38.$$

Если же при одном стимуляторе введен второй, яйценоскость повышается слабо: A_2B_2 — 26

Эти соотношения иллюстрируются рис. 6.

Очевидно, что химическая структура стимуляторов такова, что при совместном введении их в рацион несушек благоприятное действие на яйценоскость в значительной мере взаимно погашается.

Таким образом, вторым практическим выводом из проведенного опыта должна быть уверенная рекомендация применять какой-нибудь один из этих двух стимуляторов (лучше A).

НЕРАВНОМЕРНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Для лучшего усвоения способов анализа неравномерных комплексов необходимо глубже вскрыть различия между этим видом комплексов и равномерными или пропорциональными комплексами.

Равномерные и пропорциональные комплексы имеют особые математические свойства и носят общее название ортогональных комплексов.

Различия между ортогональными и неортогональными комплексами в основном сводятся к следующему:

1. В ортогональных комплексах автоматически нарушены все статистические связи между отдельными факторами. Происходит это вследствие того, что для каждой градации одного фактора все градации другого фактора подбираются с равными или пропорциональными частотами.

В неравномерных же комплексах частоты градаций одного фактора в пределах градаций другого не равны и не пропорциональны. Поэтому в неравномерных комплексах создаются случайные статистические связи между отдельными факторами, что нарушает ортогональность и создает значительные трудности в вычислении и интерпретации таких комплексов.

2. В ортогональных комплексах вследствие отсутствия связей между отдельными факторами сумма частных дисперсий, рассчитанных независимо от дисперсии суммарного действия, всегда равна этой суммарной дисперсии: $C_A + C_B + C_{AB} = C_x$. Это обстоятельство значительно облегчает всю работу с ортогональными комплексами.

В частности, как уже указывалось, именно эта особенность ортогональных комплексов дает возможность вычислять дисперсию сочетаний C_{AB} не непосредственно, а значительно более легким способом, путем вычитания из суммарной дисперсии уже полученных частных дисперсий:

$$C_{AB} = C_x - C_A - C_B.$$

В неравномерных комплексах такое упрощенное вычисление невозможно. В них сумма частных дисперсий $C_A + C_B + C_{AB}$, рассчитанных независимо, не равна дисперсии суммарного действия организованных факторов:

$$C_A + C_B + C_{AB} \neq C_x.$$

В общем случае суммарная дисперсия $C_x = \Sigma D_x^2$ связана с суммой трех частных дисперсий следующим образом:

$$\Sigma D_x^2 = \Sigma D_A^2 + \Sigma D_B^2 + \Sigma D_{AB}^2 + \pi.$$

где π есть дополнительное слагаемое, зависящее от степени тех статистических связей, которые всегда возникают в неравномерных комплексах между отдельными факторами вследствие нарушения ортогональности.

При $\pi = 0$ комплекс ортогонален, это равномерный или пропорциональный комплекс.

При $\pi \neq 0$ комплекс неортогонален; это неравномерный комплекс

3. Указанное выше различие между ортогональными и неортогональными комплексами сказывается только в той части комплекса, которая относится к частным факториальным дисперсиям C_A, C_B, C_{AB} и к дисперсии их суммарного действия C_x.

В другой части комплекса, относящейся к дисперсии по организованным факторам C_x, случайной дисперсии C_z и общей дисперсии C_y, различия между ортогональными и неортогональными комплексами нет. Для обоих видов комплексов всегда справедливо равенство:

$$C_x + C_z = C_y,$$

Происходит это потому, что расчет основных показателей комплекса — C_x, C_z и C_y — ведется всегда по принципу однофакторного комплекса, в котором действует один фактор x, представляющий объединенное действие всех организованных факторов. Однофакторные же комплексы, как уже указывалось, всегда ортогональны.

Различия между ортогональными и неортогональными комплексами можно показать на следующем примере.

Был организован пропорциональный комплекс следующего состава:

	A_1		A_2	
	B_1	B_2	B_1	B_2
V	20; 24	0; 1; 1; 2	1; 8; 12	0;0;1;1;2;2
n_v	2	4	3	6

При проверке этого комплекса было обнаружено, что одна особь в градации A_2B_1 с вариантом 1 попала сюда по ошибке из градации A_1B_2. Когда ошибку исправили, получился новый комплекс:

	A_1		A_2	
	B_1	B_2	B_1	B_2
V	20; 24	0, 1; 1; 2	8 12	0;0;1;1,1;2;2
n_v	2	4	2	7

Перенесение только одного варианта со значением 1 из одной градации в другую резко нарушило ортогональность.

Первый комплекс ортогонален, в нем отношения частот пропорциональны:

$$2 : 4 = 3 : 6 = 1 : 2.$$

Второй комплекс неортогонален, в нем частоты не равны и не пропорциональны:

$$2 : 4 \neq 2 : 7,$$

$$1 : 2 \neq 1 : 3{,}5.$$

Так как оба эти комплекса состоят из одних и тех же вариантов, то для них оказались одинаковыми следующие показатели: $n = 15$, $\Sigma V = 75$ и $\Sigma V^2 = 1201$, а следовательно, и $C_y = 826$.

Перенесение варианта из третьей градации комплекса в четвертую изменило основной ряд частных средних M_x, поэтому изменились и C_x и C_z.

Для первого комплекса $C_z = 76$, а $C_x = 750$;

для второго комплекса $C_z = 22$, а $C_x = 804$;

для обоих комплексов суммы этих дисперсий равны общей дисперсии:

$$\text{I} - 750 + 76 = 826;$$
$$\text{II} - 804 + 22 = 826.$$

Однако сумма частных средних по факторам и по их сочетаниям не равна дисперсии суммарного действия организованных факторов. Дальнейшие расчеты этих показателей приведены в табл. 24 параллельно для обоих комплексов.

В данном случае расчеты частных дисперсий проводились непосредственно и независимо от расчетов суммарной дисперсии.

Основной ряд частных средних M_x, а также ряды средних по фактору A и по фактору B рассчитаны так, как указано в табл. 9, 10, 11 при описании основ дисперсионного анализа.

Средняя для A_1, равная $\frac{44+4}{2+4} = 8$, проставлена в первой и второй градации общего комплекса, которые вместе и составляют первую градацию фактора A.

Средняя для A_2, равная $\frac{21+6}{3+6} = 3$, проставлена в третьей и четвертой градации общего комплекса, так как эти две группы составляют вторую градацию фактора A.

Средняя для $B_1 = \frac{44+21}{2+3} = 13$ проставлена в первой и третьей градации комплекса, так как эти группы составляют первую градацию фактора B.

Средняя для B_2, равная $\frac{4+6}{4+6} = 1$, проставлена во второй и четвертой градациях комплекса, так как эти группы составляют вторую градацию фактора B.

Центральные отклонения по x, A и B найдены путем вычитания из каждой частной средней общей средней по всему комплексу, которая равна $M = \frac{\text{[illegible]}}{15} = 5$.

Центральные отклонения по сочетаниям факторов D_{AB} получены по каждой градации комплекса непосредственно: из каждого центрального отклонения суммарного ряда вычтены центральные отклонения двух первых частных рядов. В результате получены центральные отклонения третьего частного ряда — ряда сочетаний факторов:

$$D_{AB} = D_x - D_A - D_B.$$

Необходимо отметить, что в данном случае действия проводились с центральными отклонениями в первой степени, а не с квадратами этих отклонений.

Пропорциональный комплекс					
	A_1		A		$C_y = 826$
	B_1	B	B_1	B_2	$C_z = 76$, $C_x = 750$ } 826
V	20, 24	0, 1, 1, 2	1, 8, 12	0, 0, 1, 1, 2, 2	$M = 5$
n_x	2	4	3	6	$n = 15$
ΣV	44	4	21	6	$\Sigma V = 75$
M_x	22	1	7	1	
M_A	8	8	3	3	
M_B	13	1	13	1	
D_x	+17	−4	+2	−4	$D_x = M_x - M$
D_A	+3	+3	−2	−2	$D_A = M_A - M$
D_B	+8	−4	+8	−4	$D_B = M_B - M$
$D_{AB} = D_x - D_A - D_B$	+6	−3	4	+2	$+17 - 3 - 8 = +6$ и т. д.
D_x^2	289	16	4	16	
D_A^2	9	9	4	4	
D_B^2	64	16	64	16	
D_{AB}^2	36	9	16	4	
$n_x D_x^2$	578	64	12	96	$C_x = 750$
$n_x D_A^2$	18	36	12	24	$C_A = 90$
$n_x D_B^2$	128	64	192	96	$C_B = 480$ } 750
$n_x D_{AB}^2$	72	36	48	24	$C_{AB} = 180$

циональном и неравномерном комплексах

Неравномерный комплекс					
	A_1		A_2		$C_y = 826$ $C_z = 22$ $C_x = 804$ } 826
	B_1	B	B_1	B	
V	20; 24	0; 1; 1; 2;	8 12	0; 0; 1; 1; 1; 2; 2	$M = 5$
n_x	2	4	2	7	$n = 15$
ΣV	44	4	20	7	$\Sigma V = 75$
M_x	22	1	10	1	
M_A	8	8	3	3	
M_B	16	1	16	1	
D_x	+17	−4	+5	−4	$D_x = M_x - M$
D_A	+3	+3	−2	−2	$D_A = M_A - M$
D_B	+11	−4	+1	−4	$D_B = M_B - M$
$D_{AB} = D_x - D_A - D_B$	+3	−3	−4	+2	$+17 - 3 - 11 = +3$ и т. д.
D_x^2	289	16	25	16	
D_A^2	9	9	4	4	
D_B^2	121	16	121	16	
D_{AB}^2	9	9	16	4	
$n_x D_x^2$	578	64	50	112	$C_x = 804$
$n_x D_A^2$	18	36	8	28	$C_A = 90$ } 864
$n_x D_B^2$	242	64	242	112	$C_B = 660$
$n_x D_{AB}^2$	18	36	32	28	$C_{AB} = 114$

В неравномерных комплексах подобное равенство нарушено только для квадратов центральных отклонений, так как для них, как уже указывалось,

$$D_A + D_B + D_{AB} = D_x,$$

$$D_A^2 + D_B^2 + D_{AB}^2 + \pi = D_x^2.$$

Каждое центральное отклонение возведено в квадрат, и полученные величины в каждой градации комплекса помножены на частоту этой градации, чтобы было возможно сравнение дисперсий.

Все эти действия были проведены параллельно для пропорционального и для неравномерного комплексов.

Суммы квадратов центральных отклонений или дисперсии по факторам A и B и по их сочетаниям показаны в нижней части табл 24.

Оказалось, что в пропорциональном комплексе сумма частных дисперсий ($90 + 480 + 180 = 750$) равна суммарной дисперсии, а в неравномерном комплексе это равенство нарушено: сумма частных дисперсий равна $90 + 660 + 114 = 864$, а суммарная дисперсия равна 804.

Неблагоприятные последствия этого факта сказываются на первых же этапах анализа неравномерных комплексов.

Для определения степени влияния каждого фактора и их сочетаний необходимо каждую из факториальных дисперсий разделить на общую дисперсию. Полученные при этом значения для η_A^2 представляют доли влияния, приходящегося на каждый фактор и каждое их сочетание, причем вследствие ортогональности равномерных и пропорциональных комплексов в них всегда сумма частных влияний равна суммарному влиянию:

$$\eta_A^2 + \eta_B^2 + \eta_{AB}^2 = \eta_x^2.$$

В неравномерных комплексах это равенство не выполнимо, что видно из табл. 25. Для определения степени влияния каждого из факторов в неравномерном комплексе требуется разработка особых способов.

В неравномерных комплексах вклинивается лишнее слагаемое чисто математического характера.

Получается два различных значения суммарной факториальной дисперсии: одно для общей части комплекса ($C_x + C_z = C_y$) и другое для факториальных дисперсий ($C_x = C_A + C_B + C_{AB}$).

В приведенном примере (табл. 25) в первом случае суммарная факториальная дисперсия для неравномерного комплекса равна 804, во втором — 864.

Таблица 25

Сопоставление неравномерного комплекса с ортогональным

	Пропорциональный комплекс				Неравномерный комплекс			
	C		η		C		η	
A	90	750	0,11	0,91	90	864	0,11	1,04
B	480		0,58		660		0,80	
AB	180		0,22		114		0,13	
π	0		0		−60		−0.07	
x	750		0,91	1,00	804		0,97	1,00
z	76		0,09		22		0,03	
y	826		1,00		826		1,00	

Чтобы получить единую структуру комплекса, необходимо заменить эти два разных значения одним значением для всех частей комплекса.

Сделать это можно различными способами, поэтому предложено несколько систем расчета неравномерных дисперсионных комплексов.

В основу **п е р в о й с и с т е м ы** положена замена имеющегося неравномерного комплекса равномерным, с усредненными одинаковыми частотами по градациям.

Величина суммарной факториальной дисперсии C_x определяется на основе невзвешенных простых средних, так же определяются величины дисперсий по отдельным факторам — C_A и C_B.

Этим приемом неортогональная часть комплекса заменяется такой ортогональной, в которой отношения между частными дисперсиями близки к отношениям исходного неравномерного комплекса. Поэтому определение дисперсии сочетаний производится простым вычитанием:

$$C_{AB} = C_x - C_A - C_B.$$

Величина случайной дисперсии определяется так же, как и в ортогональных комплексах:

$$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma h.$$

Величина суммарной дисперсии определяется по сумме составляющих:

$$C_y = C_x + C_z$$

поэтому она всегда отличается от действительной величины этого показателя.

Первая система расчетов неравномерных дисперсионных комплексов
(по Поморскому)

	A_1			A_2			
	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	$r_A = 2$, $r_B = 3$
V	2, 3, 4	3, 3, 3, 4	4, 5, 6, 7; 8	2, 3, 3, 4	7, 8, 8, 9, 9	4, 5, 5, 5, 6	
n_x	3	4	5	4	5	5	$n = 26$
ΣV	9	13	30	12	41	25	
$(\Sigma V)^2$	81	169	900	144	1681	625	
$h = \frac{(\Sigma V)^2}{n_x}$	27,0	42,3	180,0	36,0	336,2	125,0	$\Sigma h = 746,5$
ΣV^2	29	43	190	38	339	127	$\Sigma V^2 = 766$
M_x	3,0	3,3	6,0	3,0	8,2	5,0	$\Sigma M_x = 28,5$
M_x^2	9,00	10,89	36,00	9,00	67,24	25,00	$\Sigma M_x^2 = 157,13$

	Число средних g	ΣM_x	$M_i = \frac{\Sigma M_x}{g}$	M_i^2
A_1	3	12,3	4,1	16,81
A_2	3	16,2	5,4	29,16
	6	28,5	$\Sigma M_A^2 = 45,97$	
B_1	2	6,0	3,0	9,00
B_2	2	11,5	5,8	33,64
B_3	2	11,0	5,5	30,25
	6	28,5	$\Sigma M_B^2 = 72,89$	

$$M = \frac{\Sigma M_x}{r_A r_B} = \frac{28,5}{6} = 4,75 \qquad M^2 = 22,56$$

$$C_A = n\left(\frac{\Sigma M_A^2}{r_A} - M^2\right) = 26\left(\frac{45,97}{2} - 22,56\right) = 11,18$$

$$C_B = n\left(\frac{\Sigma M_B^2}{r_B} - M^2\right) = 26\left(\frac{72,89}{3} - 22,56\right) = 45,24$$

$$C_x = n\left(\frac{\Sigma M_x^2}{r_A r_B} - M^2\right) = 26\left(\frac{157,13}{6} - 22,56\right) = 94,38$$

$$C_{AB} = C_x - C_A - C_B = 94,38 - 11,18 - 45,24 = 37,96$$

$$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma h = 766 - 746,5 = 19,50$$

$$C_y = C_x + C_z = 94,38 + 19,50 = 113,88$$

	A	B	AB	x	z	y
C	11,2	45,2	38,0	94,4	19,5	113,9
η	0,10	0,40	0,33	0,83	0,17	1,00
ν	1	2	2	5	20	25
σ^2	11,2	22,6	19,0	18,9	0,98	
F	11,4	23,0	19,4	19,3		

ν_2 \ ν_1	1	2	5
20	14,8 8,1 4,3	10,0 5,8 3,5	6,5 4,1 2,7

Техника расчетов по первой системе представлена в табл. 26.

В основу второй системы положен тот же принцип замены неортогонального комплекса ортогональным с усредненными частотами по градациям.

Средняя частота градаций находится по средней гармонической, которая рассчитывается по формуле:

$$HM = \frac{n}{\Sigma \frac{1}{V}},$$

где n — число вариантов, V — вариант.

В применении к приведенному примеру (табл. 27) средняя гармоническая частот шести имеющихся градаций рассчитывается так:

$$HM = \frac{r_A r_B}{\Sigma \frac{1}{n_x}} = \frac{2 \cdot 3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}} =$$

$$= \frac{6}{1{,}433} = 4{,}187.$$

Так же, как и в первой системе, величины C_v, C_A и C_B рассчитываются на основе простых невзвешенных средних, но по особым формулам, отличных от тех, которые используются в первой системе.

Величина дисперсии сочетаний определяется вычитанием:

$$C_{AB} = C_x - C_A - C_B,$$

так как комплекс с усредненными одинаковыми частотами является ортогональным.

Абсолютные значения дисперсий получаются значительно меньше фактических, так как все расчеты ведутся на одну градацию со среднегармонической частотой. Поэтому величину случайной дисперсии, получаемую по общей формуле

$$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma h,$$

нужно разделить на величину средней гармонической из фактических частот. Общая дисперсия получается путем сложения составляющих дисперсий:

$$C_v = C_x + C_z,$$

поэтому и эта величина при второй системе получается значительно (в несколько раз) меньше действительной.

Техника расчетов неравномерных комплексов по второй системе показана в табл. 27.

Таблица 27

Вторая система расчетов неравномерных дисперсионных комплексов (по Немчинову)

	A_1			A_2		
	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3
V	2; 3, 4	3, 3; 3, 4	4,5,6, 7; 8	2,3,3, 4	7,8,8, 9; 9	4,5,5, 5, 6
n_x	3	4	5	4	5	5
ΣV	9	13	30	12	41	25
$(\Sigma V)^2$	81	169	900	144	1681	625
$h = \frac{(\Sigma V)^2}{n_x}$	27,0	42,3	180,0	36,0	336,2	125,0
ΣV^2	29	43	190	38	339	127
M_x	3,0	3,3	6,0	3,0	8,2	5,0
M_x^2	9,00	10,89	36,00	9,00	67,24	25,00
$\frac{1}{n_x}$	0,333	0,250	0,200	0,250	0,200	0,200

$r_A = 2$, $r_B = 3$		Число средн, g	ΣM_x	$M_i = \frac{\Sigma M_x}{g}$	M_i^2
	A_1	3	12,3	4,1	16,81
	A_2	3	16,2	5,4	29,16
		6	28,5	$\Sigma M_A = 9,5$	$\Sigma M_A^2 = 45,97$
	B_1	2	6,0	3,0	9,00
$\Sigma h = 746,5$	B_2	2	11,5	5,8	33,64
$\Sigma V^2 = 766$	B_3	2	11,0	5,5	30,25
$\Sigma M_x = 28,5$		6	28,5	$\Sigma M_B = 14,3$	$\Sigma M_B^2 = 72,89$
$\Sigma M_x^2 = 157,13$					
$\Sigma \frac{1}{n_x} = 1,433$					

$$C_x = \Sigma M_x^2 - \frac{(\Sigma M_x)^2}{r_A r_B} = 157,13 - \frac{28,5^2}{6} = 21,75$$

$$C_z = \frac{\Sigma \frac{1}{n_x}}{r_A r_B} (\Sigma V^2 - \Sigma h) = \frac{1,433}{6} (766 - 746,5) = 4,68$$

$$C_y = C_x + C_z = 21,75 + 4,68 = 26,43$$

$$C_A = r_B \left[\Sigma M_A^2 - \frac{(\Sigma M_A)^2}{r_A} \right] = 3 \left[45,97 - \frac{(9,5)^2}{2} \right] = 2,52$$

$$C_B = r_A \left[\Sigma M_B^2 - \frac{(\Sigma M_B)^2}{r_B} \right] = 2 \left[72,89 - \frac{(14,3)^2}{3} \right] = 9,46$$

$$C_{AB} = C_x - C_A - C_B = 21,75 - 2,52 - 9,46 = 9,77$$

	A	B	AB	x	z	y
C	2,5	9,5	9,8	21,8	4,7	26,5
η^2	0,09	0,36	0,37	0,82	0,18	1,00
ν	1	2	2	5	20	25
σ^2	2,5	4,8	4,9	4,4	0,24	—
F	10,0	20,0	20,4	18,2	—	—

ν_2 \ ν_1	1	2	5
	14,8	10,0	6,5
20	8,1	5,8	4,1
	4,3	3,5	2,7

Третья система анализа неравномерных комплексов меняет расчеты только в неортогональной части комплексов:

$$C_x = C_A - C_B + C_{AB}.$$

В этой системе расчет ортогональной части $C_x + C_z = C$ остается таким же, как и в случае ортогонального комплекса.

В неортогональной части вычисления факториальных дисперсий по отдельным факторам C_A и C_B производится так же, как при ортогональных комплексах. Меняется вычисление дисперсии сочетаний C_{AB} — она рассчитывается непосредственно, как это уже было показано в табл. 24.

Таким образом, мы получаем три дисперсии: C_A, C_B и C_{AB}, которые в сумме не равны суммарной дисперсии C_x, найденной из общей ортогональной части неравномерного комплекса.

Эта суммарная дисперсия C_x разделяется на три составляющие пропорционально величинам C_A, C_B и C_{AB} найденным из неортогональной части комплекса.

В результате получается комплекс, общая часть которого полностью совпадает с ортогональной частью исходного неравномерного комплекса, а отношения между частными дисперсиями факториальной части равны соотношениям между частными дисперсиями в исходном комплексе.

Техника расчетов неравномерных комплексов по третьей системе показана в табл. 28.

Сравнение трех описанных систем анализа неравномерных комплексов дано в табл. 29. В этой таблице сопоставлены основные показатели — C, η^2 и F для примера, разобранного в табл 26, 27 и 28.

Оказалось, что, несмотря на резкое различие в абсолютных значениях дисперсий, все три системы дали очень близкие показатели степени влияний η^2 и достоверности влияний F по отдельным факторам, их сочетаниям и суммарному действию.

Поэтому на практике можно пользоваться любой из трех описанных систем.

Первые две системы требуют освоения новых приемов расчета дисперсий на основе простых невзвешенных средних и дают абсолютные значения или неравные, или сильно отличающиеся от действительных. При этих двух системах не требуется непосредственного расчета дисперсий сочетаний.

Третья система для всех показателей, кроме C_{AB}, использует те же приемы расчетов, какие имеются при ортогональных комплексах, что облегчает ее усвоение.

Третья система расчетов неравномерных дисперсионных комплексов

	A_1			A_2			$r_A = 2$, $r_B = 3$
	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	
V	2; 3; 4	3; 3; 3; 4	4; 5; 6; 7; 8;	2; 3; 3; 4	7; 8, 8, 9; 9	4 5, 5, 5, 6	
n_x	3	4	5	4	5	5	$n = 26$
ΣV	9	13	30	12	41	25	$\Sigma V = 130$
$(\Sigma V)^2$	81	169	900	144	1681	625	$H\frac{130^2}{26} = 650$
$h = \frac{(\Sigma V)^2}{n_x}$	27,0	42,3	180,0	36,0	336,2	125,0	$\Sigma h = 746,5$
ΣV^2	29	43	190	38	339	127	$\Sigma V^2 = 766$
M_x	3,0	3,3	6,0	3,0	8,2	5,0	$M = 5,0$
M_A	4,3	4,3	4,3	5,6	5,6	5,6	
M_B	3,0	6,0	5,5	3,0	6,0	5,5	
D_x	− 2,0	− 1,7	+ 1,0	− 2,0	+ 3,2	0,0	
D_A	− 0,7	− 0,7	− 0,7	+ 0,6	+ 0,6	+ 0,6	
D_B	− 2,0	+ 1,0	+ 0,5	− 2,0	+ 1,0	+ 0,5	
D_{AB}	+ 0,7	− 2,0	+ 1,2	+ 0,6	+ 1,6	− 1,1	
D^2_{AB}	0,49	4,00	1,44	0,36	2,56	1,21	
$n_x D^2_{AB}$	1,47	16,00	7,20	1,44	12,80	6,05	

	n_i	ΣV	$(\Sigma V)^2$	$h_i = \frac{(\Sigma V)^2}{n_x}$	M_i
A_1	12	52	2704	225,3	4,3
A_2	14	78	6084	434,6	5,6
			$\Sigma h_A = 659,9$		
B_1	7	21	441	63,0	3,0
B_2	9	54	2916	324,0	6,0
B_3	10	55	3025	302,5	5,5
			$\Sigma h_B = 689,5$		

$C_y = \Sigma V^2 - H = 766 - 650 = 116,0$

$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma h = 766 - 746,5 = 19,5$

$C_x = \Sigma h - H = 746,5 - 650 = 96,5$

$C'_A = \Sigma h_A - H = 659,9 - 650 = 9,9 \ldots (0,11)$

$C'_B = \Sigma h_B - H = 689,5 - 650 = 39,5 \ldots (0,42)$

$C'_{AB} = \ldots\ldots\ldots = 44,96 \ldots (0,47)$

$C'_{AB} = 44,96$ $\quad C'_A + C'_B + C'_{AB} = 94,36 \ldots (1,00)$

	A	B	AB	x	z	y
C	10,7	40,6	45,2	96,5	19,5	116,0
η^2	0,09	0,35	0,39	0,83	0,17	1,00
ν	1	2	2	5	20	25
σ^2	10,7	20,3	22,6	19,3	0,98	—
F	10,9	20,7	23,1	19,7	—	—

$C_A = 96,5 \times 0,11 = 10,7$

$C_B = 96,5 \times 0,42 = 40,6$

$C_{AB} = 96,5 \times 0,47 = 45,2$

$C_A + C_B + C_{AB} = 96,5$

ν_2 \ ν_1	1	2	5
20	14,8	10,0	6,5
	8,1	5,8	4,1
	4,3	3,5	2,7

Таблица 29

Сравнение показателей, полученных по трем системам расчета для одного и того же неравномерного комплекса

	Первая система	Вторая система	Третья система	Значение ортогональной части комплекса
C_A	11,2	2,5	10,7	—
C_B	45,2	9,5	40,6	—
C_{AB}	38,0	9,8	45,2	—
C_x	94,4	21,8	96,5	96,5
C_z	19,5	4,7	19,5	19,5
C_y	113,9	26,5	116	116,0
η_A^2	0,10	0,09	0,09	—
η_B^2	0,40	0,36	0,35	—
η_{AB}^2	0,33	0,37	0,39	—
η_x^2	0,83	0,82	0,83	0,83
η_z^2	0,17	0,18	0,17	0,17
η_y^2	1,00	1,00	1,00	1,00
F_A	11,4	10,0	10,9	—
F_B	23,0	20,0	20,7	—
F_{AB}	19,4	20,4	23,1	—
F_x	19,3	18,3	19,7	19,7

	A_1				A_2				A_3				$r_A = 3$; $r_B = 2$; $r_C = 2$
	B_1		B_2		B_1		B_2		B_1		B_2		
	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	
V	6; 7; 9; 10	11; 13; 15	6, 8	9; 11; 12; 13; 15	6; 10	4; 8; 10; 11; 12	0; 6	5, 8 11	11	0; 1; 2; 3; 4	0; 4	0; 2	—
n_x	4	3	2	5	2	5	2	3	1	5	2	2	$n = 36$
ΣV	32	39	14	60	16	45	6	24	11	10	4	2	$\Sigma V = 263$
$(\Sigma V)^2$	1024	1521	196	3600	256	2025	36	576	121	100	16	4	—
$h = \frac{(\Sigma V)^2}{n_x}$	256	507	98	720	128	405	18	192	121	20	8	2	$\Sigma h = 2475$
ΣV^2	266	515	100	740	136	445	36	210	121	30	16	4	$\Sigma V^2 = 2619$
M_x	8	13	7	12	8	9	3	8	11	2	2	1	$\Sigma M_x = 84$
M_x^2	64	169	49	144	64	81	9	64	121	4	4	1	$\Sigma M_x^2 = 774$

	Число средних g	ΣM_x	$M_i = \frac{\Sigma M_x}{g}$	M_i^2
A_1	4	40	10	100
A_2	4	28	7	49
A_3	4	16	4	16
			$\Sigma M_A^2 = 165$	
B_1	6	51	8,5	72,25
B_2	6	33	5,5	30,25
			$\Sigma M_{AB}^2 = 102{,}50$	
C_1	6	39	6,5	42,25
C_2	6	45	7,5	56,25
			$\Sigma M_C^2 = 98{,}5$	
B_1C_1	3	27	9	8
B_1C_2	3	24	8	64
B_2C_1	3	12	4	16
B_2C_2	3	21	7	49
			$\Sigma M_{BC}^2 = 210$	

	Число средних g	ΣM_x	$M_i = \frac{\Sigma M_x}{g}$	M_i^2
A_1B_1	2	21	10,5	110,25
A_1B_2	2	19	9,5	90,25
A_2B_1	2	17	8,5	72,25
A_2B_2	2	11	5,5	30,25
A_3B_1	2	13	6,5	42,25
A_3B_2	2	3	1,5	2,25
			$\Sigma M_{AB}^2 = 347{,}5$	
A_1C_1	2	15	7,5	56,25
A_1C_2	2	25	12,5	156,25
A_2C_1	2	11	5,5	30,25
A_2C_2	2	17	8,5	72,25
A_3C_1	2	13	6,5	42,25
A_3C_2	2	3	1,5	2,25
			$\Sigma M_{AC}^2 = 359{,}5$	

Таблица 30

$$H = \frac{(\Sigma V)^2}{n} = \frac{263^2}{36} = 1921$$

$$h_x = \frac{\Sigma M_x^2}{r_A r_B r_C} = \frac{774}{12} = 64{,}5$$

$$h_A = \frac{\Sigma M_A^2}{r_A} = \frac{165}{3} = 55{,}0$$

$$h_B = \frac{\Sigma M_B^2}{r_B} = \frac{102{,}5}{2} = 51{,}25$$

$$h_C = \frac{\Sigma M_C^2}{r_C} = \frac{98{,}5}{2} = 49{,}25$$

$$h_{AB} = \frac{\Sigma M_{AB}^2}{r_A r_B} = \frac{347{,}5}{6} = 57{,}92$$

$$h_{AC} = \frac{\Sigma M_{AC}^2}{r_A r_C} = \frac{359{,}5}{6} = 59{,}92$$

$$h_{BC} = \frac{\Sigma M_{BC}^2}{r_B r_C} = \frac{210}{4} = 52{,}5$$

—

$$M = \frac{\Sigma M_x}{r_A r_B r_C} = \frac{84}{12} = 7, \quad M^2 = 49$$

—

$$C_A = n(h_A - M^2) = 36\,(55{,}0 - 49) = 216$$

$$C_B = n(h_B - M^2) = 36\,(51{,}25 - 49) = 81$$

$$C_C = n(h_C - M^2) = 36\,(49{,}25 - 49) = 9$$

$$C_{AB} = n(h_{AB} - h_A - h_B + M^2) = 36\,(57{,}92 - 55{,}0 - 51{,}25 + 49) = 24$$

$$C'_{AC} = n(h_{AC} - h_A - h_C + M^2) = 36\,(59{,}92 - 55{,}0 - 49{,}25 + 49) = 168$$

$$C_{BC} = n(h_{BC} - h_B - h_C + M^2) = 36\,(52{,}5 - 51{,}25 - 49{,}25 + 49) = 36$$

$$C'_{ABC} = n(h_x + h_B + h_B + h_C - h_{AC} - h_{AB} - h_{BC} - M^2) = 36(64{,}5 + 55{,}0 + 51{,}25 + 49{,}25 - 57{,}92 - 59{,}92 - 52{,}5 - 49) = 24$$

$$C_v = \Sigma C' = 216 + 81 + 9 + 24 + 168 + 36 + 24 = 558$$

$$C_y = \Sigma V^2 - H = 2619 - 1921 = 698$$

$$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma h = 2619 - 2475 = 144$$

$$C_x = \Sigma h - H = 2475 - 1921 = 554$$

$$k = \frac{C_x}{C_v} = \frac{554}{558} = 0{,}993$$

ν \ ν_1	1	2	11
24	14,0 7,8 4,3	9,3 5,6 3,4	4,6 3,1 2,2

	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	x	z	y
$C = C'k$	214,5	80,4	8,9	23,8	166,9	35,7	23,8	554	144	698
η^2	0,31	0,12	0,01	0,03	0,24	0,05	0,03	0,79	0,21	1,00
ν	2	1	1	2	2	1	2	11	24	35
σ^2	107,3	80,4	8,9	11,9	83,5	35,7	11,9	50,4	6,0	—
F	17,9	13,4	1,5	2,0	13,9	6,0	2,0	8,4	—	—

Кроме того, при третьей системе расчетов абсолютные значения дисперсий C_x, C_z и C_y, а также отношения между дисперсиями C_x, C_A, C_B и C_{AB} получаются в точности равными тем, которые в действительности имеются в неравномерном комплексе. Несколько усложняет работу по третьей системе нахождение дисперсии сочетаний непосредственным способом.

Указанные три системы могут быть применены при решении двухфакторных комплексов.

Трехфакторный комплекс лучше решать по системе, представляющей комбинацию первой и третьей систем, так как при этом значительно упрощается расчет.

Пример расчета таких комплексов показан в табл. 30, причем для большей наглядности таблица разделена на две части. Эта таблица ясна без особых разъяснений и может служить справочником при решении таких комплексов.

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ КАЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ

Характеристика группы по качественному признаку выражается в указании количества особей в этой группе, имеющих данный признак (пол, окраска, заболевание, наличие реакции на воздействие, достижение определенного порога в развитии и т. д.). Если в группе из n особей у m особей имеется данный качественный признак, то доля этого признака в группе $P = \frac{m}{n}$ имеет то же значение, что и средняя арифметическая для количественных признаков. Поэтому при дисперсионном анализе качественных признаков за общие и частные средние принимаются доли признака в общих и частных группах.

Среднее квадратическое отклонение доли равно

$$\sigma_p = \sqrt{p \cdot q}\,,$$

где

$$p = \frac{m}{n},$$

а

$$q = 1 - \frac{m}{n}\,.$$

Следовательно,

$$\sigma^2 = p \cdot q$$

есть девиата качественного признака в элементарной группе дисперсионного комплекса.

Исходя из этого, дисперсия качественного признака, равная

$$\Sigma D^2 = n\sigma^2,$$

может быть определена следующим образом:

$$C = \Sigma D^2 = n\sigma^2 = npq - n\frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right),$$

откуда

$$C \quad m - \frac{m}{n} \; .$$

Эта формула является основной во всех расчетах дисперсионных комплексов для качественных признаков.

Все остальные показатели дисперсионного анализа качественных признаков рассчитываются точно так же, как и для количественных признаков.

Техника расчетов при дисперсионном анализе для качественных признаков может быть показана на следующих примерах.

Предположим, что для борьбы с аскаридозом свиней был испробован сантонин в пяти увеличивающихся дозах. Результаты наблюдений можно организовать в форме однофакторного дисперсионного комплекса Пятью градациями фактора являются различные дозы сантонина, а результативным признаком -- доля свиней, освобожденных от этой глистной инвазии.

Расчет этого комплекса показан на табл. 31

Результаты анализа показывают вполне достоверное действие сантонина: $F = \underline{\underline{5{,}5}}$, $P > 0{,}999$.

Из анализа видно, что один сантонин не может дать стопроцентную дегельминтизацию: часть свиней (примерно 50%) остается зараженной. Кроме того, анализ показывает, что третья, четвертая и пятая дозы (все увеличивающиеся) уже ничего не прибавляют к результатам второй дозы: доля выздоровевших остается практически той же.

Предположим, что после этого испробовали действие сантонина совместно с каломелем Действие сантонина исследовалось в двух градациях: A_1 — доза сантонина равна нулю, A_2 — доза сантонина равна второй дозе в предыдущем исследовании.

Действие каломеля исследовалось в трех градациях: B_1 — доза каломеля равна нулю и в двух увеличивающихся дозах — B_2 и B_3.

Результаты наблюдений можно свести в двухфакторный комплекс, расчет которого показан в табл. 32.

Таблица 31

Техника расчетов однофакторных дисперсионных комплексов для качественных признаков

(Всего особей в группе — n, из них освободилось от инвазии — m особей)

x	0	1	2	3	4	5	
n	20	30	50	21	20	20	$\Sigma n = 161$
m	0	9	28	11	11	10	$\Sigma m = 69$
m^2	0	81	784	121	121	100	$H = \frac{69^2}{161} = 29{,}6$
$h = \frac{m^2}{n}$	0	2,7	15,7	5,8	6,1	5,0	$\Sigma h = 35{,}3$
$p = \frac{m}{n}$	0,00	0,30	0,56	0,52	0,55	0,50	

	x	z	y
C	$\Sigma h - H = 5{,}7$	$\Sigma m - \Sigma h = 33{,}7$	$\Sigma m - H = 39{,}4$
η^2	0,15	0,85	1,00
ν	$r - 1 = 5$	$\Sigma_n - r = 155$	$\Sigma_n - 1 = 160$
σ^2	1,20	0,22	
F	5,5		

ν_2 \ ν_1	5
155	4,4 3,1 2,3

Такой анализ показывает вполне достоверное действие как сантонина, так и каломеля.

Совместное их введение повышает эффект дегельминтизации примерно до 70%, но все же стопроцентного выздоровления еще не наступает.

Предположим, что решили испытать еще одно средство: суточную выдержку без корма перед дачей сантонина совместно с каломелем.

Техника расчетов двухфакторных дисперсионных комплексов для качественных признаков

	A_1			A_2			$r_A = 2$, $r_B = 3$		Σn	Σm	$(\Sigma m)^2$	$h_i = \frac{(\Sigma m)^2}{\Sigma n}$	p_i
	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3							
n	20	30	30	20	30	30	$\Sigma n = 160$	A_1	80	31	961	12,0	0,39
m	0	16	15	10	22	21	$\Sigma m = 84$	A_2	80	53	2809	35,1	0,66
m^2	0	256	225	100	484	441	$H = \frac{84^2}{160} = 44,1$					$\Sigma h_A = 47,1$	
$\frac{m^2}{n}$	0	8,5	7,5	5,0	16,1	14,7	$\Sigma h = 51,8$	B_1	40	10	100	2,5	0,25
p_x	0,00	0,53	0,50	0,50	0,73	0,70		B_2	60	38	1444	24,1	0,63
								B_3	60	36	1296	21,6	0,60
												$\Sigma h_B = 48,2$	

$$C_y = \Sigma m - H = 84 - 44,1 = 39,9$$
$$C_z = \Sigma m - \Sigma h = 84 - 51,8 = 32,2$$
$$C_x = \Sigma h - H = 51,8 - 44,1 = 7,7$$
$$C_A = \Sigma h_A - H = 47,1 - 44,1 = 3,0$$
$$C_B = \Sigma h_B - H = 48,2 - 44,1 = 4,1$$
$$C_{AB} = C_x - C_A - C_B = 7,7 - 3,0 - 4,1 = 0,6$$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	5
154	11,3	7,3	4,4
	6,8	4,7	3,1
	3,9	3,1	2,3

	A	B	AB	x	z	y
C	3,0	4,1	0,6	7,7	32,2	39,9
η^2	0,08	0,10	0,01	0,19	0,81	1,00
ν	1	2	2	5	154	159
σ^2	3,00	2,05	0,30	1,54	0,21	—
F	14,3	10,0	1,4	7,3	—	—

Техника расчетов трехфакторных дисперсионных комплексов для качественных признаков

	A_1				A				$r_A = 2$, $r_B = 2$, $r_C = 2$
	B_1		B		B_1		B		
	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C	C_1	C	
n	20	30	20	30	20	30	20	30	$\Sigma n = 200$
m	0	0	10	23	10	22	15	30	$\Sigma m = 110$
m	0	0	100	529	100	484	225	900	$H = \frac{110}{200} = 60,5$
$h = \frac{m}{n}$	0	0	5,0	17,6	5,0	16,1	11,3	30,0	$\Sigma h = 85,0$
p_x	0,00	0,00	0,50	0,77	0,50	0,73	0,75	1,00	

$C_x = \Sigma m - H = 110 - 60,5 = 49,5$
$C_z = \Sigma m - \Sigma h = 110 - 85,0 = 25,0$
$C_x = \Sigma h - H = 85 - 60,5 = 24,5$

$C_A = \Sigma h_A - H = 70,18 - 60,5 = 9,7$
$C_B = \Sigma h_B - H = 71,08 - 60,5 = 10,6$
$C_C = \Sigma h_C - H = 62,19 - 60,5 = 1,7$

$C_{AB} = \Sigma h_{AB} - C_A - C_B - H = 82,76 - 9,7 - 10,6 - 60,5 = 2,0$
$C_{AC} = \Sigma h_{AC} - C_A - C_C - H = 72,02 - 9,7 - 1,7 - 60,5 = 0,1$
$C_{BC} = \Sigma h_{BC} - C_B - C_C - H = 73,02 - 10,6 - 1,7 - 60,5 = 0,2$

$C_{ABC} = C_x - C_A - C_B - C_C - C_{AB} - C_{AC} - C_{BC} =$
$= 24,5 - 9,7 - 10,6 - 1,7 - 2,0 - 0,1 - 0,2 = 0,2$

	Σn	Σm	$(\Sigma m)^2$	$h_i = \frac{(\Sigma m)^2}{\Sigma n}$	p_i
A_1	100	33	1089	10,89	0,33
A	100	77	5929	59,29	0,77
			$\Sigma h_A = 70,18$		
B_1	100	32	1024	10,24	0,32
B	100	78	6084	60,84	0,78
			$\Sigma h_B = 71,08$		
C	80	35	1225	15,31	0,44
C	120	75	5625	46,88	0,63
			$\Sigma h_C = 62,19$		
$A\,B$	50	0	0	0	0,00
$A\,B$	50	33	1089	21,78	0,66
$A\,B_1$	50	32	1024	20,48	0,64
A_2B	50	45	2025	40,50	0,90
			$\Sigma h_{AB} = 92,76$		
$A\,C_1$	40	10	100	2,50	0,25
$A\,C$	60	23	529	8,82	0,38
$A\,C_1$	40	25	625	15,63	0,63
$A\,C$	60	52	2704	45,07	0,87
			$\Sigma h_{AC} = 72,02$		
B_1C	40	10	100	2,50	0,25
B_1C	60	22	484	8,07	0,37
$B\,C_1$	40	25	625	15,63	0,63
B_2C	60	53	2809	46,82	0,88
			$\Sigma h_{BC} = 73,02$		

	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	x	z	y
C	9,7	10,6	1,7	2,0	0,1	0,2	0,2	24,5	25,0	49,5
$\eta_i^2 = \frac{C_i}{C_y}$	0,20	0,21	0,03	0,04	0,00	0,00	0,01	0,49	0,51	1,00
ν	1	1	1	1	1	1	1	7	192	199
$\sigma^2 = \frac{C_i}{\nu_i}$	9,7	10,6	1,7	2,0	0,1	0,2	0,2	3,5	0,13	
$F = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	74,6	81,5	13,1	15,4	0,8	1,5	1,5	26,9		

ν_z \ ν	1	7
192	11,2 6,8 3,9	3,7 2,7 2,0

После проведения таких опытов результаты их можно свести в трехфакторный дисперсионный комплекс со следующими факторами:

A — действие сантонина: A_1 — доза равна 0, A_2 — доза, установленная в первом опыте;

B — действие каломеля: B_1 — доза равна 0, B_2 — доза, установленная во втором опыте;

C — действие предварительной выдержки без корма перед дачей сантонина и каломеля: C_1 — без выдержки, C_2 — с выдержкой.

Расчет такого трехфакторного комплекса показан в табл. 33.

Оказалось, что каждый из трех факторов (сантонин, каломель и предварительное голодание) оказывают дегельминтизирующее действие при наличии той комбинации других факторов, какая была в проводимых опытах.

Последние замечания особенно необходимо помнить при анализе действия предварительного голодания (фактор C): само по себе голодание в течение 24 часов не может излечить от аскаридоза. В изученном же трехфакторном комплексе действие каждого фактора, в том числе и голодания, изучалось при усредненных значениях двух остальных факторов. Поэтому указанное действие голодания ($\eta^2_C = \underline{\underline{3\%}}$, $F_C = \underline{\underline{\underline{13,1}}}$ $P_C > 0,999$) выявилось только при условии определенного действия сантонина и каломеля в тех комбинациях, которые были организованы в дисперсионном комплексе.

Общие же результаты анализа показывают в высшей степени достоверное дегельминтизирующее действие изученных трех факторов: сантонина, каломеля и предварительного суточного голодания. Такие общие выводы находятся в полном соответствии с методами борьбы с аскаридозом свиней, применяемыми на практике. При этой инвазии прописывается дача сантонина совместно с каломелем после 24-часового голодания.

СРАВНЕНИЕ СРЕДНИХ ВНУТРИ ДИСПЕРСИОННОГО КОМПЛЕКСА

Дисперсионный анализ дает возможность значительно усовершенствовать способы сравнения средних величин и получить более точные показатели достоверности разности между частными средними для групп, составляющих дисперсионный комплекс.

Обычно достоверность разности между двумя выборочными средними определяется критерием достоверности разности:

$$t_d = \frac{d}{m_d},$$

где $d = M_1 - M_2$ — разность между двумя выборочными средними,

m_d — ошибка репрезентативности разности, квадрат которой равен сумме квадратов ошибок репрезентативности сравниваемых средних: $m_d^2 = m_1^2 + m_2^2$.

Если

$$t_d \geq 3{,}0, \ P = 0{,}997;$$

$$t_d \geq 2{,}5, \ P = 0{,}990;$$

$$t_d \geq 2{,}0, \ P = 0{,}950.$$

Здесь P — вероятность того, что разность между выборочными средними правильно репрезентатирует генеральную разность между соответствующими генеральными средними. Первая степень достоверности ($t_d = 2{,}0$, $P_d = 0{,}95$) достаточна при ориентировочных исследованиях, вторая степень достоверности ($t_d = 2{,}5$, $P_d = 0{,}99$) должна быть в исследованиях более ответственных, например, в работах, связанных с экономикой, третья степень достоверности ($t_d = 3{,}0$, $P_d = 0{,}997$) обязательна при изучении действия вредных или ядовитых агентов, при решении спорных вопросов теории и практики и др.

Приведенная формула показывает, что достоверность полученной в опыте выборочной разности зависит только от ошибок репрезентативности средних (m_1 и m_2): чем больше эти ошибки, тем менее достоверна разность между этими выборочными средними.

Поэтому правильность суждений о достоверности полученной в опыте разности целиком зависит от того, насколько точно определены ошибки репрезентативности сравниваемых выборочных средних.

Математическая статистика дает точную формулу для расчета ошибки репрезентативности выборочной средней арифметической:

$$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}},$$

где σ — среднее квадратическое отклонение для всей генеральной совокупности (а не для данной выборки!), из которой взяты одна или несколько выборок;

n — численность каждой отдельной выборки;

N — численность генеральной совокупности.

Когда численность выборки становится равной численности генеральной совокупности, множитель $\sqrt{1 - \frac{n}{N}} = 0$, а значит, и ошибка средней репрезентативности равна нулю. Если численность генеральной совокупности бесконечно велика, множитель $\sqrt{1 - n/N} = 1$ и формула приобретает вид

$$m = \sigma / \sqrt{n}.$$

Использование точной формулы для определения ошибки репрезентативности средней арифметической требует:

а) одинакового значения сигмы для всех выборок, относящихся к одной генеральной совокупности;

б) определения величины такого среднего квадратического отклонения, которое характеризует разнообразие не каждой отдельной выборки, а генеральной совокупности;

в) поскольку значения критерия достоверности разности (2,0; 2,5; 3,0) и соответствующие вероятности (0,95; 0,99; 0,997) установлены, исходя из закономерностей формирования случайного разнообразия (нормальное распределение), генеральная сигма, стоящая в числителе формулы, есть среднее квадратическое отклонение случайной, неорганизованной изменчивости признака.

В большинстве экспериментов применение точной формулы для нахождения ошибки средней арифметической невозможно, так как неизвестна генеральная сигма.

Поэтому на практике применяется приближенная формула:

$$m = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}},$$

где $\tilde{\sigma}$ — среднее квадратическое отклонение признака в данной изучаемой выборке (а не генеральной совокупности),

n — численность выборки.

Условия использования приближенной формулы отличаются от условий использования точной формулы: вместо единой генеральной сигмы берется выборочная сигма, неодинаковая для разных выборок. Это неправильно характеризует ту степень случайного разнообразия, которое свойственно изучаемому признаку в данной генеральной совокупности.

Организовав в исследовании дисперсионный комплекс, можно значительно уменьшить искажения, связанные с использованием приближенной формулы.

Для этого при сравнении частных средних внутри дисперсионного комплекса необходимо для всех средних при вычислении ошибки репрезентативности за показатель разнообразия взять сигму случайного разнообразия σ_z.

В этом случае ошибка репрезентативности для любой частной средней данного дисперсионного комплекса будет определяться по формуле:

$$m_i = \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}};$$

где $\sigma_z = \sqrt{\sigma_z^2}$ — сигма случайного разнообразия, единая для всех частных групп данного комплекса или среднее квадратическое отклонение той части разнообразия результативного признака, которая обусловлена неорганизованными факторами;

n_i — численность той группы (по градациям факторов), для которой рассчитана данная частная средняя.

Эта формула дает результаты, более близкие к тем, которые получились бы, если можно было бы использовать точную формулу для ошибки средней.

Используя это общее значение среднего квадратического отклонения, можно упростить и самую формулу для нахождения ошибки разности двух средних из одного комплекса, и технику вычислений достоверности разности между этими средними.

Для этого несколько преобразуем приведенную выше формулу критерия достоверности разности:

$$t_d = \frac{d}{m_d}.$$

Квадрат критерия достоверности разности

$$F_d = t_d^2 = \frac{d^2}{m_d^2} = \frac{d^2}{\frac{\sigma_z^2}{n_1} + \frac{\sigma_z^2}{n_2}},$$

$$\frac{\sigma_z^2}{n_1} + \frac{\sigma_z^2}{n_2} = \sigma_z^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) = \sigma_z^2 \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Таким образом, критерием достоверности разности любых двух частных средних из одного дисперсионного комплекса может быть показатель

$$F_d = t_d^2 = \frac{d^2}{\sigma_z^2} \cdot \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \text{ при } \left\{ \begin{matrix} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = \nu_z \end{matrix} \right\}.$$

Здесь d — разность между любыми двумя частными из одного дисперсионного комплекса;

σ_z^2 — девиата неорганизованных факторов этого комплекса;

n_1 и n_2 — численности частных групп, для которых взяты сравниваемые средние;

ν_z — число степеней свободы для неорганизованных факторов изучаемого комплекса;

ν_1 и ν_2 — числа степеней свободы, необходимые для определения стандартных отношений девиат, а значит, и достоверности

Стандартные отношения девиат, как уже указывалось, находятся по таблице, данной в приложении. Требуемые отношения девиат находятся в первом столбце (так как $\nu_1 = r - 1 = 2 - 1 = 1$) и в той строке, которая соответствует числу степеней свободы неорганизованных факторов ($\nu_2 = \nu_z$).

Если сравниваются средние групп одинаковой численности, то показатель достоверности разности частных средних упрощается: при $n_1 = n_2 = n$

$$F_d = \frac{d^2}{\sigma_z^2} \cdot \frac{n}{2} \text{ при } \left\{ \begin{matrix} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = \nu_z \end{matrix} \right\}.$$

Если значение F_d превышает третью степень достоверности, то оно подчеркивается тремя чертами, если вторую степень — двумя и если первую степень — одной чертой. Значения F_d, меньшие первой степени достоверности, подчеркиваются волнистой линией.

Определение достоверности разности частных средних внутри дисперсионного комплекса можно показать на следующих примерах.

Пример 1. Обычные комплексы. В исследовании, анализ которого дан в табл. 22, выявлено влияние породы пчел A_1 и A_2 и весенней стимулирующей подкормки (B_1, B_2, B_3) на агрессивность пчел. В процессе обработки первичных материалов получены частные средние.

Обозначим средний балл для первой породы при отсутствии подкормки (первая градация фактора B) через M_{11}. В нашем исследовании оказалось $M_{11} = 1,7$. Для первой породы при слабой подкормке соответственно имеем $M_{12} = 2,4$, для первой породы при полной подкормке $M_{13} = 2,5$. Для второй породы были получены следующие частные средние: $M_{21} = 3,3$, $M_{22} = 3,7$, $M_{23} = 4,7$. Кроме того, получены средние баллы для всех групп первой породы $A_{10} = 2,2$, для второй породы $A_{20} = 3,9$, для обеих пород без подкормки $B_{01} = 2,6$, со слабой подкормкой $B_{02} = 3,1$ и при полной подкормке $B_{03} = 3,8$.

В дополнение к результатам дисперсионного анализа, представленным в результативной табличке (см. табл. 22), могут иметь практическое значение решения некоторых частных вопросов путем выяснения достоверности различия между частными средними.

В разбираемом примере потребовалось выяснить, как влияет увеличение подкормки с B_2 до B_3 на агрессивность пчел для каждой из изученных пород.

Для этого надо сравнить частные средние M_{12} с M_{13} для первой породы и M_{22} с M_{23} — для второй. В данном случае оценку достоверности разности средних надо сделать по формуле $F_d = \frac{d^2}{\sigma_z^2} \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}$, приняв за σ_z^2 (как и для любой средней данного комплекса) девиату неорганизованных факторов, уже найденную при решении этого дисперсионного комплекса ($\sigma_z^2 = 0,27$ при $\nu_z = 99$).

Для первой породы расчет дает следующие результаты:

$$n_{12} = 16, \ M_{12} = 2,4, \ d = 0,1, \ \sigma_z^2 = 0,27;$$

$$n_{13} = 14, \ M_{13} = 2,5, \ d^2 = 0,01, \ \nu_z = 99;$$

$$F_d = \frac{0{,}01}{0{,}27} \cdot \frac{16 \cdot 14}{16 + 14} = \underset{\sim}{0{,}3} \qquad \left\{ \begin{matrix} 11{,}5 \\ 6{,}9 \\ 3{,}9 \end{matrix} \right\}.$$

Критерий достоверности различия средних $F_d = 0{,}3$ оказался значительно меньше наименьшего из стандартных отношений девиат, найденных по таблице для $\nu_1 = 1$, $\nu_z = 99$ (соответствующие значения выписаны в фигурных скобках рядом со значением F_d).

Разность между средними оказалась недостоверной. Это значит, что то увеличение агрессивности, которое наблюдалось в опыте для первой породы, не может быть обобщено. На основе проведенного исследования нельзя заключить, что все пчелы первой породы будут повышать агрессивность при повышении весенней стимулирующей подкормки с B_2 до B_3.

В результате аналогичного расчета для второй породы имеем:

$$n_{22} = 24, \; M_{22} = 3{,}7, \; d = 1{,}0, \; \sigma_z^2 = 0{,}27;$$

$$n_{23} = 21, \; M_{23} = 4{,}7, \; d^2 = 1{,}00, \; \nu_z = 99;$$

$$F_d = \frac{1}{0{,}27} \cdot \frac{24 \cdot 21}{24 + 21} = \underline{\underline{41{,}4}} \qquad \left\{ \begin{matrix} 11{,}5 \\ 6{,}9 \\ 3{,}9 \end{matrix} \right\}.$$

Разность между средними оказалась в высокой степени достоверна ($P_d > 0{,}999$).

Это значит, что для второй породы можно с большой уверенностью обобщить результаты выборочного исследования и утверждать, что все пчелы этой породы (а не только та их часть, которая была изучена в опыте) будут повышать агрессивность при увеличении весенней стимулирующей подкормки с B_2 до B_3.

Таким же способом можно сравнить любую пару средних из этого дисперсионного комплекса. При всех этих сравнениях надо брать одни и те же величины. $\sigma_z^2 = 0{,}27$, $\nu_1 = 1$, $\nu_z = 99$ и соответствующие стандартные отношения девиат: 11,5; 6,9 и 3,9.

Например, если требуется оценить достоверность влияния полной весенней подкормки совместно для обеих пород, достаточно сравнить общие средние, приведенные в правом верхнем углу табл 22 ($M_{01} = 2{,}6$ и $M_{03} = 3{,}8$ при $n_{01} = 30$ и $n_{03} = 35$). Расчеты дают следующий результат

$$n_{01} = 30, \; M_{01} = 2{,}6, \; d = 1{,}2, \; \sigma_z^2 = 0{,}27;$$

$$n_{03} = 35, \; M_{03} = 3{,}8, \; d^2 = 1{,}44,$$

$$F_d = \frac{1{,}44}{0{,}27} \cdot \frac{30 \cdot 35}{30 + 35} = \underline{\underline{85{,}9}} \qquad \left\{ \begin{matrix} 11{,}5 \\ 6{,}9 \\ 3{,}9 \end{matrix} \right\}.$$

Пример 2. Комплексы с преобразованными вариантами. В исследовании, анализ которого дан в табл. 21, изучалось влияние породы пчел (A_1 и A_2) и весенней стимулирующей подкормки (B_1, B_2, B_3) на сбор меда с улья за следующее лето.

Получены средние сборы меда по тем же группам внутри дисперсионного комплекса, что и в предыдущем примере. Однако в данном случае средние получены не в обычных единицах (килограммах меда), а в условных отклонениях, выраженных в классовых промежутках. Так получилось потому, что для облегчения вычислений первичные варианты были преобразованы. Преобразование это заключалось в следующем.

Варианты были разнесены по классам, и вследствие этого все варианты, попавшие в один класс, получили общее одинаковое значение, равное средине класса. Затем из средины каждого класса была вычтена условная средняя (в данном комплексе $A = 62{,}5$), полученные разности разделены на величину классового промежутка (в данном случае на $k = 5$). В результате и получился тот ряд условных отклонений, выраженных в классовых промежутках ($a = -3$; -2; -1; 0; $+1$; $+2$; $+3$), который и прошел всю дальнейшую обработку.

Как уже указывалось, такое преобразование значений результативного признака $\left(V' = \bar{a} = \frac{V - A}{k}\right)$ совершенно не сказывается на величине показателя F. Поэтому сравнение средних внутри таких дисперсионных комплексов можно сделать по средним $a = \frac{\Sigma fa_i}{n_i}$, не переводя их в средние обычного вида: $= M\frac{\Sigma V_i}{n_i}$. Например, можно следующим образом определить, достоверно ли влияние увеличения подкормки с B_2 до B_3 на сбор меда пчелами первой породы, путем сравнения средних $\bar{a}_{12} = 0{,}0$ и $\bar{a}_{13} = +1{,}9$ при

$$n_{12} = 16,\ n_{13} = 14,\ \sigma_z^2 = 0{,}69,\ \nu_z = 99;$$

$$n_{12} = 16,\ \bar{a}_{12} = 0{,}0,\ d = 1{,}9,\ \sigma_z^2 - 0{,}69;$$

$$n_{13} = 14,\ \bar{a}_{13} = +1{,}9,\ d^2 - 3{,}61,\ \nu_z = 99;$$

$$F = \frac{3{,}61}{0{,}69} \cdot \frac{16 \cdot 14}{16 + 14} = \underline{\underline{39{,}0}} \qquad \left\{\begin{matrix} 11{,}5 \\ 6{,}9 \\ 3{,}9 \end{matrix}\right\}.$$

Если потребуется получить обычные средние по группам дисперсионного комплекса, обработанного на основе преобразованных значений результативного признака, то это можно сделать, пользуясь указаниями табл. 14.

Чтобы получить в обычных единицах измерения среднюю арифметическую, необходимо величину a помножить на величину классового промежутка и к полученному произведению прибавить условную среднюю. Средние только что разобранного примера получат следующие значения:

$$M_{12} = 62{,}5 + 5 \cdot 0{,}0 = 62{,}5;$$
$$M_{13} = 62{,}5 + 5 \cdot 1{,}9 = 72{,}0.$$

Чтобы получить девиату в обычных единицах, необходимо девиату, полученную для преобразованных величин, помножить на квадрат классового промежутка. Для разбираемого комплекса (табл 21) величина девиаты неорганизованных факторов примет следующее значение:

$$\sigma_z^2 = k^2 \cdot (\sigma_z^2)'_a = 25 \cdot 0{,}69 = 17{,}25.$$

Сравнение восстановленных средних дает тот же результат, как и сравнение средних, полученных на преобразованных вариантах:

$$n_{12} = 16,\ M_{12} = 62{,}5,\ \ d = 9{,}5,\ \sigma_z^2 = 17{,}25;$$
$$n_{13} = 14,\ M_{13} = 72{,}0,\ d^2 = 90{,}25,\ \nu_z = 99;$$
$$F_d = \frac{90{,}25}{17{,}25} \cdot \frac{16 \cdot 14}{16 + 14} = \underline{\underline{39{,}0}} \qquad \left\{ \begin{matrix} 11{,}5 \\ 6{,}9 \\ 3{,}9 \end{matrix} \right\}.$$

Пример 3. Определение объема повторных исследований. В исследовании, анализ которого дан в табл. 15, изучалось влияние стимулятора ожирения на привесы подопытных животных. В однофакторном дисперсионном комплексе получены три частных средних: $M_0 = 4$ — для контрольной группы (без применения стимулятора), $M'_{10} = 12$ — для первой опытной группы (доза стимулятора равна 10) и $M'_{20} = 2$ — для второй опытной группы (доза стимулятора равна 20).

В дополнение к обычным результатам дисперсионного анализа потребовалось выяснить влияние на привесы одной первой дозы стимулятора, для чего необходимо сравнить средние $M'_0 = 4$ и $M'_{10} = 12$. При этом надо вспомнить, что частные средние данного комплекса получены на основе преобразованных вариантов. Преобразование велось путем вычитания минимального привеса — 20 из каждого значения результативного признака. Как указано в табл. 14, такое преобразование ($V' = V - A$) сказывается только на величине средней арифметической ($M = M' + A$), все же остальные величины, получаемые при дисперсионном анализе: C, η^2, σ^2 и F совершенно не искажаются. Поэтому сравнение средних в разбираемом комплексе можно сделать на основе преобразованных значений, и так как этот комплекс равномерный, то по формуле $F_d = \frac{d^2}{\sigma_z^2} \cdot \frac{n}{2}$ получим.

$$n_0 = 2,\ M_0 = 4,\ d = 8,\ \sigma_z^2 = 16;$$

$$n_{10} = 2,\ M_{10} = 12,\ d^2 = 64,\ \nu_z = 3;$$

$$F_d = \frac{64}{16} \cdot \frac{2}{2} = 4 < \left\{ \begin{matrix} 167{,}5 \\ 34{,}1 \\ 10{,}1 \end{matrix} \right\}.$$

Три степени достоверности F взять из таблицы стандартных отношений девиат для $\nu_1 = 1$ и $\nu_2 = \nu_z = 3$.

Разница между средними оказалась недостоверной, очевидно, вследствие малочисленности изученной выборки. В таких случаях требуется повторение исследования на более многочисленном материале. При этом возникает вопрос: до какой величины надо увеличить число подопытных объектов? Приближенное решение вопроса дает следующая формула:

$$n' = \frac{n + n\frac{F'}{F}}{2} = \frac{n}{2}\left(1 + \frac{F'}{F}\right),$$

где n' — достаточная численность групп,

n и F — соответственно численность и показатель достоверности всего комплекса, анализ которого не дал достоверных результатов;

F' — желаемая величина показателя достоверности различии (стандартного отношения девиат) при степенях свободы ν_1 и ν_2, бывших в комплексе, который не дал достоверных результатов

Для разбираемого примера, если достаточна первая степень достоверности, желательная численность всего комплекса будет равна $n = \frac{6}{2} \cdot \left(1 + \frac{9{,}6}{3{,}5}\right) = 11{,}2 \approx 12$ объектам (по четыре варианта в каждую из трех градаций фактора).

Такое исследование было проведено, результаты его даны в табл. 34.

В данном случае при увеличении численности подопытного материала до величины, найденной по приведенной формуле, получен достоверный результат с заранее намеченной

Повторение исследования анализ которого дан в табл 15 на более обширном материале (на 12 объектах вместо 6)

x	0	10	0	$r = 3$
V	0, 2, 6, 8	7, 12, 12, 17	0, 2, 2, 4	$\Sigma V = 72$
V^2	0, 4, 36, 64	49, 144, 144, 289	0, 4, 4, 16	$\Sigma V^2 = 754$
n_x	4	4	4	$n = 12$
ΣV_x	16	48	8	—
$(\Sigma V_x)^2$	256	2304	64	—
$h = \frac{(\Sigma V_x)^2}{n_x}$	64	576	16	$\Sigma h = 656$
$M_x = \frac{\Sigma V_x}{n_x}$	4	12	2	$M = 6$

$$H = \frac{(\Sigma V)^2}{n} = \frac{72^2}{12} = 432$$

$$C_y = \Sigma V^2 - H = 754 - 432 = 322$$

$$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma h = 754 - 656 = 98$$

$$C_x = \Sigma h - H = 656 - 432 = 224$$

	x	z	y
C	224	98	322
η	0,70	0,30	1,00
ν	2	9	11
σ	112	10,9	—
F	10,3	ν	2
		9	16,4 8,0 4,3

степенью достоверности. Это получилось потому, что в увеличенном комплексе не изменилось основное отношение дисперсий:

$$\eta^2 = \frac{C_x}{C_y} = 0{,}70.$$

Так бывает не всегда. Возможен и такой случай, когда при увеличении объема комплекса достоверность результата все же остается ниже допустимой степени. В таких случаях целесообразно еще раз рассчитать достаточную численность комплекса и провести новое повторение опыта. Если и в этом случае не получится достоверных результатов, то следует заключить, что данный агент в изученных градациях не производит статистического влияния на результативный признак на том уровне развития его и при тех условиях, при которых проводились повторные исследования.

Если бы в разбираемом примере потребовалась вторая степень достоверности, то достаточная численность комплекса определилась бы следующим образом (если принять второе отношение девиат по степеням свободы первого комплекса, не давшего достоверных результатов):

$$n' = \frac{6}{2}\left(1 + \frac{30{,}8}{3{,}5}\right) = 29{,}4 \approx 30 \quad (10 + 10 + 10),$$

а при необходимости получить третью степень достоверности объем комплекса должен быть увеличен до

$$n' = \frac{6}{2}\left(1 + \frac{148{,}5}{3{,}5}\right) = 130{,}5 \approx 132 \quad (44 + 44 + 44).$$

В разбираемом примере увеличенный комплекс дал достоверный результат (см. табл. 34). В этом комплексе сравнение двух средних $M_0 = 4$ и $M_{10} = 12$ (таких, которые сравнивались в первоначальном неувеличенном комплексе) дает тоже вполне достоверный результат:

$$n_0 = 4,\ M_0 = 4,\ d = 8,\ \sigma_z^2 = 10{,}9;$$

$$n_{10} = 4,\ M_{10} = 12,\ d^2 = 64,\ \nu_z = 9;$$

$$F_d = \frac{64}{10{,}9} \cdot \frac{4}{2} = \underline{\underline{11{,}8}} \quad \left\{\begin{matrix} 22{,}9 \\ 10{,}6 \\ 5{,}1 \end{matrix}\right\}.$$

П р и м е р 4. Д о с т о в е р н ы е в ы в о д ы н а м а л о ч и с л е н н ы х г р у п п а х. В исследовании, анализ которого дан в табл. 23, был организован трехфакторный равномерный комплекс для изучения влияния на яйценоскость двух различных стимуляторов (стимулятора A с градациями A_1

и A_2 и B с градациями B_1 и B_2) и полноценности рациона (C с градациями C_1 и C_2).

В анализируемом комплексе рассчитано 26 частных средних (см. табл. 23). Все средние получены на основе преобразованных значений результативного признака ($V' = V - 20$), что никак не искажает показатели разнообразия и достоверности в пределах этого комплекса.

Дополнительно к обычным результатам анализа трехфакторного комплекса в данном исследовании потребовалось выяснить влияние каждого из стимуляторов при обычных рационах (C_1) и при добавках минеральных веществ (C_2), а также влияние второго стимулятора (B) при разных градациях первого (A). Решение этих вопросов показано на следующих примерах, для которых приняты общие величины комплекса (см. табл. 23) $\sigma_z^2 = 17$, $\nu_z = 8$.

а) влияние стимулятора A при обычных рационах (C_1):

$$n_{111} = 2,\ M_{111} = 0,\ d = 12,\ \sigma_z^2 = 17;$$

$$n_{211} = 2,\ M_{211} = 12,\ d^2 = 144,\ \nu_z = 8;$$

$$F_d = \frac{144}{17} \cdot \frac{2}{2} = \underline{8,5} \quad \left\{ \begin{matrix} 25,4 \\ 11,3 \\ 5,3 \end{matrix} \right\};$$

б) влияние стимулятора A при добавках минеральных веществ (C_2):

$$n_{112} = 2,\ M_{112} = 4,\ d = 20,\ \sigma_z^2 = 17;$$

$$n_{212} = 2,\ M_{212} = 24,\ d^2 = 400,\ \nu_z = 8;$$

$$F_d = \frac{400}{17} \cdot \frac{2}{2} = \underline{\underline{23,5}} \quad \left\{ \begin{matrix} 25,4 \\ 11,3 \\ 5,3 \end{matrix} \right\};$$

в) влияние стимулятора B при обычных рационах (C_1):

$$n_{111} = 2,\ M_{111} - 0,\ d = 8,\ \sigma_z^2 = 17;$$

$$n_{121} = 2,\ M_{121} = 8,\ d^2 = 64,\ \nu_z = 8;$$

$$F_d = \frac{64}{17} \cdot \frac{2}{2} = 3,8 \quad \left\{ \begin{matrix} 25,4 \\ 11,3 \\ 5,3 \end{matrix} \right\};$$

г) влияние стимулятора B при добавках минеральных веществ (C_2):

$$n_{112} = 2,\ M_{112} = 4,\ d = 16,\ \sigma_z^2 = 17;$$

$$n_{122} = 2,\ M_{122} = 20,\ d^2 = 256,\ \nu_z = 8;$$

$$F_d = \frac{256}{17} \cdot \frac{2}{2} = \underline{\underline{15,1}} \quad \left\{ \begin{matrix} 25,4 \\ 11,3 \\ 5,3 \end{matrix} \right\};$$

д) влияние стимулятора B при отсутствии стимулятора A:

$$n_{110}=4,\ M_{110}=2,\ d=12,\ \sigma_z^2=17;$$

$$n_{120}=4,\ M_{120}=14,\ d^2=144,\ \nu_z=8;$$

$$F_d=\frac{144}{17}\cdot\frac{4}{2}=\underline{\underline{16,9}}\qquad\left\{\begin{matrix}25,4\\11,3\\5,3\end{matrix}\right\};$$

е) **влияние** стимулятора B при действии стимул**ятора A:**

$$n_{210}=4,\ M_{210}=18,\ d=12,\ \sigma_z^2=17;$$

$$n_{220}=4,\ M_{220}=6,\ d^2=144,\ \nu_z=8;$$

$$F_d=\frac{144}{17}\cdot\frac{4}{2}=\underline{\underline{16,9}}\qquad\left\{\begin{matrix}25,4\\11,3\\5,3\end{matrix}\right\}.$$

Данное исследование приведено в качестве иллюстрации возможности получения достоверных результатов при минимальной численности подопытного материала: в приведенных примерах было всего два или четыре варианта для каждой средней.

Указанное обстоятельство является особенностью дисперсионного анализа: если имеются достоверные различия у малочисленных групп, то дисперсионный анализ позволит их выявить, в то время как любой другой метод сравнения средних может дать неопределенный, недостоверный ответ.

Это связано с тем, что во всех других методах производится сравнение групп изолированных, не объединенных ни между собой, ни с другими группами.

Объединение же малочисленных групп (а также и многочисленных) в дисперсионный комплекс позволяет яснее выявить имеющиеся достоверные различия, так как при таком объединении выявлению отличий каждой группы содействуют все остальные группы комплекса.

Пример 5. Неравномерные комплексы, решаемые по третьей системе. В исследовании, анализ которого дан в табл. 28, был организован двухфакторный неравномерный дисперсионный комплекс, решение которого было проведено по третьей системе.

Сравнение средних внутри такого комплекса производится по общим правилам, изложенным выше. Например, для выяснения действия B_2 по сравнению с B_1 при усредненном значении фактора A надо сравнить обобщенные средние $M_{02}=6,0$ и $M_{01}=3,0$ при $\sigma_z^2=0,98$ и $\nu_z=20$. Результаты получим следующие:

$$n_{02} = 9, \quad M_{02} = 6{,}0, \quad d = 3{,}0, \quad \sigma_z^2 = 0{,}98;$$

$$n_{01} = 7, \quad M_{01} = 3{,}0, \quad d^2 = 9{,}0, \quad \nu_z = 20;$$

$$F_d = \frac{9{,}0}{0{,}98} \cdot \frac{9 \cdot 7}{9 + 7} = \underline{\underline{\underline{36{,}2}}} \quad \left\{ \begin{matrix} 14{,}8 \\ 8{,}1 \\ 4{,}3 \end{matrix} \right\}.$$

Пример 6 Неравномерные комплексы, решаемые по первой системе. В исследовании, анализ которого дан в табл. 26, был организован неравномерный двухфакторный дисперсионный комплекс, решение которого было произведено по первой системе.

Средние внутри этого комплекса были рассчитаны двумя разными способами. Средние, обозначенные общим символом M_x, рассчитаны обычным способом, как сумма вариантов, деленная на их число:

$$M_{11} = \frac{9}{3} = 3{,}0, \quad M_{12} = \frac{13}{4} = 3{,}3, \quad M_{13} = \frac{30}{5} = 6{,}0;$$

$$M_{21} = \frac{12}{4} = 3{,}0, \quad M_{22} = \frac{41}{5} = 8{,}2, \quad M_{23} = \frac{25}{5} = 5{,}0.$$

Сравнение этих средних внутри таких комплексов производится обычным способом, как и в случае ортогональных комплексов. Например, сравнение средних для двух первых групп дает следующий результат:

$$n_{11} = 3, \quad M_{11} = 3{,}0, \quad d = 0{,}3, \quad \sigma_z^2 = 0{,}98;$$

$$n_{12} = 4, \quad M_{12} = 3{,}3, \quad d^2 = 0{,}09, \quad \nu_z = 20;$$

$$F = \frac{0{,}09}{0{,}98} \cdot \frac{3 \cdot 4}{3 + 4} = \underset{\sim\sim}{0{,}17} \quad \left\{ \begin{matrix} 14{,}9 \\ 8{,}1 \\ 4{,}3 \end{matrix} \right\}.$$

Средние объединенных групп, обозначенные общим символом M_t, рассчитаны на основе невзвешенных элементарных средних, как сумма элементарных средних ΣM_x (а не сумма вариантов), деленная на число этих средних g (а не на число вариантов):

$$M_{10} = \frac{3{,}0 + 3{,}3 + 6{,}0}{3} = \frac{12{,}3}{3} = 4{,}1, \quad M_{20} = \frac{16{,}2}{3} = 5{,}4;$$

$$M_{01} = \frac{3{,}0 + 3{,}0}{2} = \frac{6{,}0}{2} = 3{,}0, \quad M_{02} = \frac{11{,}5}{2} = 5{,}8;$$

$$M_{03} = \frac{11{,}0}{2} = 5{,}5.$$

Сравнение средних внутри таких комплексов производится особым способом по формуле:

$$F_{M_1-M_2}=\frac{d^2}{\sigma_z^2}\cdot\frac{g^2}{\sum\frac{1}{n_1}+\sum\frac{1}{n_2}},$$

где d^2 — квадрат разности между сравниваемыми средними;
σ_z^2 — девиата неорганизованных факторов для всего комплекса;
g — число элементарных средних (M_x), из которых получена каждая из сравниваемых средних. В описываемых комплексах величина g всегда одинакова у тех двух средних, которые могут сравниваться описываемым способом;
n_1 и n_2 — количества вариантов (частоты), на основе которых рассчитаны элементарные средние M_x.

Например, сравнение обобщенных средних для двух градаций первого фактора при усредненных значениях второго ($A_{10}=4{,}1$ и $A_{20}=5{,}4$) должно быть проведено по следующим этапам.

1. Расчет суммы обратных величин частот:

$$\sum\frac{1}{n_1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=0{,}33+0{,}25+0{,}20=0{,}78;$$

$$\sum\frac{1}{n_2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=0{,}25+0{,}20+0{,}20=0{,}65;$$

$$\sum\frac{1}{n_1}+\sum\frac{1}{n_2}=1{,}43.$$

2. Расчет показателя достоверности различия:

$$g_{10}=3,\ M_{10}=4{,}1,\ d=1{,}3,\ \sigma_z^2=0{,}98;$$

$$g_{20}=3,\ M_{20}=5{,}4,\ d^2=1{,}69,\ \nu_z=20;$$

$$F_d=\frac{1{,}69}{0{,}98}\cdot\frac{9}{1{,}43}=\underline{\underline{8{,}2}}\qquad\left\{\begin{matrix}14{,}8\\8{,}1\\4{,}3\end{matrix}\right\}.$$

Таким же способом сравниваются обобщенные средние в трехфакторном неравномерном комплексе, если они рассчитаны как простые невзвешенные средние из нескольких элементарных средних.

Например, в комплексе, представленном в табл. 30, изучение действия фактора B (градации B_1 и B_2) при третьей градации фактора A (A_3) и усредненной градации фактора C

(C_1 и C_2) должно быть проведено путем сравнения двух средних $M_{310} = 6{,}5$ и $M_{320} = 1{,}5$ следующим образом:

$$1.\ \sum \frac{1}{n_{310}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} = 1{,}20;$$

$$\sum \frac{1}{n_{320}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1{,}00;$$

$$\sum \frac{1}{n_{310}} + \sum \frac{1}{n_{320}} = 1{,}2 + 1{,}0 = \mathbf{2{,}2}.$$

$$g = 2;$$

$$2.\ M_{310} = 6{,}5,\quad d = 5,\ \sigma_z^2 = 6{,}0;$$

$$M_{320} = 1{,}5,\quad d^2 = 25,\ \nu_z = 24;$$

$$F = \frac{25}{6} \cdot \frac{4}{2{,}2} = \underline{7{,}6} \qquad \left\{ \begin{matrix} 14{,}0 \\ 7{,}8 \\ 4{,}3 \end{matrix} \right\}.$$

Сравнение одной группы с суммой других внутри дисперсионного комплекса

В пределах дисперсионного комплекса можно образовать любые новые средние и сравнить их с уже имеющимися и между собой при помощи общих величин σ_z^2 и ν_z.

Пример 1. Сравнение одной группы с двумя другими. В исследовании, анализ которого дан в табл. 22, потребовалось выяснить влияние весенней подкормки (любой ее степени) на агрессивность пчел первой породы. Для этой цели сравним группу A_1B_1 с группой, объединяющей две градации A_1B_2 и A_1B_3. Определим достоверность разности средних $M_{11} = 1{,}7$ ($n_{11} = 12$) и объединенной средней M_{12+13}. Эту объединенную среднюю можно рассчитать по формуле:

$$M_{12+13} = \frac{\Sigma V_{12} - \Sigma V_{13}}{n_{12} + n_{13}} = \frac{38 + 25}{16 + 14} = \frac{73}{30} = 2{,}43.$$

При общих величинах комплекса $\sigma_z^2 = 0{,}27$, $\nu_z = 99$ результат сравнения будет следующий:

$$F_d = \frac{(2{,}43 - 1{,}70)^2}{0{,}27} \cdot \frac{30 \cdot 12}{30 + 12} = \underline{\underline{16{,}9}} \qquad \left\{ \begin{matrix} 11{,}5 \\ 6{,}9 \\ 3{,}9 \end{matrix} \right\}.$$

Пример 2. Сравнение одной группы комплекса со всеми остальными. Когда изучается действие нескольких агентов без контрольной группы, то для более глубокой характеристики одного из этих агентов требуется выделить его группу и исследовать, достоверно ли она отличается от всех других. Иногда это требуется сделать по каждой градации факторов, например при оценке производителей по потомству. Такой анализ можно провести по формуле:

$$F_{M_i - M_{\Sigma - i}} = \frac{d^2}{\sigma_z^2} \cdot \frac{n_i \cdot (n - n_i)}{n} \quad \text{при} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = \nu_z \end{array} \right\},$$

где $M_i = \frac{\Sigma V_i}{n_i}$ — средняя для выделяемой группы;

$M_{\Sigma - i} = \frac{\Sigma\Sigma V - \Sigma V_i}{n - n_i}$ — средняя для всех остальных групп комплекса;

n_i — численность выделяемой группы;

$n - n_i$ — численность суммы остальных групп комплекса;

σ_z^2, ν_z — девиата и число степеней свободы в общем комплексе для разнообразия, вносимого неорганизованными факторами.

В исследовании, анализ которого дан в табл. 28, потребовалось найти наилучшую комбинацию градаций двух изучавшихся факторов. Полученный в опыте ряд средних M_x показывает, что наилучшее действие оказывает комбинация A_2B_2, дающая среднюю результативного признака $M_{22} = 8{,}2$. Потребовалось выяснить, настолько ли достоверно такое преимущество комбинации A_2B_2, чтобы рекомендовать ее для практического применения. Сделать это можно, использовав величины, полученные при решении комплекса (см. табл. 28):

$$M_i = 8{,}20, \; n_i = 5; \; M_{\Sigma - i} = \frac{130 - 41}{26 - 5} = 4{,}24, \; n - n_i = 21;$$

$$\sigma_z^2 = 0{,}98, \; \nu_z = 20;$$

$$F = \frac{(8{,}20 - 4{,}24)^2}{0{,}98} \cdot \frac{5 \cdot 21}{26} = \underline{\underline{64{,}6}} \quad \left\{ \begin{array}{r} 14{,}8 \\ 8{,}1 \\ 4{,}3 \end{array} \right\}.$$

Пример 3. Проверка выпадов. Иногда вместо выделяемой группы берется один вариант, величина которого сравнивается со средней для всех остальных вариантов. Такой анализ необходим в тех случаях, когда в какой-либо группе имеется вариант, резко отличающийся от других, причем внешне невозможно установить, является ли этот вариант крайним отклонением в нормальном разнообразии признака или это ошибочная величина, связанная с ошибками точности, типичности или со случайными, или методическими ошибками, т. е. то, что обычно называется «выпадом».

Критерием в данном случае будет степень достоверности отличия этого варианта от средней для всех остальных вариантов, что можно рассчитать по следующей формуле:

$$F = \frac{(V_i - M_i)^2}{\left(\sigma_z^2\right)'} \cdot \frac{n_i - 1}{n_i} \text{ при} \left\{ \begin{matrix} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = \nu_z - 1 \end{matrix} \right\},$$

где V_i — проверяемый вариант;

M_i' — средняя для остальных вариантов той группы, к которой был причислен проверяемый вариант. Эта средняя получается, если из первоначальной суммы вариантов в группе вычесть проверяемый вариант и полученную величину разделить на число оставшихся вариантов;

$\left(\sigma_z^2\right)'$ — случайная девиата нового комплекса, в котором одна из прежних групп уменьшена изъятием проверяемого варианта. Эту величину можно определить (не составляя нового комплекса) по формуле:

$$\left(\sigma_z^2\right)' = \frac{C_z'}{\nu_{z-1}},$$

где C_z' **и** $(\nu_z - 1)$ — случайная дисперсия и число степеней свободы для случайной дисперсии нового комплекса. Величину C_z' можно рассчитать по формуле:

$$C_z' = C_z - \frac{n_i}{n_i - 1}(V_i - M_i)^2.$$

Здесь C_z, n_i, M_i — случайная дисперсия, численность и средняя группы проверяемого варианта в первоначальном комплексе (без изъятия из него проверяемого варианта).

Рассмотрим исследование, анализ которого проведен в дисперсионном комплексе, представленном в табл. 35.

В этом комплексе сомнительным является вариант $V_i = 47$ во второй градации фактора.

Проверка его даст следующие результаты:

$$C_z' = C_z - \frac{n_i}{n_i - 1}(V_i - M_i)^2 = 1872 - \frac{10}{9}(47 - 11)^2 = 432;$$

$$\left(\sigma_z^2\right)' = \frac{C_z'}{\nu_z - 1} = \frac{432}{12} = 36;$$

$$M_i' = \frac{110 - 47}{9} = 7{,}0;$$

Таблица 35

Дисперсионный комплекс с предполагаемыми выпадами

	x_1	x_2	
V	17; 19, 20, 28; 31	0; 0; 3; 3, 6; 9; 14, 14; 14; 47	
n_x	5	10	$n = 15$
ΣV	115	110	$\Sigma V = 225$
$(\Sigma V)^2$	13225	12100	$H = \frac{225^2}{15} = 3375$
$h = \frac{(\Sigma V)^2}{n_x}$	2645	1210	$\Sigma h = 3855$
ΣV^2	2795	2932	$\Sigma V^2 = 5727$
M_x	23,0	11,0	

	x	z	y
C	480	1872	2352
η^2	0,20	0,80	1,00
ν	1	13	14
σ^2	480	144	
F	3,3	ν_1 / ν_2	1
		13	17,8 9,1 4,7

$$F = \frac{(V_i - M_i')^2}{(\sigma_z^2)'} \cdot \frac{n_i - 1}{n_i} = \frac{(47-7)^2}{36} \cdot \frac{9}{10} = \underline{\underline{40}}, \ \nu_z = 12 \ \left\{ \begin{matrix} 18,6 \\ 9,3 \\ 4,8 \end{matrix} \right\}.$$

Отличие проверяемого варианта от остальных вариантов группы оказалось в высшей степени достоверным, так что с большой степенью вероятности можно считать этот вариант выпадом, подлежащим изъятию из комплекса. После изъятия этого выпада ($V_i = 47$) необходимо составить и проанализировать новый, исправленный комплекс, который показан в табл. 36.

Изъятие выпада позволило получить более достоверный результат исследования: до изъятия выпада $F = 3,3$, после изъятия $F = \underline{\underline{22,9}}$.

Следует отметить, что после изъятия выпада величина C_z в новом комплексе получилась равная рассчитанной по приведенной выше формуле и без составления нового комплекса.

В новом комплексе, показанном в табл. 36, может вызвать подозрение максимальный из оставшихся вариантов —

Таблица 36

Исправленный дисперсионный комплекс, решенный после изъятия выпада ($V_i = 47$) из первоначального комплекса, показанного в табл. 35

	A_1	A	
V	17; 19; 20; 28; 31	0; 0; 3; 3; 6; 9; 14; 14; 14; 47	
n_x	5	9	$n = 14$
ΣV	115	63	$\Sigma V = 178$
$(\Sigma V)^2$	13225	3969	$H = \frac{178^2}{14} = 2263$
$h = \frac{(\Sigma V)^2}{n_x}$	2645	441	$\Sigma h = 3086$
ΣV^2	2795	723	$\Sigma V^2 = 3518$
M_x	23	7	

	x	z	y
C	823	432	1255
η^2	0,66	0,34	1,00
ν	1	12	13
σ^2	823	36	
F	22,9	ν_1 / ν_2	1
		12	18,6 9,3 4,8

$V_i = 31$ (первая градация фактора). Проверка этого варианта дает следующий результат:

$$C_z' = C_z - \frac{n_i}{n_i - 1}(V_i - M_i)^2 = 432 - \frac{5}{4}(31 - 23)^2 = 352;$$

$$(\sigma_z^2)' = \frac{C_z'}{\nu_z - 1} = \frac{352}{12 - 1} = 32;$$

$$M_i' = \frac{115 - 31}{4} = 21;$$

$$F = \frac{(V_i - M_i')^2}{(\sigma^2)'} \cdot \frac{n_i - 1}{n_i} = \frac{(31 - 21)^2}{32} \cdot \frac{4}{5} = 2,5 \qquad \begin{Bmatrix} 19,7 \\ 9,7 \\ 4,8 \end{Bmatrix};$$

$$\nu_z = 12 - 1 = 11.$$

Отличие этого варианта ($V_i = 31$) от остальных оказалось недостоверным. Поэтому необходимо признать его возможным отклонением в нормальном разнообразии признака и оставить его в комплексе.

Сравнение средних, не входивших в дисперсионный комплекс

Используя принципы дисперсионного анализа, возможно унифицировать и упростить методы сравнения любых средних величин.

Обычно, если имеются две средние величины M_1 и M_2, то для того, чтобы выяснить достоверность различия между ними, рассчитывают их ошибки репрезентативности

$$m_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}},$$

получают ошибку разности

$$m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2r_{12}\, m_1\, m_2} \approx \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

и определяют критерий достоверности и разности

$$t_d = \frac{d}{m_d} \geqslant \left\{ \begin{matrix} 3,0 \\ 2,5 \\ 2,0 \end{matrix} \right\}.$$

Все необходимые при этом расчеты можно значительно сократить, а само определение достоверности уточнить, если составить из двух имеющихся рядов простейший однофакторный комплекс и определить достоверность различия между двумя средними этого комплекса описанными выше способами по формуле:

$$F = \frac{(M_1 - M_2)^2}{\sigma_z^2} \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{при} \quad \left\{ \begin{matrix} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = n_1 + n_2 - 2 \end{matrix} \right\},$$

где

$$\sigma_z^2 = \frac{C_z}{n_1 + n_2 - 2};$$

$$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma h;$$

$$\Sigma V^2 = \Sigma V_1^2 + \Sigma V_2^2;$$

$$\Sigma h = \frac{(\Sigma V_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma V_2)^2}{n_2}.$$

Пример 1. Имеется два вариационных ряда:

I.	V_1	1	2	3	4	5
	f	2	4	20	4	2

V_2	0	1	2	3	4
f	3	1	11	19	6

Требуется определить достоверность различия средних этих рядов. Все действия, необходимые для расчета средних и показателя достоверности различия между ними, приведены в табл. 37.

Таблица 37

Определение достоверности различия средних при малозначных вариантах, выражаемых целыми числами

V	f I	f II
5	2	—
4	4	6
3	20	19
2	4	11
1	2	1
0	—	3

	I	II
n	32	40
ΣVf	96	104
M	3,0	2,6
$(\Sigma Vf)^2$	9216	10816
$h = \frac{(\Sigma Vf)^2}{n}$	288	270,4
$\Sigma V^2 f$	312	312

$$\Sigma V^2 = 312 + 312 = 624$$

$$\Sigma h = 288 + 270,4 = 558,4$$

$$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma h = 624 - 558,4 = 65,6$$

$$\nu_z = 32 + 40 - 2 = 70$$

$$\sigma_z^2 = \frac{C_z}{\nu_z} = \frac{65,6}{70} = 0,937$$

$$F = \frac{(3,0 - 2,6)^2}{0,937} \cdot \frac{32 \cdot 40}{32 + 40} = 3,0$$

ν_2 \ ν_1	1
70	11,6 7,0 4,0

Пример 2. Имеется два вариационных ряда с многозначными вариациями

I

W	90	99	108	117	126	135	144
f	3	12	24	45	41	11	2

II

W	99	108	117	126	135	144
f	6	15	28	49	13	4

Требуется определить достоверность различия средних при наличии в рядах трехзначных вариации (средних классов) и достаточной численности групп.

Определение достоверности различия средних в таких случаях проводится по-разному, в зависимости от имеющихся вычислительных средств.

При наличии таких вычислительных машин, как арифмометр ВК-1, ВК 3, САР, Мерседес, можно приведенные группы считать малыми и вести расчеты так, как это показано в табл. 38.

Если же имеются только обычные конторские счеты, то необходимо эти группы признать уже большими и облегчить

Таблица 38

Определение достоверности различия средних при многозначных вариантах в многочисленных группах при наличии счетных машин

W	W^2	f I	f II
144	20736	2	4
135	18225	11	13
126	15876	41	49
117	13689	45	28
108	11664	24	15
99	9801	12	6
90	8100	3	—

	I	II
n	138	115
ΣWf	16254	13995
M	117,8	121,7
$(\Sigma Wf)^2$	264192516	195860025
$h=\frac{(\Sigma Wf)^2}{n}$	1914438,5	1703130,7
ΣW^2f	1930716	1714851

$$\Sigma h = 1914438{,}5 + 1703130{,}7 = 3617569{,}2$$

$$\Sigma\Sigma W^2f = 1930716 + 1714851 = 3645567$$

$$C_z = 3645567 - 3617569{,}2 = 27987{,}8$$

$$\nu_z = 138 + 115 - 2 = 251$$

$$\sigma_z^2 = \frac{C_z}{\nu_z} = \frac{27987{,}8}{251} = 111{,}5$$

$$F = \frac{(117{,}8 - 121{,}7)^2}{111{,}5} \cdot \frac{138 \cdot 115}{138 + 115} = \underline{\underline{8{,}6}} \quad \begin{Bmatrix} 11{,}2 \\ 6{,}8 \\ 3{,}9 \end{Bmatrix}$$

технику расчета введением условных отклонений, выраженных в классовых промежутках.

Если требуется только определить, достоверно ли различие средних, то сравнение можно вести по величинам M и σ^2, выраженным в классовых промежутках, не переводя их в величины, выраженные в единицах измерения изучаемого признака. Расчеты, относящиеся к данному случаю, приведены в табл. 39.

Если же нужно, кроме того, дать и обычные характеристики средней величины и степени разнообразия, то требуется указанные величины выразить в единицах измерения признака. Расчеты для таких случаев показаны в нижней части табл. 39.

Таблица 39

Определение достоверности различия средних при многозначных вариантах в многочисленных группах, при отсутствии счетных машин (имеются только конторские счеты)

W	a	f I	f II
144	+3	2	4
135	+2	11	13
126	+1	41	49
117	0	45	28
108	−1	24	15
99	−2	12	6
90	−3	3	—

	I	II
n	138	115
$\Sigma a\cdot f$	+12	+60
$\bar{a}$	+0,087	+0,522
$(\Sigma a\cdot f)^2$	144	3600
$h=\dfrac{(\Sigma a\cdot f)^2}{n}$	1,043	31,304
$\Sigma a^2\cdot f$	202	176

$$\Sigma h = 1,043+31,304 = 32,347$$

$$\Sigma\Sigma a^2\cdot f = 202+176 = 378$$

$$C_z = 378 - 32,347 = 345,655$$

$$\nu_z = 138+115-2 = 251$$

$$\sigma_z^2 = \frac{C_z}{\nu_z} = \frac{345,655}{251} = 1,377$$

ν \ ν_1	1
251 (200)	11,2 6,8 3,9

$$F = \frac{(0,087-0,522)^2}{1,377}\cdot\frac{138\cdot 115}{138+115} = \underline{\underline{8,6}}$$

$$M_1 = A_1 + k_1\cdot\bar{a}_1 = 117 + 9\cdot 0,087 = 117,8$$

$$M_2 = A_2 + k_2\cdot\bar{a}_2 = 117 + 9\cdot 0,522 = 121,7$$

$$\sigma_1 = k_1\sqrt{\frac{\Sigma a_1^2\cdot f - h_1}{n_1-1}} = 9\sqrt{\frac{202-1,043}{137}} = 10,90$$

$$\sigma_2 = k_2\sqrt{\frac{\Sigma a_2^2\cdot f - h_2}{n_2-1}} = 9\sqrt{\frac{176-31,304}{114}} = 10,26$$

П р и м е р 3. Имеются два вариационных ряда с неодинаковыми классами:

I

V	2	4	6	8	10	12
f	1	4	10	20	7	2

II

V	0	3	6	9	12	15	18
f	2	7	13	19	6	3	1

Требуется определить достоверность отличия их средних.

В этих рядах неодинаковые классовые промежутки и поэтому варианты подобраны в классы с различными представителями.

Такие ряды невозможно объединить в единый вариацион-

Т а б л и ц а 40

Определение достоверности различия средних для групп, разнесенных по неодинаковым классам

I		II	
V	f	V	f
12	2	18	1
10	7	15	3
8	20	12	6
6	10	9	19
4	4	6	13
2	1	3	7
—	—	0	2

	I	II
n	44	51
ΣVf	332	405
M	7,54	7,94
$(\Sigma Vf)^2$	110224	164025
$h=\frac{(\Sigma Vf)^2}{n}$	2505,1	3216,2
ΣV^2f	2694	3933
$C=\Sigma V^2f-h$	188,9	716,8

$$C_z = C_1 + C_2 = 188,9 + 716,8 = 905,7$$

$$\nu_z = n_1 + n_2 - 2 = 44 + 51 - 2 = 93$$

$$\sigma_z^2 = \frac{C_z}{\nu_z} = \frac{905,7}{93} = 9,74$$

ν_2 \ ν_1	1
93 (100)	11,5 6,9 3 9

$$F = \frac{(7,54 - 7,94)^2}{9 \cdot 74} \cdot \frac{44 \cdot 51}{44+51} = 0,4$$

ный ряд, поэтому определение достоверности различия средних необходимо вести на основе величин, рассчитанных для каждого ряда в отдельности, так, как это показано в табл. 40.

Для многочисленных групп, когда вычисления ведутся на основе условных отклонений, выраженных в классовых промежутках, необходимо в случаях, аналогичных представленному в табл. 40, все искомые величины по каждому ряду перевести в единицы измерения признака, для чего средние рассчитать по уже приводившейся формуле (см. табл. 39) $M = A + k\bar{a}$, а дисперсии помножить на квадрат величины классового промежутка по каждому ряду в отдельности.

Только после этих действий можно рассчитать разность средних $M_1 - M_2$ и сумму дисперсий $k_1^2 C_1 + k_2^2 C_2 = C_z$.

В последнем случае получается та случайная дисперсия, которая после разделения на число степеней свободы ($\nu_z = n_1 + n_2 - 2$) дает требуемую случайную девиату σ_z^2. Остальные действия показаны в табл. 40.

Пример 5. Имеются сведения о двух группах по определенному признаку:

	I	II
n	132	75
M	25,37	26,34
σ	3,0	4,0

Вариационных рядов нет. Требуется определить достоверность различия средних между этими группами.

Для того, чтобы применить формулу показателя достоверности различия средних

$$F = \frac{(M_1 - M_2)^2}{\sigma_z^2} \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2},$$

требуется знать случайную девиату, которая в данном случае получается делением суммы дисперсий обеих групп на общую численность обеих групп без двух:

$$\sigma_z^2 = \frac{C_1 + C_2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Обе дисперсии можно легко получить, произведя вычисления от сигмы до дисперсии в обратном порядке ($C = \nu\sigma^2$). Для разбираемого примера все необходимые действия показаны в табл. 41.

Таблица 41

Определение достоверности различия средних по сводным показателям n, M, σ при отсутствии вариационных рядов

	I	II
n	132	75
M	25,37	26,34
σ	3,0	4,0
σ^2	9,00	16,00
$C = \nu\sigma^2$	$131 \times 9 = 1179$	$74 \times 16 = 1184$
$C_z = C_1 + C_2$	$1179 + 1184 = 2363$	
ν_z	$132 + 75 - 2 = 205$	
σ_z^2	$\frac{C_z}{\nu_z} = \frac{2363}{205} = 11,53$	
$F = \frac{(25,37-26,34)^2}{11,53} \cdot \frac{132 \cdot 75}{132+75} = \underline{3,9}$ $\begin{Bmatrix} 11,2 \\ 6,8 \\ 3,9 \end{Bmatrix}$		

СРАВНЕНИЕ ДОЛЕЙ ВНУТРИ ДИСПЕРСИОННОГО КОМПЛЕКСА

При изучении качественных признаков в дисперсионных комплексах вместо средних величин рассчитываются доли объектов $\frac{m}{n}$, имеющих данный признак.

Сравнение таких частных долей ведется по такой же формуле, как и при сравнении средних величин:

$$F_d = \frac{d^2}{\sigma_z^2} \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \text{ при } \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = \nu_z \end{array} \right\},$$

где

$d = p_1 - p_2$ — разность между сравниваемыми долями;

σ_z^2 — девиата неорганизованных факторов по всему комплексу;

n_1 и n_2 — численности сравниваемых групп;

ν_z — число степеней свободы разнообразия, вызванного неорганизованными факторами.

Кроме этой общей формулы, применяется еще и упрощенная формула показателя достоверности различия долей. Эта формула основана на том, что девиата качественного признака $\frac{npq}{n-1}$ не может быть больше величины $\sigma^2_{max} = 0{,}25\frac{n}{n-1}$.

Приняв это максимальное значение за девиату неорганизованных факторов, можно получить частный случай общей формулы:

$$F_{max} = 4d^2 \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} \text{ при } \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = n_1 + n_2 - 2 \end{array} \right\}.$$

Эта формула применима при сравнении любой пары долей как внутри дисперсионного комплекса, так и вне его.

При этом надо иметь в виду, что по ней получают уменьшенные значения достоверности разности.

Поэтому, если требуется провести целую серию сравнений многих пар долей, лучше для сокращения работы сначала провести расчет по второй формуле, а в тех случаях, когда получен недостоверный результат, проверить его по первой формуле, организовав простейший однофакторный дисперсионный комплекс из двух градаций.

Пример 1. В исследовании, анализ которого приведен в табл. 32, потребовалось определить, достоверно ли увеличение доли выздоровевших животных при добавке каломеля без сантонина и снижение этой доли при увеличении дозы каломеля с B_2 до B_3 при даче его совместно с сантонином (A_2).

Для решения этих вопросов надо сравнить доли выздоровевших в группе A_1B_2 с первой, контрольной группой A_1B_1, а затем сравнить группу A_1B_2 с A_2B_3.

Для первого случая имеем доли $p_{11} = 0{,}00$ и $p_{12} = 0{,}53$, $n_{11} = 20$, $n_{12} = 30$ и общие величины $\sigma_z^2 = 0{,}21$, $\nu_z = 154$.

$$F_d = \frac{(0{,}00 - 0{,}53)^2}{0{,}21} \cdot \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = \underline{\underline{16{,}1}} \quad \left\{ \begin{array}{r} 11{,}3 \\ 6{,}8 \\ 3{,}9 \end{array} \right\}.$$

Для второго случая имеем: $p_{22} = 0{,}73$, $p_{23} = 0{,}70$, $n_{22} = 30$, $n_{23} = 30$ и те же общие величины $\sigma_z^2 = 0{,}21$ и $\nu_z = 154$.

$$F_d = \frac{(0{,}73 - 0{,}70)^2}{0{,}21} \cdot \frac{30}{2} = \underset{\sim}{0{,}1} \quad \left\{ \begin{array}{r} 11{,}3 \\ 6{,}8 \\ 3{,}9 \end{array} \right\}.$$

Пример 2. Среди 40 сыновей барана № 1 оказалось 5 крипторхов, а среди 50 сыновей барана № 2 крипторхов оказалось 10. Определить, достоверно ли различаются бараны по распространению в их потомстве крипторхизма.

Доли признака: $p_1 = \frac{5}{40} = 0{,}125$, $p_2 = \frac{10}{50} = 0{,}200$,

численность групп: $n_1 = 40$, $n_2 = 50$.

$$F = 4\,(0{,}125 - 0{,}200)^2 \cdot \frac{39 \cdot 49}{39 + 49} = \underset{\sim}{0{,}5} \qquad \begin{array}{l} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = 88 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{r} 11{,}6 \\ 7{,}0 \\ 4{,}0 \end{array} \right\}.$$

Проверка этого сравнения подтверждает недостоверность различия долей.

	I	II	
n	40	50	$\Sigma n = 90$
m	5	10	$\Sigma m = 15$
m^2	25	100	
$h = \frac{m^2}{n}$	0,625	2,000	$\Sigma h = 2,625$
p	0,125	0,200	

$$C_z = \Sigma m - \Sigma h = 15 - 2,625 = 12,375$$

$$\sigma_z^2 = \frac{12,375}{90-2} = 0,141$$

$$F = \frac{(0,125 - 0,200)^2}{0,141} \cdot \frac{40 \cdot 50}{40+50} = \underset{\sim}{0,9} \qquad \left\{ \begin{matrix} 11,6 \\ 7,0 \\ 4,0 \end{matrix} \right\}$$

СТАНДАРТНЫЕ ОТНОШЕ

соответствующие трем степеням вероятности достоверного

при степенях свободы

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	167,5 34,1 10,1	148,5 30,8 9,6	141,1 29,5 9,3	137,1 28,7 9,1	134,6 28,2 9,0	132,9 27,9 8,9	131 8 27,7 8,9	130,6 27,5 8,8	130,0 27,4 8,8	129,5 27,2 8,8	128,9 27,1 8,8	128,3 27,1 8,7
4	74,1 21,2 7,7	61,2 18,8 6,9	56,1 16,7 6,6	53,4 16,0 6 4	51,7 15,5 6,3	50,5 15,2 6,2	49,8 15,0 6,1	49,0 14,8 6,0	48,6 14,7 6,0	48,2 14,5 6,0	47,8 14,5 5,9	47,4 14,4 5,9
5	47,0 16,3 6,6	36,6 13,3 5,8	33,2 12,1 5,4	31,1 11,4 5,2	29,8 11,0 5,1	28,8 10,7 5,0	28,2 10,5 4,9	27,6 10,3 4,8	27,3 10,2 4,8	27,0 10,1 4,7	26,7 10,0 4,7	26,4 9,9 4,7
6	35,5 13,4 6,0	27,0 10,9 5,1	23,7 9,8 4,8	21,9 9,2 4,5	20,8 8 8 4,4	20,0 8,5 4,3	19,5 8,3 4,2	19,0 8,1 4,1	18,8 8,0 4,1	18,5 7,9 4,1	18 3 7,8 4,0	18,0 7,7 4,0
7	29,2 12,3 5,6	21,7 9,6 4,7	18,8 8,5 4,4	17,2 7,9 4,1	16,2 7,5 4,0	15,5 7,2 3,9	15,1 7,0 3,8	14,6 6,8 3,7	14,4 6,7 3,7	14,2 6,6 3,6	13,9 6,5 3,6	13,7 6,5 3,6
8	25,4 11,3 5,3	18,5 8,7 4,5	15,8 7,6 4,1	14,4 7,0 3,8	13,5 6,6 3,7	12,9 6,4 3,6	12,5 6,2 3,5	12,0 6,0 3,4	11,8 5,9 3,4	11,6 5,8 3,3	11,4 5,7 3,1	11,2 5,7 3,3
9	22,9 10,6 5,1	16,4 8,0 4,3	13,9 7,0 3,9	12,6 6,4 3,6	11,7 6,1 3,5	11,1 5,8 3,4	10,8 5,6 3,3	10,4 5,5 3,2	10,2 5,4 3,2	10,0 5,3 3,1	9,8 5,2 3,1	9,6 5,1 3,1
10	21,0 10,0 5,0	14,9 7,9 4,1	12,3 6,6 3,7	11,3 6,0 3,5	10,5 5,6 3,3	9,9 5,4 3,2	9,6 5,2 3,1	9,2 5,1 3,1	9,0 5,0 3,0	8,9 4,9 3,0	8,7 4,8 2,9	8,5 4,7 2,9
11	19,7 9,7 4,8	13,8 7,2 4,0	11,6 6,2 3,6	10,4 5,7 3,4	9,6 5,3 3,2	9,1 5,1 3,1	8,8 4,9 3,0	8,4 4,7 3,0	8,2 4,6 2,9	8,0 4,5 2,9	7,8 4 5 2,8	7,6 4,4 2,8
12	18,6 9 3 4,8	12,3 6,9 3,9	10,8 6,0 3,5	9,6 5,4 3,3	8,9 5,1 3,1	8,4 4,8 3,0	8,1 4,7 2,9	7,7 4,5 2,9	7,5 4,4 2,8	7,4 4,3 2,8	7,2 4,2 2,7	7,0 4,2 2,7
13	17,8 9,1 4,7	12,3 6,7 3,8	10,2 5,7 3,4	9,1 5 2 3 2	8,4 4,9 3,0	7,9 4 6 2,9	7,6 4,4 2,8	7,2 4,3 2,8	7,0 4,2 2,7	6,9 4,1 2,7	6,7 4,0 2,6	6,5 4,0 2,6
ν_2 / ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12

НИЯ ДЕВИАТ (квадратов сигм),
различия разнообразия $P_1 = 0{,}95,\ P_2 = 0{,}99,\ P_3 = 0{,}999$

ν_1 для σ_1^2 и ν_2 для σ_2^2

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	t	ν_1 / ν_2
127,7	127,1	126,5	125,9	125,6	125,3	125,0	124,7	124,4	124,1	123,8	123,5	12,9	3
26,9	26,8	26,7	26,6	26,5	26,4	26,4	26,3	26,2	26,2	26,1	26,1	5,8	
8,7	8,7	8,7	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,5	8,5	8,5	3,2	
47,0	46,6	46,2	45,8	45,6	45,4	45,2	45,0	44,7	44,5	44,3	44,1	8,6	4
14,2	14,1	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,6	13,6	13,5	13,5	13,5	4,6	
5,9	5,8	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7	5,7	5,7	5,7	5,6	5,6	2,8	
26,1	25,8	25,4	25,1	24,9	24,8	24,6	24,5	24,3	24,1	24,0	23,8	6,9	5
9,8	9,7	9,6	9,5	9,4	9,3	9,2	9,1	9,1	9,1	9,0	9,0	4,0	
4,6	4,6	4,6	4,5	4,5	4,5	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	2,6	
17,7	17,5	17,2	16,9	16,8	16,6	16,5	16,4	16,2	16,1	15,9	15,8	6,0	6
7,6	7,5	7,4	7,3	7,2	7,1	7,1	7,0	7,0	6,9	6,9	6,9	3,7	
4,0	3,9	3,9	3,8	3,8	3,8	3,8	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	2,4	
13,5	13,2	13,0	12,7	12,6	12,5	12,3	12,2	12,1	12,0	11,8	11,7	5,3	7
6,4	6,3	6,2	6,1	6,0	5,9	5,9	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7	3,5	
3,5	3,5	3,4	3,4	3,4	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3	3,2	3,2	2,4	
11,0	10,8	10,5	10,3	10,2	10,1	10,0	9,9	9,7	9,6	9,5	9,4	5,0	8
5,6	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1	5,1	5,0	5,0	4,9	4,9	4,9	3,4	
3,2	3,2	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0	3,0	3,0	3,0	2,9	2,9	2,3	
9,4	9,2	8,9	8,7	8,6	8,5	8,4	8,3	8,1	8,0	7,9	7,8	4,8	9
5,0	4,9	4,8	4,7	4,6	4,6	4,5	4,5	4,4	4,4	4,3	4,3	3,3	
3,0	3,0	2,9	2,9	2,9	2,8	2,8	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,3	
8,3	8,1	7,8	7,6	7,5	7,4	7,3	7,2	7,1	7,0	6,9	6,8	4,6	10
4,6	4,5	4,4	4,3	4,3	4,2	4,1	4,1	4,0	4,0	3,9	3,9	3,2	
2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,5	2,2	
7,4	7,3	7,1	6,9	6,8	6,7	6,6	6,5	6,3	6,2	6,1	6,0	4,4	11
4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,9	3,8	3,7	3,7	3,7	3,6	3,6	3,1	
2,7	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,2	
6,8	6,7	6,5	6,3	6,2	6,1	6,0	5,9	5,7	5,6	5,5	5,4	4,3	12
4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,6	3,5	3,5	3,4	3,4	3,4	3,1	
2,6	2,5	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	
6,3	6,2	6,0	5,8	5,7	5,6	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1	5,0	4,1	13
3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,3	3,2	3,2	3,2	3,0	
2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,2	
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	t	ν_1 \ ν_2

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	17,1 8,9 4,6	11,8 6,5 3,7	9,7 5,6 3,3	8,6 5,0 3,1	7,9 4,7 3,0	7,4 4,5 2,9	7,1 4,3 2,8	6,8 4,1 2,7	6,6 4,0 2,7	6,5 3,9 2,6	6,3 3,9 2,6	6,1 3,8 2,5
15	16,6 8,7 4,5	11,3 6,4 3,7	9,3 5,4 3,3	8,3 4,9 3,1	7,6 4,6 2,9	7,1 4,3 2,8	6,8 4,1 2,7	6,5 4,0 2,6	6,3 3,9 2,6	6,2 3,8 2,6	6,0 3,7 2,5	5,8 3,7 2,5
16	16,1 8,5 4,5	11,0 6,2 3,6	9,0 5,3 3,2	7,9 4,8 3,0	7,3 4,4 2,9	6,8 4,2 2,7	6,5 4,0 2,7	6,2 3,9 2,6	6,1 3,8 2,5	5,9 3,7 2,5	5,8 3,6 2,5	5,6 3,5 2,4
17	15,7 8,4 4,5	10,7 6,1 3,6	8,7 5,2 3,2	7,7 4,7 3,0	7,0 4,3 2,8	6,6 4,1 2,7	6,3 3,9 2,6	6,0 3,8 2,6	5,8 3,7 2,5	5,7 3,6 2,5	5,5 3,5 2,4	5,3 3,5 2,4
18	15,4 8,3 4,4	10,4 6,0 3,5	8,5 5,1 3,2	7,5 4,6 2,9	6,8 4,2 2,8	6,4 4,0 2,7	6,1 3,8 2,6	5,8 3,7 2,5	5,6 3,6 2,5	5,5 3,5 2,4	5,3 3,4 2,4	5,1 3,4 2,3
19	15,1 8,2 4,4	10,2 5,9 3,5	8,3 5,0 3,1	7,3 4,5 2,9	6,6 4,2 2,7	6,2 3,9 2,6	5,9 3,8 2,5	5,6 3,6 2,5	5,5 3,5 2,4	5,3 3,4 2,4	5,2 3,4 2,3	5,0 3,3 2,3
20	14,8 8,1 4,3	10,0 5,8 3,5	8,1 4,9 3,1	7,1 4,4 2,9	6,5 4,1 2,7	6,0 3,9 2,6	5,7 3,7 2,5	5,4 3,6 2,4	5,3 3,4 2,4	5,1 3,4 2,3	5,0 3,3 2,3	4,8 3,2 2,3
21	14,6 8,0 4,3	9,8 5,8 3,5	7,9 4,9 3,1	7,0 4,4 2,8	6,3 4,0 2,7	5,9 3,8 2,6	5,6 3,6 2,5	5,3 3,5 2,4	5,2 3,4 2,4	5,0 3,3 2,3	4,9 3,2 2,3	4,7 3,2 2,2
22	14,4 7,9 4,3	9,6 5,7 3,4	7,8 4,8 3,0	6,8 4,3 2,8	6,2 4,0 2,7	5,8 3,8 2,6	5,5 3,6 2,5	5,2 3,4 2,4	5,1 3,3 2,3	4,9 3,3 2,3	4,8 3,2 2,3	4,6 3,1 2,2
23	14,2 7,9 4,3	9,5 5,7 3,4	7,7 4,8 3,0	6,7 4,3 2,8	6,1 4,0 2,6	5,6 3,7 2,5	5,4 3,5 2,4	5,1 3,4 2,4	5,0 3,3 2,3	4,8 3,2 2,3	4,7 3,1 2,2	4,5 3,1 2,2
24	14,0 7,8 4,3	9,3 5,6 3,4	7,6 4,7 3,0	6,6 4,2 2,8	6,0 3,9 2,6	5,6 3,7 2,5	5,3 3,5 2,4	5,0 3,4 2,4	4,9 3,2 2,3	4,7 3,2 2,3	4,6 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2
25	13,9 7,8 4,2	9,2 5,6 3,4	7,5 4,7 3,0	6,5 4,2 2,8	5,9 3,9 2,6	5,5 3,6 2,5	5,2 3,5 2,4	4,9 3,3 2,3	4,8 3,2 2,3	4,6 3,1 2,2	4,5 3,0 2,2	4,3 3,0 2,2
ν_2 / ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	t	ν_1 / ν_2
5,9 3,7 2,5	5,8 3,6 2,4	5,6 3,5 2,4	5,4 3,4 2,4	5,3 3,3 2,3	5,2 3,3 2,3	5,1 3,2 2,2	5,0 3,1 2,2	4,9 3,1 2,2	4,8 3,1 2,2	4,7 3,0 2,1	4,6 3,0 2,1	4,1 3,0 2,1	14
5,6 3,6 2,4	5,5 3,5 2,4	5,3 3,4 2,3	5,1 3,3 2,3	5,0 3,2 2,3	4,9 3,1 2,2	4,8 3,1 2,2	4,7 3,0 2,2	4,6 3,0 2,1	4,5 2,9 2,1	4,4 2,9 2,1	4,3 2,9 2,1	4,1 3,0 2,1	15
5,4 3,5 2,4	5,3 3,4 2,3	5,1 3,3 2,3	4,9 3,2 2,2	4,8 3,1 2,2	4,7 3,0 2,2	4,6 3,0 2,1	4,5 2,9 2,1	4,4 2,9 2,1	4,3 2,8 2,0	4,2 2,8 2,0	4,1 2,8 2,0	4,0 2,9 2,1	16
5,1 3,4 2,3	5,0 3,3 2,3	4,8 3,2 2,2	4,6 3,1 2,2	4,5 3,0 2,2	4,4 2,9 2,1	4,3 2,9 2,1	4,3 2,8 2,0	4,2 2,8 2,0	4,1 2,7 2,0	4,0 2,7 2,0	3,9 2,7 2,0	4,0 2,9 2,1	17
5,0 3,3 2,3	4,8 3,2 2,2	4,7 3,1 2,2	4,5 3,0 2,1	4,4 2,9 2,1	4,3 2,8 2,1	4,2 2,8 2,0	4,1 2,7 2,0	4,0 2,7 2,0	3,9 2,6 1,9	3,8 2,6 1,9	3,7 2,6 1,9	3,9 2,9 2,1	18
4,8 3,2 2,3	4,7 3,1 2,2	4,5 3,0 2,1	4,4 2,9 2,1	4,2 2,9 2,1	4,1 2,8 2,0	4,0 2,7 2,0	3,9 2,6 2,0	3,8 2,6 1,9	3,7 2,5 1,9	3,6 2,5 1,9	3,5 2,5 1,9	3,9 2,9 2,1	19
4,7 3,1 2,2	4,5 3,0 2,2	4,4 2,9 2,1	4,2 2,9 2,1	4,1 2,8 2,0	4,0 2,7 2,0	3,9 2,6 2,0	3,8 2,6 1,9	3,7 2,5 1,9	3,6 2,5 1,9	3,5 2,4 1,8	3,4 2,4 1,8	3,9 2,8 2,1	20
4,5 3,1 2,2	4,4 3,0 2,1	4,2 2,9 2,1	4,0 2,8 2,0	3,9 2,7 2,0	3,8 2,6 2,0	3,7 2,6 1,9	3,6 2,5 1,9	3,6 2,5 1,9	3,5 2,4 1,8	3,4 2,4 1,8	3,3 2,4 1,8	3,8 2,8 2,1	21
4,4 3,0 2,2	4,3 2,9 2,1	4,1 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,8 2,7 2,0	3,7 2,6 1,9	3,6 2,5 1,9	3,6 2,5 1,8	3,5 2,4 1,8	3,4 2,4 1,8	3,3 2,3 1,8	3,2 2,3 1,8	3,8 2,8 2,1	22
4,3 3,0 2,1	4,2 2,9 2,1	4,0 2,8 2,0	3,8 2,7 2,0	3,7 2,6 2,0	3,6 2,5 1,9	3,5 2,5 1,9	3,5 2,4 1,8	3,4 2,4 1,8	3,3 2,3 1,8	3,2 2,3 1,8	3,1 2,3 1,8	3,8 2,8 2,1	23
4,2 2,9 2,1	4,1 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,7 2,7 2,0	3,6 2,6 1,9	3,5 2,5 1,9	3,4 2,4 1,9	3,4 2,4 1,8	3,3 2,3 1,8	3,2 2,3 1,8	3,1 2,2 1,7	3,0 2,2 1,7	3,8 3,8 2,1	24
4,2 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,7 2,6 2,0	3,6 2,5 1,9	3,5 2,4 1,9	3,4 2,4 1,8	3,3 2,3 1,8	3,2 2,3 1,8	3,1 2,2 1,7	3,0 2,2 1,7	2,9 2,2 1,7	3,6 2,8 2,1	25
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	t	ν_2 / ν_1

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
26	13,7 7,7 4,2	9,1 5,5 3,4	7,4 4,6 3,0	6,4 4,1 2,7	5,8 3,8 2,6	5,4 3,6 2,5	5,1 3,4 2,4	4,8 3,3 2,3	4,7 3,2 2,3	4,5 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2	4,2 3,0 2,1
27	13,6 7,7 4,2	9,0 5,5 3,3	7,3 4,6 3,0	6,3 4,1 2,7	5,7 3,8 2,6	5,3 3,6 2,5	5,1 3,4 2,4	4,8 3,3 2,3	4,7 3,1 2,2	4,5 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2	4,2 2,9 2,1
28	13,5 7,6 4,2	8,9 5,4 3,3	7,2 4,6 2,9	6,3 4,1 2,7	5,7 3,8 2,6	5,2 3,5 2,4	5,0 3,4 2,4	4,7 3,2 2,3	4,6 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2	4,3 2,9 2,1	4,1 2,9 2,1
29	13,4 7,6 4,2	8,9 5,4 3,3	7,1 4,5 2,9	6,2 4,0 2,7	5,6 3,7 2,5	5,2 3,5 2,4	5,0 3,3 2,3	4,7 3,2 2,3	4,6 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2	4,3 2,9 2,1	4,1 2,9 2,1
30	13,3 7,6 4,2	8,8 5,4 3,3	7,1 4,5 2,9	6,1 4,0 2,7	5,5 3,7 2,5	5,1 3,5 2,4	4,9 3,3 2,3	4,6 3,2 2,3	4,5 3,1 2,2	4,3 3,0 2,2	4,2 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1
32	13,2 7,5 4,1	8,7 5,3 3,3	7,0 4,5 2,9	6,0 4,0 2,7	5,4 3,7 2,5	5,0 3,4 2,4	4,8 3,2 2,3	4,5 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2	4,2 2,9 2,1	4,1 2,9 2,1	3,9 2,8 2,1
34	13,1 7,4 4,1	8,6 5,3 3,3	7,0 4,4 2,9	6,0 3,9 2,6	5,4 3,6 2,5	5,0 3,4 2,4	4,8 3,2 2,3	4,5 3,1 2,2	4,4 3,1 2,1	4,2 2,9 2,1	4,1 2,8 2,1	3,9 2,8 2,0
36	13,0 7,4 4,1	8,6 5,2 3,3	6,9 4,4 2,9	5,9 3,9 2,6	5,3 3,6 2,5	4,9 3,3 2,4	4,7 3,2 2,3	4,4 3,0 2,2	4,3 2,9 2,1	4,1 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1	3,8 2,7 2,0
38	12,9 7,3 4,1	8,5 5,2 3,2	6,8 4,3 2,8	5,8 3,9 2,6	5,3 3,5 2,5	4,9 3,3 2,3	4,7 3,1 2,3	4,4 3,0 2,2	4,3 2,9 2,1	4,1 2,8 2,1	4,0 2,7 2,1	3,8 2,7 2,0
40	12,8 7,3 4,1	8,4 5,2 3,2	6,7 4,3 2,8	5,8 3,8 2,6	5,2 3,5 2,4	4,8 3,3 2,3	4,6 3,1 2,2	4,3 3,0 2,2	4,2 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,7 2,7 2,0
42	12,7 7,3 4,1	8,3 5,1 3,2	6,7 4,3 2,8	5,7 3,8 2,6	5,2 3,5 2,4	4,8 3,3 2,3	4,6 3,1 2,2	4,3 3,0 2,2	4,2 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,7 2,6 2,0
44	12,5 7,2 4,1	8,2 5,1 3,2	6,6 4,3 2,8	5,6 3,8 2,6	5,1 3,5 2,4	4,7 3,2 2,3	4,5 3,1 2,2	4,2 2,9 2,2	4,1 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,8 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0
ν_2 / ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	t	ν_1 / ν_2
4,1	3,9	3,8	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	3,6	26
2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,8	
2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	2,1	
4,0	3,9	3,7	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	3,7	27
2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,8	
2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7	2,1	
4,0	3,8	3,7	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	3,7	28
2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,8	
2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7	1,6	2,1	
3,9	3,8	3,6	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	3,7	29
2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,8	
2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	2,0	
3,9	3,7	3,6	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	3,6	30
2,7	2,7	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,8	
2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	2,0	
3,8	3,7	3,5	3,4	3,2	3,2	3,1	3,0	2,8	2,7	2,6	2,5	3,6	32
2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	2,7	
2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	2,0	
3,8	3,6	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,6	2,6	2,5	3,6	34
2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	2,7	
2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,6	1,5	2,0	
3,7	3,6	3,4	3,3	3,1	3,1	3,0	2,9	2,7	2,6	2,5	2,4	3,6	36
2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	2,7	
2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,6	1,5	2,0	
3,7	3,5	3,4	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	3,6	38
2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	2,7	
2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	2,0	
3,6	3,5	3,3	3,2	3,0	3,0	2,9	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	3,6	40
2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	2,7	
1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	2,0	
3,6	3,4	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,4	2,4	2,3	3,6	42
2,5	2,5	2,3	2,3	2,2	2,1	2,[illegible]	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	2,7	
1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	2,0	
3,5	3,4	3,2	3,1	2,9	2,9	2,8	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2	3,5	44
2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	2,7	
1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	2,0	
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	t	ν_1

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
46	12,4 7,2 4,0	8,1 5,1 3,2	6,5 4,2 2,8	5,6 3,8 2,6	5,0 3,4 2,4	4,6 3,2 2,3	4,4 3,0 2,2	4,1 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1	3,8 2,7 2,0	3,7 2,7 2,0	3,5 2,6 2,0
48	12,3 7,2 4,0	8,1 5,1 3,2	6,4 4,2 2,8	5,5 3,7 2,6	5,0 3,4 2,4	4,6 3,2 2,3	4,4 3,0 2,2	4,1 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1	3,8 2,7 2,0	3,7 2,6 2,0	3,5 2,6 2,0
50	12,2 7,2 4,0	8,0 5,1 3,2	6,4 4,2 2,8	5,4 3,7 2,6	4,9 3,4 2,4	4,5 3,2 2,3	4,3 3,0 2,2	4,0 2,9 2,1	3,9 2,8 2,1	3,7 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0	3,4 2,6 1,9
55	12,1 7,1 4,0	7,9 5,0 3,2	6,3 4,1 2,8	5,4 3,7 2,5	4,9 3,4 2,4	4,5 3,1 2,3	4,3 3,0 2,2	4,0 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,7 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0	3,4 2,5 1,9
60	12,0 7,1 4,0	7,8 5,0 3,1	6,2 4,1 2,8	5,3 3,6 2,5	4,8 3,3 2,4	4,4 3,1 2,2	4,2 2,9 2,2	3,9 2,8 2,1	3,8 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0	3,5 2,6 1,9	3,3 2,5 1,9
65	11,9 7,0 4,0	7,7 5,0 3,1	6,1 4,1 2,7	5,2 3,6 2,5	4,7 3,3 2,4	4,3 3,1 2,2	4,1 2,9 2,1	3,8 2,8 2,1	3,7 2,7 2,0	3,5 2,6 2,0	3,4 2,5 1,9	3,2 2,5 1,9
70	11,6 7,0 4,0	7,6 4,9 3,1	6,0 4,1 2,7	5,2 3,6 2,5	4,7 3,3 2,3	4,3 3,1 2,2	4,1 2,9 2,1	3,8 2,8 2,1	3,7 2,7 2,0	3,5 2,6 2,0	3,4 2,5 1,9	3,2 2,4 1,9
80	11,6 7,0 4,0	7,5 4,9 3,1	6,0 4,0 2,7	5,1 3,6 2,5	4,6 3,2 2,3	4,2 3,0 2,2	4,0 2,9 2,1	3,7 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0	3,4 2,5 1,9	3,3 2,5 1,9	3,1 2,4 1,9
100	11,5 6,9 3,9	7,4 4,8 3,1	5,9 4,0 2,7	5,0 3,5 2,5	4,5 3,2 2,3	4,1 3,0 2,2	3,9 2,8 2,1	3,7 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0	3,4 2,5 1,9	3,3 2,4 1,9	3,1 2,4 1,8
125	11,4 6,8 3,9	7,1 4,8 3,1	5,8 3,9 2,7	5,0 3,5 2,4	4,5 3,2 2,3	4,1 2,9 2,2	3,9 2,8 2,1	3,6 2,6 2,0	3,5 2,6 1,9	3,3 2,5 1,9	3,2 2,4 1,9	3,0 2,3 1,8
150	11,3 6,8 3,9	7,3 4,7 3,1	5,7 3,9 2,7	4,9 3,4 2,4	4,4 3,1 2,3	4,0 2,9 2,2	3,8 2,8 2,1	3,5 2,6 2,0	3,4 2,5 1,9	3,2 2,4 1,9	3,1 2,4 1,8	2,9 2,3 1,8
200	11,2 6,8 3,9	7,2 4,7 3,0	5,6 3,9 2,6	4,8 3,4 2,4	4,3 3,2 2,3	3,9 2,9 2,1	3,7 2,7 2,0	3,5 2,6 2,0	3,4 2,5 1,9	3,2 2,4 1,9	3,1 2,3 1,8	2,9 2,3 1,8
ν_2 / ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	t	ν_1 / ν_2
3,4	3,3	3,1	3,0	2,8	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	3,5	46
2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	2,7	
1,9	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	2,0	
3,4	3,3	3,1	3,0	2,8	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	3,5	48
2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	2,7	
1,9	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,4	2,0	
3,3	3,2	3,0	2,9	2,7	2,7	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	3,5	50
2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	2,7	
1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,4	2,0	
3,3	3,2	3,0	2,9	2,7	2,7	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	3,5	55
2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	2,7	
1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,4	1,4	2,0	
3,2	3,1	2,9	2,8	2,6	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	3,4	60
2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	2,7	
1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	2,0	
3,1	3,0	2,8	2,7	2,5	2,5	2,4	2,3	2,1	2,0	1,9	1,8	3,4	65
2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,6	2,6	
1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	2,0	
3,1	3,0	2,8	2,7	2,5	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,8	1,7	3,4	70
2,3	2,3	2,1	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	2,6	
1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	1,3	2,0	
3,0	2,9	2,7	2,6	2,4	2,4	2,3	2,2	2,0	1,9	1,8	1,7	3,4	80
2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	2,6	
1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	1,3	1,3	2,0	
3,0	2,8	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	1,9	1,8	1,7	1,6	3,4	100
2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	2,6	
1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3	2,0	
2,9	2,8	2,6	2,5	2,3	2,3	2,1	2,0	1,9	1,8	1,6	1,5	3,4	125
2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	2,6	
1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	2,0	
2,8	2,7	2,5	2,4	2,2	2,2	2,0	1,9	1,8	1,7	1,5	1,4	3,4	150
2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,4	1,4	1,3	2,6	
1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	2,0	
2,8	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1	1,9	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	3,3	200
2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,3	1,3	2,6	
1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3	1,2	1,2	2,0	
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	t	ν_2 / ν_1

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
400	11,0 6,7 3,9	7,1 4,7 3,0	5,6 3,8 2,6	4,7 3,4 2,4	4,2 3,1 2,2	3,8 2,8 2 1	3,6 2,7 2,0	3,4 2,5 2,0	3,3 2,5 1,9	3,1 2,4 1,8	3,0 2,3 1,8	2,8 2,2 1,8
1000	10,9 6,7 3,8	7,0 4,6 3,0	5,5 3,8 2,6	4,7 3,4 2,4	4,2 3,3 2,2	3,8 3,0 2,1	3,6 2,8 2,0	3,4 2,7 1,9	3,3 2,5 1,9	3,1 2,4 1,8	3,0 2,3 1,8	2,8 2,3 1,8
∞	10,8 6,6 3,8	6,9 4,6 3,0	5,4 3,8 2,6	4,6 3,3 2,4	4,1 3,0 2,2	3,7 2,8 2,1	3,5 2,6 2,0	3,3 2,5 1,9	3,2 2,4 1,9	3,0 2,3 1,8	2,9 2,2 1,8	2,7 2,2 1,7
ν_2 / ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	t	ν_1 / ν_2
2,7 2,1 1,7	2,5 2,0 1,7	2,4 1,9 1,6	2,2 1,8 1,5	2,1 1,7 1,5	2,0 1,6 1,4	1,9 1,6 1,4	1,8 1,5 1,3	1,6 1,4 1,3	1,5 1,3 1,2	1,4 1,2 1,2	1,3 1,2 1,1	3,3 2,6 2,0	400
2,7 2,2 1,7	2,5 2,1 1,6	2,4 2,0 1,6	2,2 1,9 1,5	2,1 1,8 1,5	2,0 1,7 1,4	1,8 1,6 1,4	1,7 1,5 1,3	1,6 1,4 1,3	1,5 1,4 1,2	1,3 1,2 1,1	1,2 1,1 1,1	3,3 2,6 2,0	1000
2,6 2,1 1,7	2,4 2,0 1,6	2,3 1,9 1,6	2,1 1,8 1,5	2,0 1,7 1,5	1,9 1,6 1,4	1,7 1,5 1,3	1,6 1,4 1,3	1,5 1,4 1,2	1,4 1,2 1,2	1,2 1,1 1,1	1,1 1,0 1,0	3,3 2,6 2,0	∞
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	t	ν_2 / ν_1

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Основы метода 7

Техника дисперсионного анализа . 30

Подбор факторов 30

Разделение факторов на градации 30

Подбор особей . . 31

Преобразование значений результативного признака 34

Техника расчетов . . 37

Однофакторный комплекс . 37

Двухфакторный комплекс . . . 45

Трехфакторный комплекс . . 54

Неравномерные комплексы . 60

Дисперсионный анализ качественных признаков . . 77

Сравнение средних внутри дисперсионного комплекса . 83

Сравнение одной группы с суммой других внутри дисперсионного комплекса 98

Сравнение средних, не входивших в дисперсионный комплекс . . . 103

Сравнение долей внутри дисперсионного комплекса . 110

Приложение 114

Николай Александрович Плохинский

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *Р Л Дудник* Художественный редактор *А А Федиахметов*
Технический редактор *А Ф Мазурова* Корректор *З Н Колодочкина*

Сдано в набор 7 августа 1959 г Подписано к печати 25 января 1960 г Формат *60×92 1/16=3,875 бум л 7,75 печ л 8,5 изд л Тираж 1000 МН 03012*

Издательство Сибирского отделения АН СССР, Новосибирск, Советская, 20
Типография № 1 Полиграфиздата Новосибирск, Красный проспект, 20 Цена 7 руб

Цѣна 7 руб.

Цѣна 7 руб.