

ПРЕДИСЛОВИЕ

Написать предисловие к книге д-ра Рене Тома «Структурная устойчивость и морфогенез» для меня высокая честь. Я не могу сказать, что полностью понял книгу Тома. Думаю, что только немногие специалисты-топологи могли бы отследить все математические выкладки, но они почувствовали бы себя менее уверенно в биологии. Тем не менее, мне удалось в достаточной степени понять топологические идеи и логику книги, чтобы осознать, что это очень важный вклад в философию науки и, в частности, в теоретическую общую биологию.

Настоящее состояние биологии, как представляется, требует более строгой и глубокой разработки понятий и логических систем, с помощью которых мы могли бы плодотворно рассматривать важнейшие характеристики жизненных процессов на всех уровнях. Знаменателен такой факт: при том, что теоретическая физика - признанная отрасль науки со своими журналами и отделениями во многих университетах, теоретическая биология такого признания не получила. Может быть, потому что такой дисциплины не существует или она не нужна? Нередко утверждается, что живые существа это не что иное, как сложные физико-химические системы, которые не требуют развития особой общей теории, кроме той, которую можно заимствовать из физики. Сторонники этой точки зрения признают, что имеется много особых черт биологических процессов, требующих выработки подходящей специальной теории. Очевидно, что гидродинамика жидкостей тела, проницаемость мембран при передаче нервных импульсов и при работе почек, нервная система и многие другие биологические явления требуют теоретического развития в направлениях, которые ранее не были предметом изучения специалистов по неживой природе, но которые могут быть без особых усилий приспособлены физикохимиками к привычным для них способам рассуждения. Но такие теории, очевидно, относятся только к отдельным разделам биологии, а не к биологии в целом.

Можно ли пойти дальше и утверждать, что биология не требует развития какой-то общей теоретической биологии, а может обойтись разрозненными теориями биологических процессов, каждая из которых представляет собой экстраполяцию и развитие подходящей физической теории? В недалеком прошлом такая точка зрения была почти общепринятой, и специальных усилий для создания общей теории никто не предпринимал. Приблизительно до конца шестидесятых годов считалось, что наиболее фундаментальной характеристикой живого является метаболизм, находящийся в кажущемся (но только кажущемся) конфликте с термодинамикой. Считалось, что теория метаболизма это только весьма сложная химия, не требующая других добавлений к существующей теории, кроме признания того, что многие протеины могут действовать как ферменты-катализаторы. Позднее генетики заявили, что более фундаментальные жизненные процессы это наследственность и эволюция. Но блестящие открытия в молекулярной биологии позволили утверждать, что и эти явления в основном попадают в сферу химии, дополненную несколькими добавочными положениями о матричной функции

нуклеиновых кислот.

Эти утверждения имеют немало веских оснований. Действительно, поскольку мы рассматриваем живые существа как объекты естественных наук, т.е. как объективно наблюдаемые феномены, и отбрасываем любые соображения, связанные с субъективностью и сознанием, постольку живые существа в некотором смысле не должны представлять «ничего, кроме физики и химии». Они состоят только из физического и химического вещества и из ничего иного. И если в какой-то момент наших физических знаний окажется недостаточно для объяснения какого-то биологического явления, такого как, например, катализационные свойства полиаминокислот или матричные свойства полинуклеотидов, мы должны развивать наши химические и физические теории дальше. Но даже если согласиться со всеми этими утверждениями, необходимость в общей теоретической биологии все равно остается.

Это особенно очевидно в тех разделах биологии, где изучают явления, наиболее далеко отстоящие от физико-химических процессов, на которых они в конечном счете основываются. Яркий тому пример — эволюция высших организмов. Было бы крайне неуместно описывать этот процесс непосредственно в физико-химических терминах, и в действительности была создана хорошо разработанная теория популяционной и эволюционной генетики. Имеются схожие, хотя и не столь бросающиеся в глаза причины необходимости специфически биологических теорий в других разделах биологии, таких как биология развития и обмен веществ, хотя эти теории еще не сформулированы столь же четко, как эволюционная теория. Такие биологические теории можно сравнить с общими теориями частных физических явлений, такими как, например, аэродинамика, электротехника, оптика и т.п. Эти биологические теории по-прежнему не требовали бы создания общей теоретической биологии, если бы не тот факт, что у них имеются некоторые общие особенности. Именно изучение этих общих особенностей различных типов биологических теорий и должно стать основной задачей теоретической биологии.

Когда категория биологических процессов, таких как эволюция или эмбриогенез, ведут к формированию собственного специфически биологического состава теории, это происходит из-за того, что таким образом выявляются две характеристики. Это вовлекает сущности, которые характеризуются глобальной простотой и определенностью (как, например, виды животных или растений, органы — сердце, печень и т.п., или типы клеток, например, мышечные или нервные клетки), однако если попытаться анализировать эти сущности, сводя их к базовым элементам (таким как гены или молекулы), то выявляется их невообразимая сложность. Логическая структура важных биологических понятий почти всегда характеризуется простотой (отношений между понятиями в рамках данной теоретической схемы), содержащейся в исключительной сложности (обнаруживаемой редукционистским анализом). Без этой простоты новая теория была бы беспредметной. Если бы с этой сложностью можно было справиться, было бы достаточно физико-химических теорий.

Из-за своей аналитической сложности биологические понятия в общем случае приводят к высоким размерностям. Сколько параметров нужно принять во внимание, чтобы специфицировать клетку печени, почки или развивающуюся популяцию — 10^2 ? 10^3 ? 10^4 ? Мы не знаем. Поэтому такие понятия могут быть корректно соотнесены друг с другом только в рамках логико-математической схемы, которая может оперировать с большим числом измерений. Одной из таких схем является статистическая механика, но более общей оказывается топология. Не хочу выглядеть нескромным, но позволю себе упомянуть, что в 1940 году в моей книге *Организаторы и гены (Organisers and Genes)* я настаивал на необходимости развития топологии биологических явлений. В последующие годы, не владея математическим аппаратом даже на лю-

бительском уровне, я ничего не мог сделать для воплощения этой идеи. Тем больше я благодарен Рене Тому, который взялся за это дело с таким сильным и масштабным размахом. Том как раз попытался детально и точно показать, каким образом общие закономерности, с которыми сталкивается биология, могут рассматриваться как структуры в многомерном пространстве. Он не только показал, что такие понятия как креоды и эпигенетический ландшафт, которые раньше выражались только неопределенным языком биологии, могут быть более адекватно сформулированы в терминах векторных полей, аттракторов, катастроф и т.п. Продвигаясь гораздо дальше, он развивает в высшей степени оригинальные идеи, которые являются одновременно и математически строгими с точки зрения топологии, и приложимыми ко многим областям биологии и других наук.

Было бы неправильно пытаться создать впечатление, что книга Тома посвящена исключительно биологии. Темы, упомянутые в названии книги — структурная устойчивость и морфогенез — имеют отношение к более широкому кругу вещей. Автор соотносит свою топологическую систему мышления с физическими и, естественно, с общими философскими проблемами. Моя недостаточная компетентность не позволяет мне делать какие-либо комментарии по данным аспектам книги. В биологии Том не только применяет топологический способ мышления для получения формальных определений и создания логической системы для них. Он делает также смелый шаг, проводя прямое сравнение между топологическими структурами в четырехмерном пространстве-времени и физическими структурами, обнаруживаемыми в развивающемся эмбрионе. У меня до сих пор не сложилось определенного мнения, не заходит ли Том в поисках «практических результатов» дальше, чем это допустимо делать при интерпретации абстрактных формулировок. Прав ли он в этом или нет — не очень важно для оценки принципиальной важности данной книги, которая является мощным и глубоким введением в топологическую парадигму теоретической биологии. Поскольку это направление получает теперь мощный импульс, в дальнейшем будет невозможно не замечать топологический подход, предложенный Томом.

*К.Н. Уоддингтон,
профессор зоогенетики,
Эдинбургский университет.*

К ЧИТАТЕЛЮ

Эта книга, написанная математиком, адресуется специалистам по дисциплинам, представители которых до недавнего времени сопротивлялись любым попыткам математизации, а именно биологам и гуманитариям. Хотя предлагаемые здесь принципиально новые математические методы требуют только элементарного формализма, они, напротив, предполагают глубокое знакомство с понятиями и сущностями дифференциальной топологии, используемыми в аппарате классической механики, такими как дифференцируемые многообразия, векторные поля и динамические системы. Я отдаю себе отчет в возникающих при этом трудностях взаимопонимания, которые усугубляются отсутствием несложного современного учебника, с помощью которого можно было бы ознакомиться с этими понятиями. Читатель-нематематик может ознакомиться с основными понятиями, прочитав предварительно математическое резюме в конце книги. При первом чтении можно опустить главы 3 и 7, которые носят более технический характер. Этого недостаточно для устранения трудностей, но пусть извинением мне будет моя безграничная вера в способности человеческого мозга!

Хотя эту работу трудно упрекнуть в отсутствии оригинальности, я уверен, что у нее есть немало предшественников, и известных мне, и неизвестных. Среди первых я намерен упомянуть классическую работу д'Арси Томпсона *О росте и форме* [D'Arcy Thompson *On Growth and Form*], которой наша книга дает некоторое математическое подтверждение. Я бы добавил сюда и книгу К.Уоддингтона С.Н. Waddington, идеи которого о «креоде» и о «эпигенетическом ландшафте» имеют решающее значение для нашей теории. Из физиологов надо упомянуть Икскулля (*Теория значения*) [Uexkull, *Theorie de la signification*] и К.Гольдштейна (*Строение организма*) [K. Goldstein, *Der Aufbau des Organismus*]. В работе, претендующей чуть ли не на энциклопедический охват, нельзя загромождать текст всеми ссылками, в которых могла бы возникнуть необходимость. Поэтому я ограничиваюсь только необходимыми указаниями на точные технические факты и воздерживаюсь от ссылок, подтверждающих общие или философские истины: заранее приношу извинения авторам, которые не будут названы.

Я бесконечно благодарен многочисленным коллегам, которые мне помогли в моей деятельности: в особенности биологам, а именно Ф.Эритье [Ph. L'Heritier], Этьену Вольфу [Etienne Wolff] и К.Уоддингтону которые уделили мне много времени и беседы с которыми были особенно ценны. Я благодарю также моего коллегу по Страсбургскому университету П.Плювинажа [P Pluvinaje] и его ассистента М. Гельцене [M. Goeltzene], которые помогли мне в своей лаборатории сделать фотографии каустик, представленные в данной книге.

ОГЛАВЛЕНИЕ:

Предисловие

К читателю

Глава 1. Введение

1.1 Программа

А. Наследование форм

Б. Наука и индетерминизм явлений

1.2. Теория моделей

А. Формальные модели

Б. Непрерывные модели

1.3. Историко-философское отступление

А. Количественное и качественное

Б. Ошибки истории

В. Расширение нашей интуиции

1.4. Конструирование модели

А. Множество катастрофы

Б. Независимость от субстрата

В. Формы живого и неживого

Г. Заключение

Дополнение: *О понятии объекта.*

Примечания к гл. 1

Глава 2. Формы и структурная устойчивость

2.1. Изучение форм

А. Форма в обычном смысле

Б. Пространство форм

В. Структурная устойчивость

Г. Бесформенные формы

Д. Геометрические формы

2.2. Структурная устойчивость и научное наблюдение

А. Условия научного опыта

Б. Квантовое возражение

В. Изоморфные процессы

Г. Природа эмпирических функций

Д. Регулярные точки процесса

2.3 Структурная устойчивость и модели

Примечания к гл. 2

Глава 3 Структурная устойчивость в математике

3.1. Общая проблема

- А. Непрерывные семейства и бифуркация*
- Б. Алгебраическая геометрия*
- В. «Аналитическая» геометрия*
- Г. Дифференциальная топология*
- Д. Дифференциальные уравнения*
- Е. Функциональный анализ и уравнения в частных производных*

3.2. Алгебра и морфогенез

- А. Пример бифуркации*
- Б. Универсальная развертка особенности конечной коразмерности.*
- В. Пример: универсальная развертка особенности $y=x^3$*
- Г. Общая теория универсальной развертки*

Примечания к гл.3

Глава 4 Кинематика форм. Катастрофы

4.1. Пространственные процессы

- А. Морфология процесса*
- Б. Аттракторы*
- В. Распределение по бассейнам*

4.2. Математические модели регулярных процессов

- А. Статическая модель*
- Б. Метаболическая модель*
- В. Эволюция полей*
- Г. Эквивалентность моделей*
- Д. Изоморфные процессы*

4.3. Катастрофы

- А. Обыкновенные катастрофические точки*
- Б. Существенные катастрофические точки*

4.4. Морфогенетические поля, связанные с локальными катастрофами

- А. Статические модели*
- Б. Устойчивые особенности волнового фронта*
- В. Метаболические модели*

4.5. Предварительная классификация катастроф

- А. Область существования и бассейн*
- Б. Катастрофы конфликта и катастрофы бифуркации*

4.6. Термодинамическая связь

- А. Микроканоническая энтропия*
- Б. Взаимодействие двух систем*
- В. Приближение к состоянию равновесия при термодинамическом взаимодействии*
- Г. Поляризованные динамики*
- Д. Псевдогруппы локальных эквивалентностей поля*

4.7. Приведенное поле

- А. Определение приведенного поля*
- Б. Взаимодействие поля с собой. Эволюция приведенного поля*

Примечания к гл. 4

Глава 5 Элементарные катастрофы на пространстве R^4 , связанные с конфликтами режима

5.1. Динамические градиентные поля и соответствующая статическая модель

- А. Конкуренция между локальными режимами*
- Б. Условие Максвелла*

5.2. Алгебраическое изучение точечных особенностей потенциала

- А. Множество катастроф*
- Б. Страты бифуркации*
- В. Изучение изолированных особых точек. Коранг.*
- Г. Остаточная особенность*

5.3. Катастрофы коранга 1

- А. Страты коразмерности нуль*
- Б. Страты коразмерности один*
- В. Страты коразмерности два*
- Г. Страты коразмерности три*
- Д. Страты коразмерности четыре*

5.4. Элементарные катастрофы коранга два

- А. Омбилические точки*
- Б. Классификация омбилических точек*
- В. Морфология омбилик*
- Г. Параболическая омбилика: гриб*

5.5. Морфология приборя

5.6. Аттракторы метаболического поля

Примечания к гл. 5

Литература к гл. 5

Глава 6 Общая морфология

6.1. Большие типы форм и их изменения

- А. Статические и метаболические формы*
- Б. Конкуренция аттракторов гамильтоновой динамики*
- В. Появление новой фазы. Обобщенные катастрофы*
- Г. Суперпозиция катастроф*
- Д. Модели обобщенной катастрофы. Изменения фазы*
- Е. Формализация обобщенной катастрофы*

6.2. Геометрия связи

- А. Средние поля*
- Б. Средние поля связи*
- В. Среднее поле, понятия масштаба и катастрофы*

6.3. Семантические модели

- А. Определение креода*
- Б. Подкреод креода*
- В. Атлас преемственности креодов*
- Г. Примеры семантических моделей*
- Д. Анализ семантической модели*
- Е. Динамический анализ креодов статической модели*

Дополнение: *Морфология спиралевидных туманностей*

Примечания к гл. 6

Литература к гл. 6

Глава 7 Динамика форм

7.1. Механические модели

А. Ограничения классических и квантовых моделей

Б. Детерминизм

7.2. Информация и топологическая сложность

А. Принятое понятие информации

Б. Относительный характер сложности

В. Топологическая сложность формы

Г. Выбор базовой формы

Д. Сложность в пространстве-произведении

7.3. Информация, обозначение и структурная устойчивость

А. Свободное взаимодействие

Б. Энтропия формы

В. Конкуренция резонансов

7.4. Энергия и пространственная сложность

А. Спектр

Б. Теория Штурма-Лиувилля в случае многих размерностей.

В. Старение динамической системы и развитие системы к равновесию

7.5. Формальные динамики

А. Происхождение формальных динамик

Б. Явления памяти и усиления

В. Канализация равновесий

Г. Стабилизация порогов

Д. Стабилизация порогов и теория игр

Е. Другие формальные аспекты взаимодействия. Кодировка.

7.6. Форма и информация

Дополнение 1: *Инвариантность энергии и первое начало термодинамики*

Приложение 2: *Топологическая сложность динамики*

Приложение 3: *Бесконечная сложность геометрических форм*

Примечания к гл.7

Глава 8 Биология и топология

8.1. Топологический аспект биологического морфогенеза

8.2. Форма в биологии. Понятие фенотипа.

А. Пространственная форма

Б. Глобальная форма

8.3. Молекулярная биология и морфогенез

А. Недостаточность биохимии

Б. Морфология и биохимия

8.4. Информация в биологии

Дополнение: *Витализм и редукционизм*

Примечания к гл.8

Глава 9 Локальные модели в эмбриологии

- 9.1. Разнообразие локальных механизмов морфогенеза в биологии
 - 9.2. Описание модели
 - 9.3. Обсуждение известных теорий
 - А. Развитие мозаичного типа*
 - Б. Теория градиентов*
 - 9.4. Модели первичного эпигенеза
 - А. Гастрюляция у амфибий*
 - 9.5. Модели первичной полоски
 - А. Сопоставительная топология гастрюляции у позвоночных*
 - 9.6. Модели средней стадии эпигенеза
 - А. Резонансное усиление индукции: гландулярная модель*
 - Б. Пример. Морфогенез конечностей у позвоночных.*
 - 9.7. Запоздывающий эпигенез
 - А. Несколько архетипических креодов, связанных с омбилическими точками.*
- Дополнение: *Нейруляция и образование позвоночной оси*
- Примечания к гл.9

Глава 10 Глобальные модели живого существа (многоклеточного)

- 10.1. Статическая модель
 - А. Преамбула*
 - Б. Статическая глобальная модель*
 - В. Геометрия регенерации у планарий*
 - Г. Отступление: преформация и эпигенез*
- 10.2. Метаболическая модель
 - А. Границы статической модели*
 - Б. Эпигенетический полиэдр*
 - В. Фигура регуляции*
 - Г. Глобальная модель. Предварительное описание.*
 - Д. Самовоспроизводящиеся особенности*
 - Е. Смешанная модель*
- 10.3. Гидравлическая модель
 - А. Описание модели*
 - Б. Соответствие между гидравлической и метаболической моделями (энергетический полиэдр)*
 - В. Динамика гаметогенеза*
 - Г. Размножение в гидравлической модели*
 - Д. Интерпретация анимально-вегетативного градиента*
 - Е. Интерпретация внутренних переменных*
- 10.4. Формальный анализ органогенеза
 - А. Происхождение органогенеза*
 - Б. Локализация функций*
 - В. Формализм воспроизводства. Генетический материал.*
 - Г. Формальные эффекты локализации: обратимость переходов и стабилизация порогов*
 - Д. Органы эмбриона*
- 10.5. Теоретическая схема катастрофы дифференциации
- 10.6. Примеры органогенеза

А. Дыхание и кровообращение.

Б. Органогенез нервной системы

Дополнения:

[1] *Морфология растений*

[2] *Физиологическое приложение модели: болезнь и смерть*

[3] *Эпигенез нервной системы*

Примечания к гл. 10

Глава 11 Модели ультраструктуры

11.1 Деление клетки

А. Оптимальный размер

Б. Поток энергии

В. Удвоение хромосомы

Г. Модель кроссинговера (на молекулярном уровне)

11.2. Митоз

А. Митоз во внутренних координатах

Б. Митоз в пространственных координатах

11.3. Мейоз

11.4. Морфогенетические поля цитоплазмы

11.5. Теория цитоплазматических структур

А. Понятие фермента

Б. Структура ударной волны: переходные режимы

В. Правило трех состояний

Г. Ядро как хемостат

11.6. Формальные аспекты пространственного удвоения

Примечания к гл. 11

Глава 12 Великие проблемы биологии

12. 1. Целесообразность в биологии

А. Целесообразность и оптимальность

Б. Случайность и мутации

12.2. Необратимость дифференциации

А. Основные типы дифференциации

Б. Сексуальность

В. Необратимость и смерть

12.3. Происхождение жизни

А. Синтез жизни

Б. Три режима бульона

В. Закон повторения

12.4. Эволюция

А. Формы удвоения в собственном смысле

Б. Гипотетический механизм притяжения форм

В. Непривычные раздражители

Г. Бактерии и многоклеточные

Дополнения:

[1] *Целесообразность и архетипические креоды*

[2] *Универсальная модель*

Примечания к гл. 12

Литература к гл. 12

Глава 13 Катастрофы в архетипах: мышление и язык

13.1. Архетипические креоды и элементарные поля

13.2. Номо faber

А. Органы и инструменты

Б. Изготовление инструмента как креод

13.3. Сознание

А. Происхождение

Б. Модели нервной деятельности

В. Человеческая свобода

13.4. Язык

А. Язык как семантическая модель.

Б. Барьер взаимодействия и значение

В. Грамматические категории

Г. Неправильные означающие

13.5 Три важных типа человеческой деятельности: искусство, безумие и игра

А. Искусство

Б. Безумие

В. Игра

13.6 Структура сообществ

Заключение

А. Резюме тезисов

Б. Экспериментальная проверка

В. Философский аспект

Г. Эпилог

Приложения:

1. Модель памяти

2. Топологическая интерпретация грамматических функций

А. Мышление и язык

Б. Основной принцип

В. Основные структуры предложения

Г. Глагольный спектр существительного

Д. Отношение родительного падежа

Е. Переход

Ж. Происхождение письма

3. Типология языка

А. Родительный падеж

Б. Прилагательное

В. Порядок слов в глагольном предложении

Г. Формализация мышления

Примечания к приложениям

Литература к приложениям

Математическое резюме

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

«Морские волны, складки на прибрежном песке, извилистая линия песчанного берега бухты между двумя мысами, очертания холмов, форма облаков — все это составляет так много загадок формы, так много проблем морфологии...»

Д'Арси Томпсон. О росте и форме.

1.1. ПРОГРАММА

А. Наследование форм

Проблема наследования форм является одной из важнейших проблем человеческого разума. Какой бы ни была истинная природа действительности (если это выражение имеет смысл), нельзя отрицать, что наша Вселенная это не хаос. Мы различаем в ней существа, объекты, вещи, которые мы обозначаем словами. Эти существа или вещи представляют собой формы, структуры, обладающие определенной устойчивостью. Они занимают некоторую часть пространства и существуют в какой-то промежуток времени. Более того, хотя конкретное существо может узнаваться по очень разным признакам, оно легко опознается как такое. Опознание одного и того же существа по бесконечному количеству его признаков составляет проблему (классическую философскую проблему понятия), которую, по-моему, только представители гештальт-психологии формулировали в геометрических терминах, допускающих научную интерпретацию. Предположим, что эта проблема решена в соответствии с наивной интуицией, согласно которой внешние объекты существуют независимо от нашего сознания [1]. Имеет смысл считать, что спектакль Вселенной включает непрерывающуюся череду рождений, развития и разрушения форм. Предметом всякой науки является предсказание этого развития форм, и если возможно, его объяснение.

Б. Наука и индетерминизм явлений

Если бы наследование форм осуществлялось всегда и везде по одной и той же четко определенной схеме, проблема была бы менее острой. Можно было бы раз и навсегда установить в виде, допустим, таблицы или графика, обязательный порядок наследования форм, или систем форм, возникающий в окрестности какой-то точки. Это не имело бы объяснительной силы, зато давало бы алгоритм, позволяющий предвидеть изменения. Весьма вероятно, что разум привык бы считать этот обязательный порядок наследования форм проявлением причинно-следственных отношений, усмотрел бы в нем логическую импликацию. То, что необходи-

мо обратиться к гораздо более тонким соображениям — а именно, собственно к Науке, чтобы предвидеть эволюцию явлений, показывает, что строгий детерминизм развития форм отсутствует, и ситуация в одной и той же точке пространства может под влиянием неизвестных или незамеченных факторов породить явления самого различного вида. Забавно заметить в этой связи, что наука, в принципе отрицающая индетерминизм, оказывается его порождением, неблагоухарным ребенком, единственное назначение которого — уничтожение собственного отца! Так строго количественная и детерминистская теория, каковой является классическая механика, базируется на задаче преодоления качественного индетерминизма, встречающегося при рассмотрении тела в движении (например, попадет ли этот снаряд в цель, останется ли груз в равновесии или упадет?). И наоборот, такие дисциплины как гуманитарные науки или биология слишком медленно математизировались не потому, что, как часто считается, их объект слишком сложен (все в природе сложно), а вследствие того, что качественная эмпирическая дедукция и без того была достаточной для возможности предвидения и опыта.

1.2. ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ

А. Формальные модели

Перед лицом двусмысленных и катастрофических ситуаций, когда развитие явлений представляется плохо определенным, разум пытается снять неопределенность и таким образом предвидеть будущее развитие путем использования *локальных моделей*. Начиная с этого момента понятие пространственно-временного объекта влечет за собой обращение к понятию модели (это будет обсуждаться во второй главе). С этой точки зрения можно сказать, что система форм в развитии составляет *формализуемый* процесс, если существует формальная (в логико-математическом смысле) система P , отвечающая следующим условиям: всякое состояние A определенного феноменологического процесса может быть параметризовано системой высказываний a формальной системы P ; если с течением времени состояние A трансформируется в состояние B , B может быть параметризовано множеством b системы P таким, что в рамках Pb формально выводится из A . Иными словами, существует взаимнооднозначное отображение всех или некоторых высказываний P на глобальное множество форм данного процесса, инверсия которого превращает временную последовательность в логическую импликацию. Такая формальная модель не обязательно является детерминистической, поскольку из множества a можно, вообще говоря, вывести большое количество различных формальных последовательностей.

Таким образом, формальная модель не полностью удовлетворительна, поскольку не всегда допускает предсказание. В некотором смысле к такому типу относятся атомистические модели. Допускается, что любая форма, любое состояние определенного процесса есть порождение объединения или пересечения элементарных форм (атомов), обладающих сходством, неделимостью и неизменностью. Любая эволюция сводится к изменениям во взаиморасположении, организации этих элементарных форм. Если мы хотим наделить эту теорию предсказательной силой, то следует создать иную теорию — вообще говоря, количественную — а именно термодинамику, которой подчиняется расположение этих частиц.

Итак, каждая модель априорно содержит две части: *кинематическую*, задачей которой является параметризация форм или состояний определенного процесса, и *динамическую*, целью которой это описание временной эволюции от формы к форме. В рассмотренном выше случае формализуемого процесса кинематика задается формальной системой P и отображением h множеств высказываний P на формы процесса. Динамика, если бы она была известна, опре-

делала бы вероятность перехода из состояния A , параметризованного при помощи a в P , в состояние B , параметризованное при помощи b , где b — следствие из a в P . Таким образом, единственное данное формализуемой кинематики уже накладывает ограничение на динамику. Вероятность перехода из состояния A в состояние C нулевая, если $h(C)$ не является следствием в P системы $a=h(A)$. Однако естественный процесс допускает полную формализацию лишь в исключительных случаях. Как мы увидим позднее [2], в некоторых естественных явлениях исходная симметрия исчезает. Это нарушение симметрии не позволяет надеяться на возможность полной формализации. Напротив, локальные формализации возможны, что позволяет говорить о причине и результате. Только в случае, когда система P действительно является системой формальной логики, можно говорить, что явления процесса действительно объяснены. В большинстве известных примеров система P имеет более гибкую структуру. Она располагает только отношением предпорядка, которое играет роль логической импликации. Если отказаться от естественного ограничения, что P содержит не более, чем счетное количество элементов (параметризованных при помощи символов, букв и т.п.), то мы попадаем в область количественных или непрерывных моделей.

Б. Непрерывные модели

Представляется, что вполне естественно было бы превратить систему P в топологическое пространство, считая, что если точка, представляющая состояние системы, находится вне замкнутого подмножества K системы P (вне замкнутого множества точек *катастрофы*), то феноменологический облик этого состояния не меняется при достаточно малой деформации этого состояния. Каждый тип, каждая форма процесса соответствует определенной связной составляющей $P - K$.¹ Если $P - K$ — это пространство с дифференцируемой структурой (евклидово пространство \mathbf{R}^m или дифференцируемое многообразие), то динамика вводится при помощи векторного поля X в P . Теоремы существования и единственности решений дифференциальной системы с дифференцируемыми коэффициентами, несомненно, дают самую совершенную модель научного детерминизма. Возможность использовать дифференциальные модели является в моих глазах окончательным оправданием количественных моделей в естественных науках. Это положение, несомненно, заслуживает какого-нибудь доказательства. Основная черта метода, описанного в данной работе, состоит в априорном допущении существования дифференциальной модели, лежащей в основе изучаемого процесса, и — при отсутствии явных знаний о модели — выводе из этого предположения заключений относительно природы особенностей этого процесса. При таком подходе исходя из гипотетического существования модели, можно получить определенные следствия локального и качественного характера. При этом исследуется количественная сторона дела, но вовсе или почти без вычислений, и получаются качественные результаты. Этот вопрос стоит рассмотреть подробнее.

1.3. ИСТОРИКО-ФИЛОСОФСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ

А. Количественное и качественное

Термин «качественный» в науке, а особенно в физике, имеет уничижительный оттенок. Один физик напомнил мне, не без раздражения, слова Резерфорда: «Качественное соответствие теории и эксперимента — не что иное, как огрубленное количественное (Qualitative is nothing but a blurred quantitative)».

¹ То есть теоретико-множественного дополнения K до P (в других обозначениях — P/K). Здесь и ниже мы сохраняем авторскую символику. — *Прим. ред.*

ing but poor quantitative)».

Что ж, рассмотрим следующий пример: представим, что экспериментальное изучение явления Φ дает экспериментальную кривую g , описываемую уравнением $y=g(x)$. Чтобы объяснить явление Φ , теоретик может обратиться к теориям θ и θ_1 . Эти теории дают соответственно кривые $y=g_1(x)$ и $y=g_2(x)$. Ни одна из них не совпадает с экспериментальной кривой g . Кривая g_1 ближе количественно, в том смысле, что в рассматриваемом интервале интеграл разности $\int |g-g_1| dx$ меньше, чем $\int |g-g_2| dx$. Но кривая $y=g_2(x)$ имеет ту же форму и даже тот же вид, что и

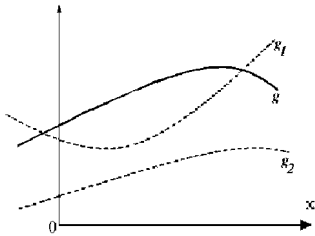


Рис. 1-1.

экспериментальная кривая g . В этом случае можно с большой долей уверенности утверждать, что теоретик скорее предпочтет обратиться к теории θ_2 , чем к θ_1 . Несмотря на более значительную количественную погрешность, можно считать, что теория θ_2 , которая дает кривую того же вида, что и экспериментальная, может сказать больше о механизме, лежащем в основе явления Φ , чем теория θ_1 , количественно более точная.

Понятно, что этот пример не имеет доказательной силы. Однако он иллюстрирует естественную тенденцию разума придавать форме кривой собственную значимость.

Именно на эту тенденцию мы намерены обратить здесь внимание и сделать на ее основе глубокие выводы.

Б. Ошибки истории

Другая причина недоверия физиков к качественным оценкам имеет исторические корни. Это противоречие между сторонниками Декарта и Ньютона, существующее с конца семнадцатого столетия. Декарт со своими вихрями, атомами, снабженными крючками, и т.п. все объяснял и ничего не подсчитывал. Ньютон с законом всемирного тяготения ($1/r^2$) все подсчитывал и ничего не объяснял. История признала правоту Ньютона и перевела декартовы построения в разряд бесплодных рассуждений и музейных экспонатов. Несомненно, позиция Ньютона полностью оправдана с точки зрения эффективности, возможности предсказания и воздействия на явления. В том же духе с интересом перечитывается предисловие к «Принципам квантовой механики» Дирака, где автор считает несущественной проблему интуитивного осмысления понятий, лежащих в основе квантовой механики [3]. Однако я не уверен, что в мире, где все явления попадают в математически адекватные схемы, но которые при этом лишены образного содержания, человеческий разум будет полностью удовлетворен. Не окажется ли это сплошным шаманством? Лишенный возможности осмыслить, то есть геометрически интерпретировать заданную схему, человек будет или несмотря ни на что создавать образы, которые бы интуитивно оправдывали данную схемы, или же впадет в непонимание, которое в силу привычки превратится в безразличие. В том, что касается гравитации, несомненно, преобладает второе. И сейчас, в 1968 году, у нас не меньше причин удивляться падению ньютонова яблока, чем их было у Ньютона. Шаманство или геометрия – такова дилемма, перед которой стоит всякая попытка научного объяснения [4]. С этой точки зрения, умы, стремящиеся к пониманию, никогда не будут испытывать к качественным и описательным теориям, от досократиков до Декарта, неприязни, свойственной сторонникам чисто количественного подхода.

Однако то, что обесценивает в глазах современников старые качественные модели, это, конечно, не невозможность получить с их помощью количественный результат.

В повседневной деятельности нас почти всегда интересует именно качественный результат, а не определенное число с точностью до десятых или сотых. Когда мы едем на машине из

города A в город B , расположенный на расстоянии двухсот километров, нас не волнует точное вычисление нашей траектории. Для нас важен качественный результат — прибыть в пункт B не позднее некоторого (приемлемого для нас) времени и не повредить машину в пути. А этот результат, предполагающий большое количество промежуточных элементарных действий, часть которых имеет достаточно узкий порог точности, может быть получен практически с единственным количественным действием — грубой оценкой количества топлива в бензобаке к началу поездки. Что обесценивает в наших глазах старинные умозрительные теории, это в основном не сам по себе их качественный характер, а безнадежно наивный и неточный характер используемых образов. Действительно, предлагаемые схемы (за исключением грандиозных глубочайших, хотя и туманных, видений первых досократиков Анаксимандра и Гераклита) основаны на интуиции твердого тела в евклидовом трехмерном пространстве. А эта интуиция, которая, видимо, вошла в генетический код нашего вида при работе с первыми инструментами и при их создании при всей своей кажущейся естественности, очень часто недостаточна, чтобы дать удовлетворительное объяснение даже большинству макроскопических явлений.

В. Расширение нашей интуиции

Может возникнуть вопрос: нельзя ли при помощи усовершенствования нашей геометрической интуиции придать научный смысл массе неясных образов и схем, которые обеспечили бы отдельным явлениям удовлетворительное качественное истолкование. На самом деле, необходимо убедиться в следующем: в результате недавних достижений в топологии и математическом анализе стали возможны строгие качественные построения. Мы знаем как (в принципе) дать определение *форме* и можем установить, имеют ли какие-либо две функции один и тот же топологический тип, одну и ту же форму. Мы постараемся в рамках заявленной здесь программы освободить нашу интуицию от рамок, задаваемых манипулированием твердыми телами в трехмерном евклидовом пространстве \mathbf{R}^3 , в пользу динамических схем более общего характера. Эти схемы в действительности не зависят от конфигурационных пространств, в которых они рассматриваются. В частности, размерности пространств и число степеней свободы локальных систем могут быть совершенно произвольными (на самом деле универсальная модель такой схемы предполагает пространство бесконечной размерности). Это, очевидным образом, необходимое условие. Очевидно, что чем дальше продвигаешься к бесконечно малому, тем больше возрастает число степеней свободы системы, так что любое качественное представление микроявлений может потребовать использования функциональных пространств бесконечной размерности.

Одна из важнейших выгод даваемых описываемым здесь методом локальных моделей заключается в том, что он не предопределяет ничего окончательно в истинной природе действительности. Даже если действительность обнаружит сложность, исключающую любое описание, в окончательное макроскопическое описание войдут только некоторые аспекты локальных моделей, отвечающие «наблюдаемым» параметрам системы. Именно посредством величин, связанных с наблюдаемыми, будет построено фазовое пространство нашей динамической модели, безотносительно к лежащим в основании более или менее хаотическим структурам. Для любой отдельной системы явлений, относительно независимых от окружающей ее среды, делается попытка построить локальную модель, которая дает качественное, а в наиболее благоприятном случае и количественное отражение феноменологии системы. Но нельзя надеяться априорно интегрировать все локальные модели в глобальную структуру. Если бы было возможно охватить все локальные схемы грандиозным всеобщим синтезом, человек имел бы основание говорить, что он познал *истинную природу действительности*, поскольку лучшей модели не существует. Я лично полагаю, что это необоснованное притязание. С боль-

шой долей вероятности можно утверждать, что эра космических обобщений завершилась с разработкой общей теории относительности, и очень сомнительно (и, несомненно, мало продуктивно) стремиться ее возобновить.

1.4. КОНСТРУИРОВАНИЕ МОДЕЛИ

А. Множество катастрофы

Чтобы параметризовать локальные состояния системы, предлагается общая модель следующего вида: в дифференцируемом многообразии M имеется замкнутое подмножество K , называемое *множеством катастрофы*; если точка t , представляющая состояние системы, не пересекается с K , локальный феноменологический тип системы не меняется. Основная предлагаемая здесь идея заключается в том, что локальная природа подмножества K , топологический тип особенностей и т.п. определяются стоящей за ними динамикой, которую в общем случае невозможно эксплицировать. Эволюция системы будет определяться векторным полем X в M , задающим макродинамику. Там, где точка t пересекается с замкнутым множеством K , в поведении системы происходит скачок, что интерпретируется как изменение предшествующей формы, то есть морфогенез. Из-за отмеченных ниже ограничений на локальную природу особенностей множества K в какой-то степени можно классифицировать и предвидеть особенности морфогенеза системы, даже не зная ни стоящей за ней динамики, ни динамики макроскопической эволюции, задаваемой полем X . На самом деле, в большинстве случаев действуют в противоположном направлении. *На основании макроскопического исследования морфогенеза процесса, локального или глобального изучения его особенностей пытаются восстановить динамику, которая их порождает.* Создание глобальной количественной модели M, K, X остается, очевидно, идеалом, к которому надо стремиться. Но эта задача может оказаться сложной, или даже не имеющей решения. Тем не менее локальная динамическая интерпретация особенностей морфогенеза остается возможной и полезной. В любом случае это необходимые предварительные действия для построения кинематики модели и, даже если описание динамики и глобальной эволюции невозможно, локальное понимание процесса будет значительно усовершенствовано.

Предложенная здесь программа выдвигает на самый первый план внимание к особенностям морфогенеза процессов, к скачкам в облике явлений. В четвертой главе будет дана очень общая классификация таких изменений формы, которые мы будем называть *катастрофами*.

Б. Независимость от субстрата

То, что таким образом можно создать абстрактную геометрическую теорию морфогенеза, *не зависящую от субстрата форм и природы сил, которые их создают*, представляется многим невозможным, особенно экспериментаторам, привыкшим резать по живому и находящимся в непрерывной борьбе с действительностью, которая им сопротивляется. Однако эта идея не нова, она сформулирована почти в явном виде в классическом трактате д'Арсси Томпсона *О росте и форме*. Но идеи этого великого провидца слишком опережали время, чтобы оказаться принятыми. Они были часто выражены в очень наивной с геометрической точки зрения форме, им не хватало математических доказательств, которые стали возможны благодаря недавним достижениям в дифференциальной топологии и анализе. С достаточно общей точки зрения просматривается одно возражение. Если, в соответствие с нашим основным постулатом, устойчивые особенности любого морфогенеза определяются единственным измерением окружающего пространства, то почему все явления нашего трехмерного мира не обладают одинаковой морфологией? Почему форма облаков отличается от формы гор, а форма кри-

сталлов не такая, как у живых существ? На это я отвечу, что наша модель имеет целью классифицировать только *локальные случаи* морфогенеза, которые мы называем *элементарными катастрофами*. Но общий макроскопический облик, форма в обычном смысле слова, происходит из совокупности огромного количества локальных случаев. И статистика локальных катастроф, корреляции, которые определяют их появление по ходу заданного процесса, определяются внутренней топологической структурой и динамикой. Интеграция всех этих случаев в единую глобальную структуру требует, если приложить нашу модель, рассмотрения катастроф в пространстве гораздо большей размерности, чем наше трехмерное. И именно благодаря топологическому богатству внутренних динамик, их более или менее цельному характеру в конце концов можно будет объяснить почти бесконечное многообразие внешнего мира и, может быть, фундаментальное различие между живым и неживым.

В. Формы живого и неживого

В этой связи нужно рассмотреть эту неправильно понимаемую ситуацию в целом. Тогда как форма живых существ в течение веков притягивала внимание биологов, морфология в неживой природе только случайно вызывала интерес физико-химиков. В этой связи можно вспомнить несколько дисциплин, эмпирическая польза которых очевидна. Это форма облаков в метеорологии, формы земного рельефа в структурной геологии и геоморфологии. Эти науки располагают корпусом точных наблюдений и локальными динамическими объяснениями, нередко вполне удовлетворительными. Но там не делалось практически никаких попыток глобального обобщения, которое поднялось бы над чисто словесными описаниями. Можно упомянуть также астрономию, изучающую морфологию звездных объектов (и в особенности спиралевидные туманности, которые мы рассмотрим в главе 6). Теория структуры кристаллических решеток, развивающаяся благодаря практическим потребностям металлургии, также хорошо разработана. Но центральная проблема, изучение геометрического распределения вещества между двумя фазами никогда не становилась предметом систематических исследований, и не имеется ни одной модели для объяснения, к примеру, древовидного роста кристаллов. Причина такого отношения физикохимиков вполне понятна [5]. Речь идет об очень неустойчивых, сложно воспроизводимых явлениях, априори сопротивляющихся любой математизации. *На самом деле, характер любой формы, любого морфогенеза — это дискретное выражение свойств среды.* А ничто так не ставит математика в затруднение, как дискретность, поскольку любая количественная модель, пригодная к применению, основывается на использовании непрерывных аналитических функций. Так явление обрушения волны (deferlement) в гидродинамике понято еще очень плохо. Однако оно играет большую роль в морфогенезе в трехмерном пространстве. С редким предвидением д'Арсси Томпсон сравнивал форму медузы с фигурой, образуемой при диффузии в воде чернильной капли [6]. Не исключено, что изучение более медленного и лучше контролируемого морфогенеза в биологии поможет в понимании некоторых быстрых и трудноуловимых явлений морфогенеза в неживой природе.

Г. Заключение

Выбор явлений, считающихся интересными для науки, несомненно, в огромной степени произволен. Современные физики создают громадные устройства, чтобы зафиксировать состояния продолжительностью не более 10^{-23} секунды. Конечно, нет ничего предосудительного в стремлении ученых создавать всевозможные технические средства для изучения всех явлений, доступных для восприятия. Но закономерен вопрос: большое количество знакомых (в том смысле, что они больше не привлекают внимания!) явлений плохо описываются теорией, к примеру, трещины на старой стене, форма облаков, листопад, пена на кружке пива... Кто зна-

ет, может, усердные математические размышления над мелкими явлениями оказались бы в конечном счете более полезными для науки.

Читатель почувствует определенно досократический дух предлагаемой здесь качественной динамики. Эпиграфы из афоризмов Гераклита стоят перед несколькими главами потому, что ничто не подходит лучше к размышлениям такого рода. Действительно, основные интуитивные положения морфогенеза можно найти уже у Гераклита. Моя единственная задача была поместить их в геометрические и динамические рамки, допускающие количественный анализ. «Глас веский, беспристрастный», подобный гласу Сивиллы, который звучит не ослабевая уже тысячелетия, заслужил это отдаленное эхо.

ДОПОЛНЕНИЕ

О понятии объекта. Обозначим через U пространство всех возможных положений моего тела во внешнем мире. В каждом положении $u \in U$ множество поля ощущений, создаваемого моими органами чувств, в принципе разложимо на дискретные сущности, или *формы*, каждая из которых сохраняется при небольшом перемещении точки u . Таким образом, каждой точке u из U ставится в соответствие дискретное множество форм F_u и объединение множеств F_u может быть снабжено топологией, которая превращает пространство $\cup_u F_u$ в пространство U^* , построенное над U . Если V открыто в U , то можно рассмотреть множество $G(V)$ сечений отображения $V^* \Rightarrow V$, порождаемого отображением $U^* \Rightarrow U$, и если $V \subset V'$, то имеется каноническое ограниченное отображение $G(V') \Rightarrow G(V)$. *Объектом*, по определению, называется любое максимальное сечение U^*U по оператору продолжения $G(V') \Rightarrow G(V)$. Таким образом, каждому объекту c поставлена в соответствие его область существования $J(c) \subset U$. Эта область обязательно связная. Например, если форма A — лист бумаги и если я его сминаю, то есть придаю ему вид B , A может быть непрерывно деформирован в B и наоборот B в A , если листок разгладить. A и B — два вида одного объекта. Но если я разрываю листок, т.е. придаю ему вид C , я получаю новый объект, поскольку переход $A \Rightarrow C$ необратим.

Другой постулат, задающий то, что обычно понимается под объектом, следующий: *каждый объект (c) характеризуется своей областью существования $J(c)$* . Или иначе говоря, если два объекта имеют одну и ту же область существования, они идентичны. Из этого следует, что если описывается петля k в пространстве U и если ее продолжить последовательностью сечений $U^* \Rightarrow U$ вдоль k , эти сечения никогда не меняются местами. Этот постулат не согласуется с квантовым принципом неопределенности. Действительно, в этом случае в пространстве U условий наблюдения поля с k частицами в камере имеется замкнутое подпространство K , соответствующее состояниям, когда по крайней мере две частицы столкнулись. Множество $U-K$ связное, и если u и v — две различные точки из $U-K$, соответствующие состояниям частиц (a_1, \dots, a_k) и (b_1, \dots, b_k) , то любой путь q , связывающий u с v , позволяет отождествить множество (a_1, \dots, a_k) с множеством (b_1, \dots, b_k) . Но эта идентификация в общем зависит от класса гомотопии пути q , прослеживаемого в $U-K$.

Равным образом можно предположить, что два объекта A, B функционально связаны в том смысле, что любое преобразование $A \Rightarrow A'$ в U продолжается в преобразование $B \Rightarrow B'$, но тем не менее может существовать преобразование $B \Rightarrow B''$, которое не затрагивает A . Тогда говорят, что B это *отражение* A . Эту аномалию можно избежать в случае твердых тел внешнего мира только благодаря тому, что материя взаимно непроницаема, что позволяет манипулировать отдельно каждым объектом. Однако кажется вероятным, что свойства связности, обратимости и «неразложимости», которые задают пространство обликов одного и того же объекта, происходят не от физических свойств внешнего мира, а от ограничений нашей физической динамики (которая, как мы увидим в главе 13, запрещает нам думать более чем об одной вещи

сразу).

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Самый убежденный солипсист если он продолжает жить и действовать, обязательно должен подчиниться внешнему ходу вещей, допустить их структурную инвариантность, чтобы их использовать. Что это, как не признание тем самым их определенной реальности?

[2] Мы намекаем здесь на *обобщенные катастрофы*, описанные в главе 6 и отвечающие за нарушение симметрии.

[3] «главная цель физики это не получение картин, но формулировка законов, управляющих явлениями, и использование этих законов для открытия новых явлений. Если есть картина, тем лучше. Но есть картина или нет — это вопрос десятый» П. Дирак, *Принципы квантовой механики*. (P.A.M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford 1961, p.10.)

[4] Как будет показано в главе 13, классическая евклидова геометрия может рассматриваться как магия. Ценой минимальных деформаций облика (точка без протяженности, прямая без толщины...), чисто формальный язык геометрии адекватно описывает пространственную реальность. В этом смысле можно сказать, что *геометрия — это успешная магия*. Я бы хотел сказать обратное: не является ли любая успешная магия геометрией?

[5] Отсутствие интереса ученых к морфогенезу неживого, возможно, берет свое начало тоже в биологии. Действительно, весь наш аппарат восприятия генетически настроен на обнаружение живых существ — жертв или врагов и в этом смысле играет большую роль в нашем выживании и поддержании физиологического равновесия. Напротив, неживые объекты привлекают только рассеянное беглое внимание и только в той мере, в какой их форма напоминает живое существо.

[6] D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, Cambridge Press, Oxford, 1961, p. 72-73.

ГЛАВА 2

ФОРМЫ И СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

2.1. ИЗУЧЕНИЕ ФОРМ

А. Форма в обычном смысле

Что такое форма? Если попытаться дать определение, покрывающее все, что обычно понимают под этим словом, задача будет непростой. С математической точки зрения сразу же напрашивается следующее определение: два топологических пространства X и Y имеют одинаковую форму, если они *гомеоморфны* (т.е. если существует отображение $f: X \Rightarrow Y$, которое является взаимнооднозначным и в обе стороны непрерывным). Если ограничиться определением формы объектов в евклидовом пространстве \mathbf{R}^3 , то понятие гомеоморфизма будет, очевидно, слишком гибким, чтобы соответствовать тому, что обычно понимается под формой объекта. Обратим внимание сначала на тот факт, что то, что обычно называется пространственным объектом, является, с топологической точки зрения, закрытым подмножеством пространства (и даже компактом, поскольку кроме крайне редких случаев объекты не простираются до бесконечности). Поэтому можно предложить новое определение: два объекта A и A' пространства имеют общую форму, если существует движение D пространства \mathbf{R}^3 такое, что $A' = D(A)$ (D преобразует объект A в объект A'). В этом случае определение будет слишком узким. Кроме того, с точки зрения гештальт-психологии неочевидно, что квадрат с вертикальными и горизонтальными сторонами и такой же квадрат, наклоненный под углом 45° , представляют одну и ту же фигуру (см. рис. 2-1).

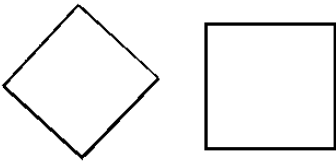


Рис. 2-1.

Итак, группа движений не подходит. Ее следует заменить псевдогруппой локальных гомеоморфизмов, которые оставляют форму инвариантной. Формально определить такую псевдогруппу нелегко. Априори, эта псевдогруппа должна сохранять инвариантность горизонтальных и вертикальных направлений, содержать движения, а также окрестность единицы группы аффинных преобразований $x' = kx, y' = ky$ плоскости xOy [1]. Суще-

ствует ли на самом деле такая единственная псевдогруппа G , подходящая для всех форм сразу? Вероятно, нет. Можно предположить, что каждая произвольно определенная форма F допускает такую собственную псевдогруппу G_F . Очевидно, что определенные формы имеют для нас практическую ценность или являются биологически важными. Таковы формы продуктов питания, животных, инструментов. Эти формы глубоко врезаны, впечатаны в восприятие на генетическом уровне вида, и их инвариантная псевдогруппа G_F для них узко специально приспособлена. Дать точное определение этой псевдогруппы G_F в общем случае сложно или даже невозможно. Например, определение пространственной формы животного — это то, что в би-

ологии называют фенотипом этого животного. А как будет показано в главе 8, нет ничего более сложного, чем точно определить фенотип. Следует подойти к проблеме классификации пространственных форм с другой точки зрения, близкой к «гештальтистской».

Б. Пространство форм

Рассмотрим пространство Y всех компактов пространства \mathbf{R}^3 , снабженное хаусдорфовой топологией. Это пространство, по крайней мере, в своей наиболее значительной части, разделено на бассейны (области притяжения) аттракторов, где каждый аттрактор соответствует биологически важной форме. Это подразделение на бассейны, естественно, не является раз и навсегда данным для данного субъекта, оно может изменяться с изменением психического состояния субъекта, его осознанных и неосознанных потребностей и т.п. Как известно, на этой изменчивости построены тесты Роршаха. Хотя эта интерпретация восприятия форм имеет все шансы оказаться правильной, она не очень успешно продвигает нас в создании математической модели. Мы возвращаемся к более абстрактной ситуации при помощи следующего определения: если E — топологическое пространство, а G — группа (или псевдогруппа) заданная на E , то G -форма — это по определению класс эквивалентности замкнутых множеств E , определяемый действием G . Если, к примеру, E это дифференцируемое многообразие, а G — группа Ли, которая дифференцируема в E , то вообще говоря, существует непрерывная бесконечность классов эквивалентности G -форм. Каждая G -форма будет параметризована системой действительных параметров. Но если G это группа (или псевдогруппа) бесконечной размерности, то может случиться, что будет получено только конечное (или самое большее счетное) множество форм, обладающих свойством *структурной устойчивости*.

В. Структурная устойчивость

Будем называть G -форму A *структурно устойчивой*, если любая форма B , достаточно близкая к A в E , является G -эквивалентной A . Иными словами, чтобы класс G -эквивалентности F определял структурно устойчивую форму, необходимо и достаточно, чтобы совокупность точек E этого класса эквивалентностей образовывала открытое множество в пространстве E . Понятие структурной устойчивости, с моей точки зрения, является ключевым в интерпретации явлений, к каким бы научным понятиям они не относились (кроме, может быть, квантовой физики) и в свое время будет объяснено, почему. Пока же заметим только, что субъективно отождествляемые формы, формы, представленные в языках именами существительными, *обязательно являются структурно устойчивыми*. Действительно, естественно существующий объект всегда подвержен деформирующим влияниям со стороны внешней среды, которые, пусть очень слабые, всегда как-то воздействуют на форму объекта. Для сохранения постоянства формы эти изменения не должны выходить за рамки класса G -эквивалентности. В таком случае в пространстве будет существовать открытое множество, образованное точками, представляющими структурно устойчивые формы. Дополнение этого множества содержит только неустойчивые формы, изменяющиеся при малейшем воздействии; такие формы не заслуживают такого названия, они, собственно, являются *бесформенными*.

Г. Бесформенные формы

На самом деле, можно выделить два основных типа неустойчивых форм, которые можно связать непрерывной цепью промежуточных случаев. Некоторые формы являются *бесформен-*

⁷ То есть бесконечность мощности континуума. — *Прим. ред.*

ными, поскольку они имеют очень сложную хаотическую внутреннюю структуру, так что в них невозможно выделить определенные элементы. Другие, напротив, составлены из небольшого числа идентифицируемых элементов, однако их объединение представляется противоречивым или очень необычным (типичными примерами являются химеры и другие чудовища). Эти неустойчивые формы в определенном выше пространстве U представляют формы *бифуркации*. Точка, представляющая соответствующее состояние системы, расположена на разделе между двумя или несколькими бассейнами аттракторов. При виде этих форм восприятие колеблется между соседними аттракторами, будучи не в состоянии сделать выбор. В результате наблюдатель испытывает неудобство или страх. Художники-сюрреалисты прекрасно знают этот эффект, который они сполна использовали. Напротив, неустойчивые формы первого типа представлены в U точками, прилегающими к бесконечному числу различных бассейнов (в статической модели, определенной в главе 4, эти формы находятся в стратах¹ множества бифуркации бесконечной коразмерности). См. фото 1.

Д. Геометрические формы

К этому списку добавим такие геометрические формы, как прямая, квадрат, треугольник и т.п. Группа эквивалентности этих форм является теоретически группой Ли конечной размерности и в хаусдорфовом пространстве пространственных форм они образуют страты бесконечной коразмерности. Но с «гештальтистской» точки зрения не вызывает сомнения что эти формы на самом деле открыты, поскольку они допускают незначительные деформации, не переставая быть опознаваемыми. Несомненно, в зарождении геометрической мысли человека следует видеть крайний случай *стабилизации порогов*, описанной в главах 5 и 9.

2.2. СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И НАУЧНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ

А. Условия научного опыта

Вернемся к фундаментальному понятию структурной устойчивости. Вселенная, как мы сказали, не хаос; мы наблюдаем в ней рекуррентность типичных форм, которым мы даем имена. Кроме того следует осмыслить сами условия научного наблюдения. Ученый не может наблюдать все Вселенную целиком. Он вынужден выделить для наблюдения и эксперимента некоторую подсистему, внутренняя эволюция которой не зависела бы от остальной части Вселенной. Практически ученый изолирует подсистему S в камере B , уточняя ее геометрические характеристики и природу используемых инструментов регистрации. Далее следует подготовить определенное состояние a системы S . Это определяется процедурой подготовки, т.е. способом наполнения камеры B , описываемого с максимально возможной точностью. Когда состояние системы a достигнуто, наблюдатель наблюдает или подвергает эксперименту содержимое камеры B в определенные промежутки времени после подготовки a . Надежда экспериментатора (без которой, надо сказать, его работа была бы напрасной) заключается в том, что если другой ученый предпримет тот же опыт в другое время и в другом месте в камере B' , соотносимой с B посредством элемента галилеевой группы g , используя ту же процедуру подготовки a , то он будет наблюдать в B' хотя бы приблизительно те же явления, что и в B . Однако какие бы предосторожности ни были предприняты для изоляции системы S , нельзя надеяться полностью исключить взаимодействие S с внешним миром. Более того, *процедура подготовки может быть описана и реализована только приблизительно*. Начальные условия двух экспериментов

¹ Опонятии стратификации см 3.1Г. — Прим. ред.

никогда не будут в точности совпадать, и это начальное расхождение обязательно повлияет на развитие системы. Таким образом, можно надеяться получить приблизительно одинаковые (благодаря движению g) результаты, только предполагая, что эволюция системы S начиная с состояния a по крайней мере на качественном уровне устойчива по отношению к воздействию на начальные условия и внешнюю среду. Таким образом, *гипотеза о структурной устойчивости изолированных научных процессов является скрытым постулатом любого научного наблюдения.*

Остается уточнить, что подразумевается, когда утверждается, что явления в камерах B и B' приблизительно «те же». Предположим, что в некоторый момент времени наблюдатель может описать локальное состояние системы в любой точке (x, t) произведения B на ось времени T (скажем, при помощи локальных зондов). Тогда приблизительное постоянство качественных результатов в B и B' может быть выражено следующим образом: существует ϵ -гомеоморфизм произведения $B \times T: h(x, t) \Rightarrow (x, t)$ такой, что произведение преобразований $g \circ h$ отображает процесс в B на процесс в B' . С этой точки зрения локальное состояние процесса можно также определить как *росток* структурно устойчивой эволюции данного процесса.

Б. Квантовое возражение

Это рассуждение, выдержанное в классическом и доквантовом духе, будет с порога отвергнуто представителем квантовой физики, который не преминет возразить, что:

1. любой опыт, любое измерение нарушает течение процесса, причем иногда необратимо;
2. не существует какой-либо локальной устойчивости в масштабе отдельных процессов, а существует только статистическая устойчивость для большого числа случаев.

Я думаю, что те же трудности возникают в многочисленных процессах, которые считаются классическими. Например, в биологии наблюдатель нередко должен убить изучаемое животное, чтобы вскрыть его. В этом нет помехи для описания процесса, потому что можно возобновить эксперимент с другим животным и продвинуться дальше, вмешавшись позже. Равным образом возникает и трудность второго типа: никогда нет уверенности, что два животных действительно имеют сходную наследственность (генотип) и эта неизвестная разница может нарушить устойчивость воспроизводимого процесса. Лично я считаю, что трудности, с которыми столкнулся бы физик, пытаясь привести два электрона строго в одно и то же состояние, имеет ту же природу, что и трудности биолога, стремящегося получить двух уток с одинаковыми наследственными свойствами. В квантовой механике любая система в момент t несет следы (иногда неустранимые) всех взаимодействий, через которые ранее прошла система, и особенно тех, которые привели к ее возникновению, и эти эффекты, вообще говоря, невозможно ни выявить, ни оценить. В заключение отметим, что предложенную здесь схему, как и все рассматриваемые модели, нужно понимать как некую идеализацию, несомненно применимую к многочисленным макропроцессам. Я не удивлюсь, если она окажется пригодной и для описания квантовых явлений, но несомненно, принцип неопределенности заставляет отказаться от традиционных пространственных координат при определении основного пространства.

В. Изоморфные процессы

Остается точно определить, что мы называем *изоморфными процессами*, т.е. процессами, преобразуемыми один в другой при помощи некоторого гомеоморфизма камеры B (или про-

изведения B на T). Для начала заметим, что состояние a системы S в принципе не изолировано во множестве состояний системы. На самом деле любая процедура подготовки обязательно включает в себя задание реальных параметров c в конечном или бесконечном количестве. Например, единственная метрическая форма камеры B может требовать для своего описания бесконечного числа параметров, то есть функционального пространства. Несомненно, некоторые из этих параметров могут оказаться избыточными, не оказывая заметного влияния на развитие процесса. В этом случае этими параметрами можно пренебречь, то есть, с геометрической точки зрения, перейти к фактор-пространству. В конечном счете состояния системы S распределяются в топологическом пространстве, в котором связанные составляющие оказываются дифференцируемыми многообразиями конечной или бесконечной размерности. В последнем случае можно попытаться интерпретировать эти многообразия как функциональные пространства. В современной квантовой механике эти многообразия – пространства L^2 (пространства функций, квадрат которых интегрируем), имеющие гильбертову структуру. В более общем виде можно снабдить эти функциональные пространства топологией C^n , поскольку речь идет о дифференцируемых непрерывно m -кратно дифференцируемых отображениях. Если исходное многообразие компактно, то такое многообразие имеет локально линейную структуру *банахова пространства*.

Топологию пространства состояний можно также определить посредством меры. Допустим, что с помощью зондов, вводимых в камеру B , наблюдатель может измерять какие-то характерные величины локального процесса. Он получит функцию $g(x, t)$, характеризующую состояние a , и даже если процедура измерения необратимо нарушит нормальное развитие процесса, это не вызовет помех, поскольку состояние a при $t=0$ неограниченно воспроизводимо. Вообще говоря, функции $g(x, t)$, которые могут быть получены этим путем, не являются независимыми и могут быть вычислены, с помощью некоторого конечного числа таких функций. Таким образом можно параметризовать соседние с a состояния точками функционального пространства (или конечного произведения функциональных пространств).

Г. Природа эмпирических функций

Здесь ставится предварительный вопрос, по поводу которого даже сейчас физики расходятся во мнении. Измеримые функции $g(x, t)$ определяются только конечной сетью точек, поскольку в B можно ввести только конечное число зондов и сделать конечное число замеров (человеческая жизнь конечна, а каждое измерение занимает конечно время). Какие гипотезы можно строить о математической природе этих функций, известных только по конечному множеству своих точек? Являются ли эти функции аналитическими (включая многочлены) или, напротив, только дифференцируемыми? Я считаю, что ответ очень прост: все зависит от того, что вы хотите сделать. Если вы хотите построить точную количественную модель, нужно делать многочисленные подсчеты и проверки. Только аналитические функции (на самом деле, только многочлены низкой степени!) вычислимы. В этом случае функции $g(x, t)$ будут аналитическими, задаваемыми в основном формулами в явном виде. Если же вы хотите исследовать процесс только с точки зрения структурной устойчивости, то напротив, более естественно предположить функции $g(x, t)$ только m раз непрерывно дифференцируемыми (где m мало – на практике 2 или 3). Тогда локальное или глобальное состояние нашей системы будет параметризоваться точкой функционального пространства, банахового многообразия, и ситуация будет аналогична ситуации, возникающей при процедуре подготовки. Однако мы более специальным образом интересуемся морфогенетическими процессами, которые характеризуются возникновением и эволюцией фигурных структур (форм) в камере B . Эти структуры характеризуются заданием в B замкнутого множества K , такого, что в каждой точке K процесс

меняет вид. Такое замкнутое множество K называется *множеством катастрофических точек* процесса. Естественно постулировать, что точка (x, t) из $B \ T$ катастрофическая, если по крайней мере одна из функций $g(x, t)$ (или одна из ее первых или вторых производных) имеет в этой точке разрыв. Предполагается, что K не является локально плотным. Если оно оказывается таковым в окрестности точки (x_0, t_0) , то мы будем иметь основные считать процесс в окрестности этой точки изначально хаотическим и турбулентным, и понятие структурной устойчивости потеряет большую часть своей привлекательности. Таким образом, для двух реализаций одного и того же состояния a в камерах B и B' , различающихся в пространстве и времени, катастрофические замкнутые множества K и K' соотносятся при помощи ϵ -гомеоморфизма произведения $B \ T$. В частности, в обеих камерах они имеют один и тот же топологический тип, одну и ту же форму.

Д. Регулярные точки процесса

На открытом множестве $B \ T$ - K , дополнительном к катастрофическим точкам, процесс называется *регулярным*. В окрестности любой регулярной точки из $B \ T$ функции $g(x, t)$ непрерывно дифференцируемы. Если локальное состояние представлено точкой функционального пространства $L(X, Y)$, то локальная эволюция будет определяться отображением $F: B \ T \ X \Rightarrow Y$. Таким образом предполагается, что в любой точке (x, t) имеется отображение $s(x, t): X \ Y$ определяемое при помощи $F(x, t, m) = y, m \in X, y \in Y$. Предполагается, что локальная эволюция процесса определяется дифференциальным оператором вида

$$\frac{ds(x, t)}{dt} = A(s, x, t) \quad (2-1)$$

таким, что локальная задача, задаваемая этим уравнением в частных производных, как говорят специалисты по математическому анализу, *корректно поставлена*. Тогда решения задачи Коши будут локально единственными и зависящими непрерывно от исходных данных. На изоморфизм, связывающий две реализации одного и того же структурно устойчивого процесса, различающиеся в пространстве и времени (который определяется преобразованием вида

$$B \ T \xrightarrow{g^h} B' \ T$$

где g – движение, а h – гомеоморфизм), надо наложить следующее ограничение: h является локальным диффеоморфизмом в каждой регулярной точке $B \ T$. Если теперь (x', t') – результат отображения g^h регулярной точки (x, t) из $B \ T$, то (x', t') – регулярная точка $B' \ T$, и в окрестности этой точки процесс определяется тем же функциональным пространством $L(X, Y)$, что и в точке (x, t) , а закон локальной эволюции определяется дифференциальным уравнением вида

$$\frac{ds'(x', t, m)}{dt} = B(s', x', t)$$

Очевидно, что этот дифференциальный оператор возникает в результате преобразования оператора (2-1) при помощи диффеоморфизма g^h над переменными (x, t) , продолженного до диффеоморфизма вида

$$(x, t, m, y) \Rightarrow (x', t', m, y)$$

действующего также на *внутренние* переменные ($m \in X$) и ($y \in Y$).

2.3. СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И МОДЕЛИ

В предыдущей главе мы определили два типа моделей: *формальные* и *непрерывные*. Формальные модели, к которым относится и кинематика, являющаяся формальной системой, имеют следующие преимущества: их описания как аксиоматического, так и комбинаторного характера довольно легки, дедукция в них формализована и теоретически механизуема. Поскольку дедукция — неопределенная операция, формальная модель совместима с некоторой неопределенностью явлений. Но у формальных моделей есть и неудобства: некоторые вопросы могут оказаться *неразрешимыми* в пределах системы (например, вопрос о том, является ли высказывание *b* следствием множества высказываний *a*). Наконец, в формальных моделях *невозможна никакая динамика*.

В отличие от формальных моделей непрерывные модели допускают динамику. Использование дифференциальных систем придает модели строгий детерминизм. Это не исключает возможности описания качественно недетерминированных явлений с помощью структурно неустойчивых дифференциальных систем. Но и у непрерывных моделей есть свои неудобства: они в целом неудобны для описания. Чтобы получить дифференциальные уравнения в явном виде, приходится ограничиваться только небольшим числом геометрических и алгебраических сущностей, допускающих простое описание. Поэтому в общем случае возникает конфликт с требованием структурной устойчивости, выдвигаемым априори, поскольку речь идет об описании эмпирически устойчивого процесса. Если выдвигается это строгое требование, приходится рассматривать не единственную динамическую систему, а целое открытое множество топологически эквивалентных динамик. Таким образом в модель снова вносится дискретный элемент, который придаст ей сходство с формальной системой.

Может возникнуть соблазн признать превосходство формальных систем, но такой вывод был бы слишком поспешен. Если верно, как говорит Поль Валери, что «нет геометрии без языка», то не менее справедливо — как предвидели некоторые логики [2] — что нет осмысленного языка без геометрии, без глубинной динамики, при помощи которой язык формализует структурно устойчивые состояния. В действительности, *понимание* формальной модели предполагает ее *семантическую реализацию*, то есть возможность придать значение каждому символу системы. Так, согласно модели К. Зимана, описанной в главе 13, множество физиологических процессов, происходящих в мозгу, когда мы придаем символу значение, является динамикой. Согласно нашей модели языка, структурно устойчивые аттракторы этой динамики порождают символы соответствующего формального языка.

Эти соображения показывают важность понятия структурной устойчивости для математических объектов. Теперь перейдем к обзору многочисленных разделов математики, где ставится проблема структурной устойчивости. Мы увидим, что эта сложная проблема несмотря на свою важность, очень редко ставилась и в настоящее время решена еще только очень фрагментарно.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Можно заметить, что псевдо-группа эквивалентности формы животного имеет формальные свойства, очень похожие на псевдо-группу эквивалентности связанной с формой буквы, например, в письме от руки. Совпадение, несомненно, неслучайно.

[2] «...Рассматриваемое сравнение ведет также к очень интересной проблеме создания теории доказательств, которые являются эффективно понимаемыми, а не только правильными. Соответствующая геометрическая проблема заключается в поиске теории осуществимых конструкций, в которые включаются только точки, близкие к исходной и устойчивые при небольших изменениях ис-

ходных данных (это очевидным образом требует определения меры геометрической интуиции).»

Г. Крейзель и Ж. Кривин, *Элементы математической логики*

(G. Kreisel, J.L. Krivine, *Elements de Logique Mathematique*, Monographies de la Societe Mathematique de France, 3, Dunod, Paris, p.209).

ГЛАВА 3

СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В МАТЕМАТИКЕ

3.1. ОБЩАЯ ПРОБЛЕМА

А. Непрерывные семейства и бифуркация

В любой теории, связанной со структурной устойчивостью, с самого начала возникает следующая ситуация. В неизбежно неточных терминах задается непрерывное семейство геометрических объектов E_s . Каждый объект этого семейства параметрируется некоторой точкой a пространства параметров S . На практике S это евклидово пространство или дифференцируемое многообразие конечной или бесконечной размерности. Пусть s — данная точка из S , а E_s — соответствующий объект семейства. Может случиться, что если t — точка из S , достаточно близкая к s , то соответствующий объект E_t , имеет ту же форму (в смысле, уточняемом в каж-

дом отдельном случае), что и объект E . В таком случае говорят, что E – структурно устойчивый объект семейства (называемый также *образующим*) [1]. Множество s точек из S структурно устойчиво, оно образует открытое множество, множество образующих точек. Дополнение K этого открытого множества мы будем называть *замкнутым множеством точек бифуркации*. То, что обычно называется проблемой устойчивости, может быть теперь сформулировано следующим образом: является ли множество K нигде не плотным? Наконец, во многих теориях пытаются уточнить топологическую природу замкнутого K , описывая его структуру и особенности. Мы рассмотрим основные теории, в которых встречается эта ситуация, переходя от более простых к более сложным и от более разработанных к менее разработанным.

Б. Алгебраическая геометрия

Пусть дана система алгебраических уравнений вида

$$P_j(x_i, s_k) = 0 \quad (3-1)$$

где x_i и s_k – координаты в евклидовых пространствах \mathbf{R}^n и S соответственно, а P_j – многочлены с переменными x_i и s_k . Если зафиксировать координаты s_k , то система (3-1) определяет алгебраическое множество $E(s_k)$, множество точек решений системы (3-1), при заданных значениях s_k . Значения коэффициентов могут быть при этом действительными или комплексными. Тогда вопрос о устойчивости E в топологическом смысле допускает положительный ответ следующего вида: в S существует истинное (т.е. нигде не плотное) алгебраическое подмножество K , такое что если s и t – две точки одной и той же связной составляющей дополнения $S-K$, то соответствующие им множества E и E_t гомеоморфны. Вследствие изотопии окружающего пространства \mathbf{R}^n этот гомеоморфизм непрерывно деформируем в тождество.

Технический комментарий. В случае действительных коэффициентов приведенный выше результат можно улучшить, заменяя алгебраическое множество K меньшим полу-алгебраическим множеством K' . Для комплексных коэффициентов множество K' оказывается конструктивным. Чтобы построить это множество, возьмем график G , определяемый системой (3-1) в произведении $\mathbf{R}^n \times S$. Рассмотрим проекцию $p: \mathbf{R}^n \times S \Rightarrow S$ на второй сомножитель. Затем стратифицируем отображение $p: G \Rightarrow S$. G и S разлагаются на непересекающиеся дифференцируемо погружаемые многообразия (страты), таким образом, что образ по p страты G будет стратой в S , и ранг этого отображения остается постоянным на каждой страте. Соединение страт вдоль их краев должно также удовлетворять некоторым условиям непрерывности касательных плоскостей (см. [6]). Можно показать, что если T – какая-то страта S , то проекция $p: p^{-1}(T) \Rightarrow T$ является расслоением.

Если вместо того, чтобы интересоваться только топологическими свойствами алгебраических множеств E_s , потребовать, чтобы эти множества были алгебраически изоморфными, мы получим отношение эквивалентности, слишком тонкое для того, чтобы структурно устойчивые множества (в таких случаях говорят о *жестких* множествах) были всюду плотными: действительно, алгебраическая структура алгебраического множества зависит в общем случае от непрерывных параметров, модулей, и не может из-за этого деформироваться в соседнюю неэквивалентную алгебраическую структуру. Размышляя в этом же направлении, можно попытаться определить максимальное непрерывное семейство, содержащее деформации заданной алгебраической структуры такой как модуль, алгебра или алгебра Ли, и в этом направлении недавно были получены интересные результаты. Представляется, что по широте своих возможных приложений преобладают две теории: а) теория деформации G -структур, которые содержат в частности теорию систем Пфаффа и следовательно общую теорию систем уравнений в частных производных; б) классификация действий заданной группы G на заданном

множестве M , которое содержит теорию обыкновенных дифференциальных систем (действия \mathbf{R} в M) и определяет, по-видимому, алгебраическую теорию особенностей дифференцируемых отображений (действия обратимых струй $L'(n)$ $L'(p)$ в $J(n,p)$).

В. «Аналитическая» геометрия

Если в системе (3-1) заменить многочлены $P(x,s)$ аналитическими функциями $F(x,y)$, предыдущие результаты о устойчивости множества нулей E_s требуют осторожности при обобщении. В области комплексных чисел теорема останется точной только при условии, что проекция $p: G \Rightarrow S$ будет *собственным* морфизмом (т.е. прообраз компакта из S будет компактом в G). В этом случае множество бифуркации K — это конструктивное множество, принадлежащее собственному аналитическому подмножеству S . В области действительных чисел ситуация очень похожа, но природа множества бифуркации K плохо изучена. Классический факт, что проекция аналитического множества не обязательно является аналитической или хотя бы полуаналитической (контрпример Осгуда) — свойство, присущее этим весьма вероятным расслоенным множествам — до сих пор не получил объяснения в литературе.

Предыдущее замечание по поводу алгебраического изоморфизма остается в силе и для аналитического изоморфизма. Структура аналитического множества зависит, вообще говоря, от непрерывных модулей, которые образуют пространство конечной или бесконечной размерности.

Г. Дифференциальная топология

Пусть X, Y — два дифференцируемых многообразия, X — компакт, а функциональное пространство $L(X, Y)$ дифференцируемых отображений X в Y , снабженное топологией C^m (задаваемой на данной карте суммой абсолютных значений разностей частных производных от нулевого порядка до порядка m), является многообразием бесконечной размерности, локально моделируемым на банаховом пространстве (банахово многообразии). Это функциональное пространство $L(X, Y)$ играет теперь роль пространства параметров S , где каждая точка f из $S = L(X, Y)$ является дифференцируемым отображением X в Y . В этом случае можно поставить вопрос о классификации форм отображений, об их топологическом типе. Напомним, что два отображения f, g из X в Y имеют одну и ту же форму, одинаковый топологический тип, если существуют два гомеоморфизма $h: X \rightarrow X, k: Y \rightarrow Y$, такие, что диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad (3-2)$$

коммутативна. Таким образом получается следующий результат. В $L(X, Y)$ существует подпространство K коразмерности один (замкнутое множество бифуркации) такое, что два отображения f, g из L , находящиеся в одной и той же связной составляющей дополнения $L-K$, имеют одинаковый топологический тип. Более того, это множество бифуркации K имеет структуру, называемую *стратификацией*, которая определяется следующим образом. K содержит регулярные точки, которые образуют открытое множество, всюду плотное в K . Это множество — регулярная гиперповерхность в L . Дополнение этого открытого множества замкнуто в K . Из этого множества, коразмерность которого равна по меньшей мере двум, можно снова извлечь регулярные точки, которые образуют подмногообразие коразмерности два, и так далее. Более

^{*} Термин «аналитическая геометрия» автор употребляет не в обычном смысле, а в смысле алгебраической геометрии аналитических функций. — *Прим. ред.*

того, в окрестности всякой точки такой страты множество K локально содержит модель, задаваемую алгебраическими уравнениями или неравенствами. Локальное изучение ситуации в окрестности страты множества бифуркаций коразмерности k играет очень важную роль в нашей модели. Мы будем развивать этот подход детально, используя понятие *универсальной разветки* особенности.

Комментарий. Пусть F – каноническое отображение

$$F: X \times L(X, Y) \Rightarrow Y \times L(X, Y) \Rightarrow L(X, Y)$$

определяемое соотношением

$$(x, f) \Rightarrow (y = f(x), f) \Rightarrow f$$

Существует замкнутое подмножество бесконечной коразмерности $H \subset L(X, Y)$ такое, что ограничение F на $L(X, Y) - H$ будет стратифицированным. Стратификация $L(X, Y) - H$ определяется подмножеством бифуркации K , которое содержит H в качестве замкнутого подмножества. Отображения из $L(X, Y) - K$ являются структурно устойчивыми, то есть образующими. Отображения из $L(X, Y) - H$ являются стратифицированными. Они «почти образующие» в том смысле, что любое отображение g из $L - H$ может быть погружено в семейство с q параметрами, такое что отображение $X \times R^q \rightarrow Y \times R^q$ будет образующим. (См. понятие универсальной разветки особенности в конце главы). Доказательство такое. Сначала изучается локальная задача. Пусть $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ – росток начального дифференцируемого отображения, которое сопоставляет начало координат прообраза O началу координат образа O . Пусть z – струя порядка r того же типа, то есть разветка этого отображения, ограниченная членами порядка r . Существует больший порядок $r+p$ (где p зависит только от m, n, r) такой, что если данная струя порядка $r+p$ расширяется за счет добавления одночленов вида $\sum a_\alpha x^\alpha$, а степень $|\alpha|$ мультииндекса заключена между $r+1$ и $r+p$, то почти при любом наборе коэффициентов a_α струя порядка $r+p$ определяет локальный топологический тип прообраза любого отображения, реализующего эту струю. Множество S точек пространства коэффициентов a , которые не обладают этим свойством (соответствующая струя порядка $r+p$ не определяет топологический тип прообраза) содержится в собственном алгебраическом подмножестве, а именно в множестве бифуркации. При выделении в пространствах струй $\mathcal{J}(m, n)$ всех подмножеств бифуркации, которые можно определить, возникает каноническая стратификация пространства струй. Отображение $f: X \rightarrow Y$, r -тая производная которого (сечение расслоения r -струй $\mathcal{J}(X, Y)$) при достаточно больших r (зависящих только от m, n – размерностей X и Y) трансверсальна каноническому расслоению $\mathcal{J}(X, Y)$, называется *правильным*. Оно локально структурно устойчиво. Отсюда следует, что правильные отображения всюду плотны. Чтобы получить глобальную топологическую устойчивость, достаточно потребовать, чтобы образы $f(X_1), \dots, f(X_i)$ страт множества критических точек f были трансверсальны. Это условие реализуется посредством небольшого обобщения леммы о трансверсальности.

Теория устойчивости дифференцируемых отображений с точки зрения дифференцируемости (если на диаграмме (3-2) h и k являются диффеоморфизмами), стала темой недавних ярких работ Дж. Матера [8]. В этих работах доказывается, что при определенных не существенных на практике ограничениях размерности (например, при $n < 7$), *структурно устойчивые отображения с точки зрения дифференцируемости всюду плотны*. Эта же теория решает и задачу формальной устойчивости отображений, определяемых локально формальными рядами.

Д. Дифференциальные уравнения

Исторически понятие структурной устойчивости было впервые введено в математику в 1935 г. Андроновым и Понтрягиным для качественного изучения дифференциальных систем.

Дифференциальная система задается:

1. Конфигурационным пространством, которое является дифференцируемым многообразием M (конечной или бесконечной размерности);

2. Векторным полем X на M .

Интегрирование векторного поля порождает (по крайней мере локально) группу диффеоморфизмов с параметром t ($h: M \rightarrow M$). Это поток, связанный с дифференциальной системой. Динамическая система на многообразии M определяется таким же образом. Множество векторных полей на M (векторное пространство сечений расслоенного пространства векторов, касательных к M) может быть снабжено топологией, определяемой нормой

$$\text{Sup}_M |X_i - X_j| + \sum |\delta X_i / \delta x - \delta X_j / \delta x| \quad (C^1\text{-топология})$$

Если многообразие M компактно, получается также банахово пространство B . Дифференциальная система X на M называется структурно устойчивой, если любое векторное поле X' , достаточно близкое к X в C^1 , обладает следующим свойством: существует гомеоморфизм h из M на себя, который преобразует всякую траекторию поля X' в траекторию поля X . Можно дополнительно потребовать, чтобы этот гомеоморфизм был малым (расстояние от x до $h(x)$ $< \epsilon$). Иными словами, когда динамическая система X на M структурно устойчива, достаточно малые (по норме C^1) возмущения поля (X) не изменяют на качественном уровне поведение системы. Хотя гомеоморфизм h предполагается неизменным, возмущенная система после достаточно длительного промежутка времени может значительно изменить свое поведение. Простые геометрические соображения (слишком длинные, чтобы их здесь приводить) показывают, что это единственный тип структурной устойчивости дифференциальной системы, который можно надеяться достичь. Поэтому проблему устойчивости можно сформулировать следующим образом: являются ли структурно устойчивые поля X в пространстве векторных полей B всюду плотными? Недавно был получен частичный ответ на этот вопрос. Ответ положительный, если размерность M меньше трех (Peixoto [10]), и отрицательный, если эта размерность больше четырех (S.Smale [11]) или равна трем (R.Williams [16]). Несмотря на этот отрицательный ответ не стоит думать, что проблема структурной устойчивости не представляет интереса для динамики. На самом деле, даже если размерность больше четырех, функциональное пространство B содержит важное открытое множество, где структурно устойчивые поля повсюду плотны. Это открытое множество содержит в частности поля X без рекуррентности типа векторных градиентов, а также более общие структуры, известные в литературе под названием систем Морса-Смейла [17].

Другой важный класс динамических систем это консервативные гамильтоновы системы. Напомним их определение. Сначала задается конфигурационное пространство M^n , которое является дифференцируемым многообразием размерности n . Затем строится расслоенное пространство $T^*(M^n)$ ковекторов, касательных к M^n . В этом пространстве имеется каноническая дифференциальная 1-форма β (записываемая в канонических координатах q, p как $\beta = \sum p_i dq_i$), и внешний дифференциал $\alpha = d\beta = \sum_i dp_i \wedge dq_i$, определяющий на $T^*(M^n)$ симплектическую структуру. Гамильтонова динамика на M определяется заданием функции с действительными значениями (гамильтониана) $H: T^*(M^n) \rightarrow \mathbf{R}$. Поле, определяющее динамику эволюции, является *симплектическим градиентом* гамильтониана, то есть полем X , задаваемым формулой

$$i(X)\alpha = dh \quad (\text{уравнения Гамильтона}),$$

где i означает внутреннее произведение.

На заданном конфигурационном пространстве M^n множество гамильтоновых динамик естественно параметризуется функциональным пространством гамильтонианов $L(M^n, \mathbf{R})$, снабженным топологией C^∞ . Хотя эти функции в общем случае являются структурно устойчи-

выми, в том числе и с точки зрения дифференцируемой эквивалентности, нельзя утверждать, что две гамильтоновы динамики X, X' эквивалентны, на основании того факта, что их гамильтонианы H, H' соотносятся через диффеоморфизм $h: T^*(M') \Rightarrow T^*(M)$. Это выполняется только если диффеоморфизм h оставляет инвариантной симплектическую структуру (или 2-форму α), то есть если диффеоморфизм h является *каноническим преобразованием* фазового пространства $T^*(M)$. Проблема структурной устойчивости гамильтоновых систем, насколько мне известно, ранее не рассматривалась в литературе. С общих позиций этот вопрос должен вызывать пессимизм, и кроме банальных случаев (например, $n=1$) нельзя ожидать положительного решения данной проблемы. Однако известны некоторые устойчивые конфигурации, имеющие несомненно большое практическое значение. Именно, случай замкнутых траекторий типа центра, изученный Колмогоровым, Мозером и др., вероятно, соответствует стационарным состояниям квантовой механики. Мы вернемся к этой проблеме в главах 4 и 5.

Комментарий. Рассматриваемая здесь проблема — умение характеризовать геометрическую структуру дифференциальных «образующих» систем на многообразиях может, несомненно, считаться одной из самых трудных и малоизученных в современном анализе. В этом плане Стивен Смейл недавно предложил очень важные идеи, которые могут быть описаны следующим образом. Дифференциальная система (M, X) допускает U -структуру, если в любой точке m из M , векторное пространство касательных к M векторов допускает разложение на векторную сумму вида $T_m(M) = I + U_c + U_s$, где слагаемое I обозначает пространство размерности один над полем X . Если f — (локальная) группа с одним параметром, порождаемая интегрированием X , данное разложение предполагается инвариантным по производной f' . Кроме того, для римановых метрик f' стягивающее ($|f'| < 1$) для слагаемого U_c , и растягивающее для слагаемого U_s . Пусть Ω — множество рекуррентных (не блуждающих) точек поля X . Смейл постулирует существование для почти каждого поля X U -структуры над Ω . Он показывает, что если M компактно, то существует конечное разложение множества Ω на инвариантные неразложимые замкнутые Ω . Каждому Ω ставится в соответствие множество $\alpha^{-1}(\Omega)$ исходящих из него траекторий и множество $\omega^{-1}(\Omega)$ траекторий, которые в нем заканчиваются. Будем говорить, что Ω *предшествует* Ω , если множество $\alpha^{-1}(\Omega)$ совпадает с множеством $\omega^{-1}(\Omega)$. Это определяет между Ω отношение частичного порядка. Крайние Ω являются аттракторами поля X . Почти каждая траектория X кончается в окрестности аттрактора. Таким образом получается обобщение структуры, возникающей в теории Морса. Ω являются, таким образом, критическими точками, а множества $\omega^{-1}(\Omega)$ и $\alpha^{-1}(\Omega)$ — клетками градиентов, соответствующих критическим точкам.

Отсюда, вообще говоря, следует, что если рассматривать только грубую структуру динамики, почти любая динамическая система имеет структуру градиентного поля [2]. В частности, конечных состояний (аттракторов) бывает только конечное число. Тем не менее, топологическая структура этих Ω мало изучена. Априори она представляется очень жесткой, обладающей структурной устойчивостью. Известны примеры, например, геодезический поток на многообразиях с отрицательной кривизной (Аносов [4]), где соответствующее поле оказывается консервативным и гамильтоновым. Конфигурация бассейнов различных аттракторов в общем случае очень сложна топологически, и не удовлетворяет структурной устойчивости.

Контрпример Смейла для четырехмерных пространств не оставляет никакой надежды получить в общем случае устойчивую плотную систему. Множество K бифуркации имеет в функциональном пространстве B векторного поля сложную топологическую структуру даже если не является плотным. Естественно, можно заметить, что только устойчивость конечных состояний играет практическую роль, однако неизвестно, действи-

тельно ли динамические системы с неустойчивыми аттракторами могут быть локально плотными в B . С этой точки зрения очень важно уточнить образующую форму бифуркаций в B . В главе 5 будет дана классификация образующих форм бифуркации для градиентных систем размерности меньше четырех. Было бы очень важно узнать, что занимает место этой классификации, когда рассматриваются более общие системы, например, определить, как многомерный аттрактор (типа U —системы Аносова) может разрушаться при деформации. По этому поводу можно сделать следующее замечание: создание или разрушение многомерного аттрактора в момент t_0 требует в общем случае бесконечного числа изменений топологического типа системы в моменты t_i , которые накапливаются к t_0 . С точки зрения морфогенеза нужно быть готовым к тому, что это изменение аттрактора выражается в *обобщенной катастрофе* в том смысле, который будет уточнен в главе 6. Мы далеки от удовлетворительного понимания этих трансформаций аттракторов, и на самом деле модели, которые я предложу для эмбриологии, будут неизбежно неточными.

Кроме того, необходимо отметить, что в случае систем с аттракторами гамильтонова типа, деформации этого аттрактора, являющиеся гомеоморфизмами и зависящие от непрерывных модулей, позволяют определить локальную относительную энергию и энтропию этого аттрактора. Можно полагать, что эволюция динамики проходит по последовательным гамильтоновым ступеням, разделенными короткими переходными периодами катастрофического характера.

Е. Функциональный анализ и уравнения в частных производных

Структурная устойчивость функциональных операторов не является предметом систематической теории. В случае уравнений в частных производных устойчивость практически эквивалентна *корректности задачи*. Известны классические случаи: задача Дирихле для эллиптических операторов и задача Коши для параболических и гиперболических операторов. Только линейная теория достаточно развита. Но за пределами линейной теории практически не остается ничего известного. Локальная теорема существования и единственности решений системы аналитических уравнений (теорема Коши-Ковалевской) имеет, видимо, более широкую область применения; поскольку для любого решения уравнение вариации имеет гиперболический тип, не лишено смысла предположение, что в подобных случаях имеется структурная устойчивость как по отношению к исходным данным, так и по отношению к возмущениям дифференциальной системы (тем не менее для исходных данных может оказаться необходимым использовать более тонкую топологию, чем C^m). Другая важная для морфогенеза задача — это определение структурно устойчивых особенностей решений системы уравнений в частных производных. Так, самая простая вариационная задача это проблема Плато, которая заключается в нахождении минимальной поверхности, ограниченной данной кривой. Хотя ее можно решить физически при помощи мыльных пленок, математический анализ в настоящее время неспособен передать структурно устойчивые особенности решения. (Однако известно, что в трехмерном пространстве существуют только тройные ребра и четверные точки, определяемые *правилом фаз Гиббса*).

Сделанное выше замечание по поводу теоремы Коши-Ковалевской поднимает следующий вопрос: в какой мере аналитическое продолжение является структурно устойчивой операцией? Существует ли на множестве голоморфных функций, определенных на компакте K , топология, для которой область голоморфности функции (или ее замкнутое дополнение) зависела бы непрерывно от данной функции? Очевидно, что такая топология должна быть гораздо более тонкой, чем обычные топологии типа C^0 (топологии Банаха). Основываясь на этом факте, можно утверждать, что структурная устойчивость и «вычислимость» являются, в

какой-то мере противоречащими друг другу требованиями. Действительно, любая эффективно вычисляемая количественная модель использует аналитические функции, поскольку в других случаях дифференцируемые функции практически никогда не поддаются явной оценке. Это утверждение, противоречащее наиболее принятым взглядам на превосходство количественных моделей в науке, заслуживает, может быть, некоторого комментария. Ему можно противопоставить классические количественные модели, например, небесную механику. Но даже и в этом случае недавние работы по проблемам трех тел, как представляется, хорошо демонстрируют, что множество траекторий, ведущих к неустойчивым или катастрофическим ситуациям, (столкновения, удаление планеты в бесконечность), скрывает в себе в очень сложной и сжатой форме множество устойчивых движений кеплеровского типа, так что на очень длинных периодах времени не существует структурной устойчивости эволюции рассматриваемой планетной системы.

В любом естественном процессе возникает нечто вроде природной шкалы, на которой структурная устойчивость и вычислимость становятся несовместимыми. В механике планет эта шкала такова, что несовместимость неощутима. В квантовой механике, наоборот, шкала настолько мала, что несовместимость непосредственно ощущается. Современная физика приносит структурную устойчивость в жертву вычислимости. Я хочу надеяться, что она не будет жалеть о своем выборе.

3.2. АЛГЕБРА И МОРФОГЕНЕЗ

А. Пример бифуркации

Вернемся, с учетом некоторой детализации, к формальному механизму, который, с моей точки зрения, управляет всем морфогенезом. Я попытаюсь объяснить его вполне элементарно, при помощи аналогии между развитием эмбриона, с одной стороны, и рядами Тейлора с неопределенными коэффициентами, с другой. Развитие эмбриона может быть в общих чертах описано следующим образом: начиная с «универсальной» яйцеклетки клеточные массы с течением времени получают необратимую (в принципе) гистологическую специализацию. Но внутри живого организма всегда имеется линия универсальных клеток, зародышевая линия, которая приводит к формированию репродуктивных клеток (гамет) во взрослой особи. Рассмотрим, с другой стороны, дифференцируемую функцию двух переменных x, y с исходным нулем $x=y=0$, и разложим ее в ряд до третьего (к примеру) порядка:

Первый порядок $f = a_1x + b_1y$

Второй порядок $f = a_1x + b_1y + a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2$

Третий порядок $f = a_1x + b_1y + a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + a_3x^3 + 3b_3x^2y + 3c_3xy^2 + d_3y^3$

Рассмотрим пространства последовательных коэффициентов:

$J^1(a_1, b_1), J^2(a_1, b_1, a_2, b_2, c_2), J^3(a_1, \dots, c_3, d_3),$

которые канонически проектируются одно в другое:

$$J^p \leftarrow J^q \leftarrow J^r$$

Для первого порядка (в J^1) топологическая классификация функции f проста. Если один из коэффициентов a_1, b_1 не нулевой, одна из производных $\delta f / \delta x$ или $\delta f / \delta y$ в начале координат не равна нулю. Тогда, согласно классической теореме о неявных функциях, функция f локально преобразуется в линейную путем замены криволинейных координат в плоскости Oxy . Иными словами, каковы бы ни были значения коэффициентов a, b для порядков больших первого, форма функции, ее будущее, необратимо фиксированы. Напротив, если $a_1 = b_1 = 0$, о

топологической природе функции сказать ничего нельзя. Тогда говорят, что исходная точка $a_1 = b_1 = 0$ имеет в J множество бифуркации K^1 , алгебраический аналог зародышевой линии в эмбриологии. Во втором порядке точки J , которые при помощи p проектируются вонне K^1 , имеют отныне фиксированную судьбу. Точки, проектируемые при помощи p на $0 = K^1 \subset J$, допускают следующую классификацию:

1. Если дискриминант квадратичной формы $ax^2 + 2bxy + cy^2$ не равен нулю, то согласно классической теореме М.Морса, добавление членов порядка выше второго, не изменяет топологический тип функции, которая сохраняет свою квадратичную форму.

2. Если дискриминант $b^2 - a_2 c_2$ равен нулю, то топологический тип функции перестает быть фиксированным. Следовательно, поверхность, задаваемая уравнением $b^2 - a_2 c_2 = 0$, определяет множество бифуркации K_2 . Далее, следует различать ранг квадратичной формы в K_2 . Только нулевая форма может считаться универсальной. Форма ранга один, как, например, $f=x^2$, топологически не фиксирована. Если к ней добавят член третьей степени, не делящийся на x , например, y^3 , то топологический тип $f=x^2 + y^3$ не может быть изменен прибавлением членов более высокого порядка.

Если к x^2 добавить член третьей степени, делящийся на x , то топологический тип f не будет фиксированным, как показывают примеры

$$f = x^2 + 2xy^2 \text{ и } g = x^2 + 2xy^2 + y^4,$$

которые топологически различны, поскольку $g = (x^2 + 2xy^2)^2$ определяет двойную кривую, что не имеет места при $f=0$.

Таким образом, общая природа явления такова: для каждого порядка k имеется алгебраическое подмножество бифуркации K_k и при каноническом отображении $p_k: J^k \rightarrow J^{k-1}$, $p_k(K_k)$ содержится в K_{k-1} . Последовательность этих множеств бифуркации формально аналогична зародышевой линии в эмбриологии. Разумеется, речь идет о формальной аналогии, которая никоим образом не распространяется на детали (на самом деле, динамика эмбриона гораздо сложнее, и в связи с феноменами индукции и регуляции в эмбриологии мы увидим, какая интерпретация лучше соответствует экспериментальным фактам.).

В представленной выше алгебраической модели имеется очень неприятная черта. Пространство неопределенных коэффициентов не задается раз и навсегда, но приходится иметь дело с последовательностью евклидовых пространств $J^1 \leftarrow J^2 \leftarrow \dots \leftarrow J^{k-1} \leftarrow J^k$, каждое из которых, начиная со второго, отображается в предыдущее (это то, что в математике называют проективным пределом). Чтобы перейти к пространству конечной размерности, заданному раз и навсегда, нужно рассмотреть *особенность конечной коразмерности* и ее универсальную развертку.

Б. Универсальная развертка особенности конечной коразмерности

Пусть имеются два локальных отображения f и g евклидова пространства \mathbf{R}^n в \mathbf{R}^p , которые отображают начало координат O пространства-прообраза в начало координат O пространства-образа. Если эти два отображения имеют одни и те же частные производные вплоть до порядка r включительно, то говорят (в соответствии с терминологией, введенной С. Эресманом), что эти два отображения имеют в O общую *локальную струю* порядка r . Множество этих струй образует векторное пространство, обозначаемое $J(n, p)$, где роль координат играют коэффициенты разложения Тейлора p функций, задающих отображение в O , вплоть до порядка r . Как показывает приведенный выше пример, в $J(n, p)$ существует алгебраическое подмножество бифуркаций K^r со следующим свойством: если струя порядка r отображений f и

g является точкой дополнения $\mathcal{J}(n,p) - K$, то f и g локально относятся к одному и тому же топологическому типу. Существуют гомеоморфизмы h, h_1 , такие что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^p \\ h \downarrow & & \downarrow h_1 \\ \mathbf{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbf{R}^n \end{array}$$

где $h(O)=O$, $h_1(O)=O$, является коммутативной. В этом случае струю отображения f также называют *детерминантом*. Струя может оказаться структурно устойчивой. Тогда любая достаточно малая деформация отображения f топологически эквивалентна f (гомеоморфизмы h, h_1 при этом могут смещать начало координат). Например, невырожденная квадратичная критическая точка функции является структурно устойчивой в O . Что происходит, если струя отображения f не является структурно устойчивой? Могут иметь место три качественно очень различных случая:

1. Малые (в топологии C^m) произвольные возмущения отображения f могут порождать бесконечное число различных топологических типов. Например, гладкая функция $y=\exp(-1/x^2)$ может приближаться к окрестности нуля при помощи функций, имеющих сколь угодно большое число максимумов и минимумов. То же верно и о функции-константе $y=0$. В этом случае говорят, что особенность отображения f в O имеет *бесконечную коразмерность*. В этом случае струя f не может быть детерминантом.

2. Деформации имеют только конечное число (локальных) топологических типов. Тогда говорят, что эта особенность имеет *конечную коразмерность* q . В этом случае струя f является детерминантом, а коразмерность равна q , потому что f можно погрузить в семейство деформаций с q параметрами такими, что отображение $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^q$ будет структурно устойчивым. В частности, структурно устойчивая струя задает особенность коразмерности нуль. Это семейство деформаций является универсальным по отношению к деформациям f в том смысле, что любое возмущение отображения f с m параметрами выводимо из универсального семейства при помощи отображения $\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^q$. Это универсальное семейство мы будем называть *универсальной разверткой организующего центра* f . Математическая теория этого факта слишком сложна, чтобы ее здесь рассматривать. Мы ограничимся тем, что объясним ее на одном примере (на самом деле – наиболее простом), а именно на примере функции одной переменной $y=x^3$.

В. Пример: универсальная развертка особенности $y=x^3$

Любая деформация функции $y=x^3$ является дифференцируемой функцией $y=f(x,v)$, зависящей от m параметров, глобально определяемых с помощью v , таких что $f(x,0)=x^3$. Обозначим

$$F(x, y, v) = f(x, v) - y$$

Эта функция в начале координат $x=y=v=0$ пространства (x, y, v) удовлетворяет следующим условиям:

$$F(0,0,0) = F_x(0,0,0) = F_x(0,0,0) = 0; F_x(0,0,0) = 0$$

К ней можно применить теорему Вейерштрасса (обобщенную Б. Мальгранжем для дифференцируемых функций) и записать

$$F(x,y,v) = h(x,y,v)(x^3 - 3a(y,v)x^2 + b(y,v)x + c(y,v)),$$

где h, a, b, c – дифференцируемые функции, для которых

$$h(0,0,0) = 0; a(0,0) = b(0,0) = c(0,0) = 0$$

и

$$\frac{\delta}{\delta y} c(0,0) = \frac{\delta}{\delta y} \frac{F(x, y, u)}{h(x, y, u)} = \frac{-I}{h(0, 0, 0)} = 0$$

при

$$x = y = v = 0$$

С помощью уравнений $x_1 = x - a(f, v)$, $y_1 = -c(y, v) + a^3(g, v)$ график $F = 0$ преобразуется в график многочлена третьей степени:

$$y_1 = x_1^3 + A(y, v) x_1 \quad A = b - a^2$$

Поскольку в начале координат $\delta A/y = \delta b/y = 0$, в первом приближении можно пренебречь изменением коэффициента A относительно y и считать, что любая деформация $y = x^3$ заменой криволинейных координат $x \Rightarrow x_1$, $y \Rightarrow y_1$ преобразуется в многочлен $y_1 = x_1^3 + A(v) x_1$, который в свою очередь дает универсальную развертку особенности $y = x^3$. Поскольку это семейство зависит от единственного параметра A , эта особенность имеет коразмерность один.

Г. Общая теория универсальной развертки

В заключение приведем формальное определение универсальной развертки особенности конечной коразмерности. Пусть $y = f(x)$ – росток дифференцируемых отображений из \mathbf{R}^n в \mathbf{R}^p , струя которых в начале координат имеет особенность коразмерности q . Универсальная развертка особенности f это семейство с q параметрами

$$Y = f(x) + \sum u_i g_i(x) = F(x, u)$$

обладающее следующим свойством: для любой деформации $G(x, v) = y$, $G(x, 0) = f(x)$ отображения f существуют гомеоморфизмы $(x, v) \Rightarrow (x_1, v)$, $(y, v) \Rightarrow (y_1, v)$, такие что непрерывное отображение $k: v \Rightarrow u$ делает коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (x, v) & \xrightarrow{G} & (y, v) \\ h, k \downarrow & & \downarrow h_1, k \\ (x_1, u) & \xrightarrow{F} & (y_1, u) \end{array}$$

(любая деформация имеет тот же топологический тип, что и отображение универсальной развертки).

С точки зрения функционального анализа теория универсальной развертки может быть проинтерпретирована следующим образом. В пространстве отображений $C^m L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ существует стратифицированное множество бифуркаций Y . Особенность f коразмерности q является точкой страты Y коразмерности q в $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$. Универсальная развертка особенности это не что иное, как фрагмент q -плоскости, трансверсальный точке f в ее страте. Универсальное семейство не единственно, но определено с точностью до изоморфизма в пределах страты.

Замечание. Как уже было сказано выше, струя не может быть организующим центром конечной универсальной развертки только если эта струя является детерминантом. Тем не менее можно показать, что если $z \in \mathcal{J}(n, p)$ не является детерминантом, существует целое положительное m (зависящее только от r, n и p), такое что почти любое расширение z до порядка $r+m$ будет детерминантом. «Почти любое», как обычно в этой теории, означает дополнение нигде не плотного алгебраического множества (бифуркаций). Пример: в $\mathcal{J}(2, 1)$ (локальные струи из \mathbf{R}^2 в \mathbf{R}) струя $f = x^2$ не является детерминантом, но $f = x^2 + y^3$ – детерминант с универсальной раз-

верткой $F = x^2 + y^3 + uz$

В предшествующем рассуждении рассматривались только локальные особенности, а именно особенности ростков дифференцируемых отображений. Та же самая теория, вероятно, распространяется на глобальные отображения многообразий. Любой точке f страты коразмерности q можно поставить в соответствие трансверсальную q -плоскость, которая будет задавать универсальную развертку. Тем не менее, страты множества бифуркации Y , которые определяются нелокальными особенностями, на самом деле соответствуют отображениям, для которых образы критических страт в общем положении не пересекаются. Введенные таким образом особенности, очень похоже, имеют тривиальный характер типа особенностей барицентрического разбиения симплекса, связанных с правилом фаз Гиббса. На мой взгляд, глобальная теория представляет не намного больше интереса (и трудностей) по сравнению с локальной.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. Прилагательное «образующий» используется в математике в таких различных случаях, что, видимо, неразумно стремиться ограничить его использование рамками формальной теории. Можно только пожелать, чтобы было принято недавнее предложение Смейла [11]. Согласно Смейлу надо называть «образующими» только свойства элементов топологического пространства, не применяя его к самим элементам пространства. Свойство P точек пространства E называется образующим, если множество точек, обладающих свойством P плотно в E . Пока что право уточнять конкретное значение термина и придерживаться его до появления другой точки зрения принадлежит тому математику, который использует этот термин.

2. Следует, однако, заметить, что множества, разделяющие бассейны различных аттракторов, имеют в общем случае систем Морса-Смейла более сложную топологию, чем топология сепаратрисс градиентов. Действительно, наличие структурно устойчивых *гетероклинических точек* (термин А. Пуанкаре [15]) делает границы между бассейнами досточно случайными. Более того, на этих границах может иметься формация устойчивых конфигураций, играющих роль аттракторов, в которых можно усмотреть источник устойчивых переходных режимов, которые часто возникают в окрестности ударного фронта, разделяющего области двух конкурирующих устойчивых режимов.

3. Может возникнуть вопрос: не сыграло ли то особенное внимание, которое в математическом анализе девятнадцатого века придавалось комплексным числам и теории аналитических функций, роковую роль в ориентации математики. Позволяя возводить прекрасное — слишком прекрасное — учение, которое идеально согласовывалось с торжествовавшей тогда идеей количественного характера физических законов, оно способствовало игнорированию реальных и качественных сторон вещей. Потребовался расцвет топологии в середине XX века, чтобы математики вернулись к геометрическим объектам, изучение которых фактически только началось. Только сравните заброшенное состояние, в котором сейчас находится алгебраическая геометрия действительных чисел, с формальным совершенством, достигнутым в алгебраической геометрии комплексных чисел! Для любого природного явления, которое описывается алгебраическим уравнением, важнейший вопрос — знать, имеет ли это уравнение *действительные* решения. Да или нет — вот вопрос, который препятствует обращению к комплексным числам. В качестве примеров ситуаций, в которых понятие действительного числа играет важнейшую качественную роль, можно вспомнить действительность собственных значений линейной дифференциальной системы, индекс критической точки функции, эллиптичность или гиперболичность дифференциального оператора.

ЛИТЕРАТУРА

В предлагаемом списке приводятся только самые новые (к концу 60-ых годов – прим. перев.) самые полные или самые типичные статьи по каждой из затрагиваемых тем.

Алгебраическая геометрия

Топология. Обзор – в [1], теория стратифицированных множеств более полно изложена в [2].

[1] R. Thom. *La stabilite topologique des applications polynomiales.* L'enseignement mathematique, t.VIII, fasc.,2, 1962.

[2] R. Thom. *Ensembles et morphismes stratifies,* Bull. Amer. Math., Soc., March 1969, 75, 2.

Теория модулей. Этому предмету посвящена большая часть современной алгебраической геометрии: см., например, D. Mumford, *Geometric Invariant Theory,* Ergebnisse der Math. Band 34, Springer, 1965

Деформация алгебраических структур.

Алгебры Ли:

[3] A. Nijenhuis, R.W. Richardson Jr., *Cohomology and deformations in graded Lie algebras.,* Bull. Amer. Math., Soc., Jan, 1966

G-структуры:

[4] V. Guillemin and S. Stenberg, *Deformation theory of pseudo-group structures,* Memoirs of the American Mathematical Society, 64, 1966.

Действия группы:

[5] R. Palais, S. Stewart, *Deformation of compact differentiable transformation groups,* Amer. Journal Math., 82, 4, Oct. 1960.

Аналитическая геометрия

Дифференциальная и топологическая теория

[6] H. Whitney, *Local differential properties of analytical sets. Differential and combinatorial Topology,* Princeton University Press, 1965.

[7] S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analytique,* I.H.E.S., juillet 1965.

См. также [2].

Деформация аналитических особенностей

H.Grauert et H.Kerner, *Deformationen von Singularitaeten komplexer Raeume,* Math. Annal., 153, 1964, p.236-260.

A.Douady, *Le probleme des modules pour les sous-espaces analytiques compacts,* Ann. Institut Fourier, 16, 1, 1966, p.1-95.

Дифференциальная топология

[8] J. Mather, *Stability of C mappings I-IV,* Publications de l'IHES, 37, 1969, p.523-548.

[9] R. Thom. *Ensembles et morphismes stratifies.* (Ср. [2])

Нелокальная теория дифференциальных уравнений

[10] M. Peixoto, *Structural stability on 2-dimensional Manifolds Topology,* 2, 1962, p. 101-121.

[11] S.Smale, *Differentiable dynamical systems,* Bull. A.M.S. 73, 1967, 747-817.

[12] V.Arnold, J.Avez., *Problemes ergodiques en Mechanique claassique,* Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[13] R.Abraham, *Foundations of Mechanics,* Benjamin, 1967

[14] D. Anosov, *Roughness of geodesic flows on compact Riemann manifolds of negative curvature,* Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 1945, 1962, p.707-709.

[15] H. Poincare, *Lecons sur la Mechanique celeste,* (Reedition Dover, New York 1957)

[16] R.F.Williams, *The D.A. maps of Smale and structural stability,*

[17] J.Palis – S. Smale, *Structural stability theorems* в: Proceedings of the A.M.S. Symposium on Global Analysis, Berkely, July 1968.

ГЛАВА 4

КИНЕМАТИКА ФОРМ. КАТАСТРОФЫ

4.1. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ

А. Морфология процесса

В камере B происходит естественное явление, о природе которого у нас нет никаких гипотез. Рассмотрим произведение $B \times T$: произведение B на ось времени T . Это будет область-ловушкой рассматриваемого процесса. Предполагается, что наблюдатель располагает зондами или другими средствами, позволяющими видеть то, что происходит в окрестности любой точки x из $B \times T$. Тогда сразу напрашивается следующая классификация точек из $B \times T$. Допустим, в окрестности точки x из $B \times T$ наблюдатель не замечает ничего, достойного внимания. Если с феноменологической точки зрения точка x ничем не отличается от соседних, говорят, что точка x — *регулярная* точка процесса. По самому этому определению, регулярные точки образуют открытое подмножество в $B \times T$. Замкнутое дополнение регулярных точек в $B \times T$ будем называть множеством *катастрофических точек* процесса. В окрестности любой точки c замкнутого множества K катастрофических точек, процесс оказывается разрывным: в любом шаре с центром c «что-то происходит». Задание замкнутого множества K и описание особенностей в каждой из его точек составляет *морфологию* процесса.

Различие между регулярными и катастрофическими точками очевидным образом произвольно, поскольку оно зависит от точности используемых средств наблюдения. Можно предположить — и не без основания — что любая точка становится катастрофической, если используемые средства достаточно точны. Поэтому различие реально может устанавливаться только в рамках математической модели. Напомним с этой целью некоторые понятия качественной динамики.

Б. Аттракторы

Пусть (M, X) — динамическая система, определенная на поле векторов X на многообразии M . *Аттрактор* F системы это замкнутое инвариантное множество на X , обладающее следующими свойствами:

- i) существует открытое множество U — инвариантная открытая окрестность аттрактора F , называемая *бассейном* (или *областью притяжения*) аттрактора F , такая что для всякой траектории, исходящей из точки из U , F является -предельным множеством.
- ii) любая траектория, -предельное множество которой содержит точку из F , лежит в F .

iii) F неразложимо, то есть почти каждая траектория X в F является плотной в F_i .

Аттрактор F поля X называется *структурно устойчивым*, если любое поле X_i , достаточно близкое к X в C^1 -топологии, допускает аттрактор F_i такой, что существует гомеоморфизм h окрестности F на окрестность F_i , который преобразует траектории X в траектории X_i . Можно предположить, что h лежит в окрестности тождественного отображения.

Не установлено точно, имеет ли произвольное поле X на M аттракторы, тем более структурно устойчивые. Тем не менее, согласно высказанным недавно идеям Смейла (см.3.1.E), если многообразие M компактно, то почти любое поле X имеет конечное число аттракторов, по отдельности являющихся структурно устойчивыми. К сожалению, топологическая структура этих устойчивых аттракторов изучена плохо. В любом случае мы будем рассматривать далее только аттракторы простого типа, вроде изолированных точек или замкнутых обыкновенных траекторий, для которых свойство структурной устойчивости является непосредственным.

В гамильтоновой динамике нет аттракторов в точном смысле слова. На самом деле если поле X сохраняет неизменным объем (меру Лиувилля), никакое открытое множество не может быть преобразовано при помощи X в открытое множество U' , строго содержащееся в U . Тем не менее, некоторые замкнутые инвариантные множества с положительной мерой могут рассматриваться как *странные* аттракторы (в их числе множество насыщенных траекторий замкнутой центральной траектории, изучавшееся Колмогоровым, Мозером и др.). Понятно, что замкнутая траектория g и незамкнутая траектория g' , неопределенно обвивающаяся вокруг тора с сердечником g , должны рассматриваться как определяющие одно и то же термодинамическое состояние системы. Эти странные аттракторы тем более закономерно рассматривать, что они обладают устойчивостью по отношению к достаточно малым гамильтоновым возмущениям. Может быть, у них нет структурной устойчивости в топологическом смысле, но они обладают общей сопротивляемостью гамильтоновым возмущениям.

V. Распределение по бассейнам

Относительное топологическое расположение бассейнов, связанных с различными аттракторами, может быть весьма различным. В наиболее простом случае, а именно в случае градиентной динамики, различные бассейны разделены гиперповерхностями, обычно погружаемыми по частям.

Например, для географической карты с линиями уровня (горизонталями), бассейны, относящиеся к различным рекам, разделены линиями водораздела, которые образуются совокупностью линий хребтов. Эти разделительные линии снижаются на перевалах, которые они проходят как регулярные точки, но встречаются на вершинах, где они образуют углы или точки возврата.

Но в любом другом случае и особенно когда динамика (M, X) является рекуррентной, относительное топологическое расположение двух бассейнов может быть очень сложным. Иногда при структурной устойчивости случается, что два бассейна взаимно проникают друг в друга таким образом, что образуют топологически крайне сложную конфигурацию. Например, при размерности два разделительная кривая двух бассейнов может навиваться на замкнутую траекторию. В таком случае можно говорить о ситуации *борьбы* или *конкуренции* между двумя аттракторами. На самом деле, если исходить из начального положения в окрестности точки - предела разделительной линии, результат процесса зависит от очень слабого варьирования начальных условий. В таком случае явления остаются практически неопределенными, и можно только измерять относительную вероятность каждого аттрактора оценивая локальную плотность каждого бассейна.

Вышеперечисленные соображения можно *a fortiori* приложить к странным аттракторам

гамильтоновых динамических систем. Здесь едва ли можно говорить о бассейне, и преобладание какого-либо одного аттрактора никогда не является однозначным. Такая текучесть и флуктуационная изменчивость гамильтоновой динамики очевидным образом заставляет вспомнить вероятностный характер квантовой механики.

4.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕГУЛЯРНЫХ ПРОЦЕССОВ

В дальнейшем мы будем иметь дело с моделями двух типов — *статическими* и *метаболическими*.

А. Статическая модель

В этой модели задаются два дифференцируемых многообразия U (пространство внутренних параметров) и V (на практике V это область действительных или комплексных чисел). Допускается, что процесс можно описать локально в окрестности каждой регулярной точки x при помощи поля отображений вида $G: W \rightarrow V$, где W это окрестность x в B . В каждой регулярной точке x локальное состояние процесса описывается отображением $g: U \rightarrow V = G(x, u)$ исходя из которого, теоретически можно описать все, что наблюдается в этой системе.

Б. Метаболическая модель

В каждой регулярной точке x заданы:

1. Многообразии M (пространство *внутренних параметров*)
2. Векторное поле X на M , зависящее от x .
3. Аттрактор $c(x)$ динамики $(M, X(x))$.

Предполагается, что $X(x)$ зависит от x дифференцируемым образом. Действительно, на определение локального состояния влияет только окрестность поля $X(x)$, лежащая в окрестности аттрактора $c(x)$. Остальная часть поля $X(x)$ не играет реальной роли. Наблюдаемые компоненты системы определяются заданием аттрактора $c(x)$.

Пока мы не сделали никаких предположений о классе дифференцируемости функций g или X . Они предполагаются m раз непрерывно дифференцируемыми, где m достаточно велико. Катастрофическая точка может характеризоваться тем, что в этой точке поле g или $c(x)$, или одна из их производных порядка меньшего или равного m , имеет разрыв. В примерах, взятых из термодинамики, порядок m может быть взят равным самое большее двум. Очевидно, что разрывы производных очень больших порядков могут легко ускользнуть от наблюдения.

В. Эволюция полей

Допустим, что в окрестности регулярной точки $x=(y, t)$, $y \in B$, эволюция статического или метаболического поля развивается по дифференциальному закону вида

$$\begin{aligned} dg/dt &= H(g, t, y) && \text{(статический случай)} \\ dX/dt &= H_{\text{ctx}}(X, y, t) && \text{(метаболический случай)}, \end{aligned}$$

где операторы H приводят к локально корректно поставленным задачам. Под этим, как обычно, понимается, что решение задачи Коши относительно этого оператора существует и единственно, и это решение непрерывно зависит от исходных данных во всей окрестности $g(y, 0)$. Заметим, что в метаболической модели закон эволюции зависит от аттрактора $c(x)$.

Г. Эквивалентность моделей

Необходимо понимать, что модель необязательно должна быть единственной. Рассмотрим этот вопрос в статическом, более простом для изучения случае.

Пусть имеется статическое поле на B T со значениями в функциональном пространстве

$L(U, V)$. Если дано два других многообразия U_1, V_1 и отображения $k: U_1 \rightarrow V_1, j: U \rightarrow V$ то с помощью поля $g_x \in L(U, V)$ можно построить поле g'_x , заданное с помощью $g'_x = j^0 g^0 k$. Очевидно, нет никаких оснований сводить оператор эволюции поля g , порождаемый оператором эволюции поля g при помощи диффеоморфизма $h: x \rightarrow x$ базовых пространств, к хорошо поставленной задаче, кроме случая, когда отображения j и k являются диффеоморфизмами. Можно следующим образом задать два отношения эквивалентности между статическими моделями: отношение D при котором j и k являются диффеоморфизмами, и более общее отношение E , при котором j и k не обязательно биективны. В двух точках x, x' локальные модели могут быть изоморфными по E , но неизоморфными по D . Такой тип изменения поведения процесса в принципе совершенно ненаблюдаем, но априори его нельзя исключить. Такая ситуация будет иметь место, если, к примеру, начиная с момента $t=t_0$ степень свободы внутреннего пространства U , до этого времени полностью подавленная, начинает эффективно участвовать в процессе. Мы допускаем возможность появления таких *тихий* (silencieuses) катастроф. Впрочем, это не исследованный вопрос, который сводится к выяснению того, существует ли в классе эквивалентности по E универсальная максимально простая модель, все другие представители которой строятся при помощи удачно выбранных отображений j, k .

Д. Изоморфные процессы

Пусть на открытых областях пространства-времени W, W_1 заданы два процесса одинаковой природы. Говорят, что эти процессы изоморфны, если существует гомеоморфизм $h: W \rightarrow W_1$ такой, что

1. h преобразует катастрофическое множество $K \subset W$ в катастрофическое множество $K_1 \subset W_1$ другого поля;
2. ограничение h на регулярные точки из W , будет диффеоморфизмом на регулярных точках из W_1 . В регулярных точках $x, x_1 = h(x)$ поля изоморфны.

В последующих определениях (обыкновенных и существенных катастроф), используется метрическая структура базового пространства. Это накладывает на теорию весьма произвольные ограничения. Следует, однако, заметить, что эта теория применяется преимущественно к естественным структурно устойчивым процессам. Как было показано в главе 2, это предполагает сравнение двух камер, подобных в смысле преобразования Галилея (в нерелятивистском, единственном, рассматриваемом здесь случае). При этих условиях введение евклидовой метрики полностью оправдано. Нужно только использовать неявное предположение, что рассматриваемые элементарные динамики удовлетворяют условию галилеевой инвариантности.

4.3. КАТАСТРОФЫ

А. Обыкновенные катастрофические точки

Будем называть точка из B *Т обыкновенной катастрофической точкой*, если пересечение множества катастроф X с шаром $b(y)$ с центром в y и достаточно малым радиусом r , имеет модель, которая является погружаемым непустым полуаналитическим полиэдром без внутренних точек. Более того, ограничение процесса на открытый шар $b(y)$ остается изоморфным себе при всех достаточно малых значениях r .

Катастрофические точки z , достаточно близкие к y , содержащиеся в шаре $b(y)$, удовлетворяют тем же условиям, что и y : множество K в окрестности z не пустое и полуаналитическое [1]. На $K \cap b(z)$ существует коническая структура, которая выражает изоморфизм локальных процессов. Следовательно, обыкновенные катастрофические точки образуют открытое

подмножество в множестве K катастрофических точек.

Обыкновенная катастрофическая точка вполне может быть изолированной. Тем не менее, для всех моделей морфогенетических полей, которые мы рассматриваем, такая катастрофа может быть структурно устойчивой только в одном случае — когда размерность пространства-времени равна одному.

Б. Существенные катастрофические точки

Определение. Катастрофическая точка, не являющаяся обыкновенной, называется *существенной*. Существенные катастрофические точки образуют закрытое подмножество множества катастроф K .

Как будет видно из примеров, нельзя исключать возможность того, что замкнутое множество M существенных катастроф образовано внутренними точками. Действительно, естественный процесс вполне может в некоторой области пространства-времени стать локально хаотичным, причем необходимым и структурно устойчивым способом. Столкнувшись с такой ситуацией, наблюдатель, как правило, попытается изменить модель. Он откажется от первоначальной модели в пользу *редуцированной модели*, которая в каком-то смысле представляет среднее термодинамическое состояние исходной модели. Действительно, следует понимать, что глобальная устойчивость нашей вселенной покоится на законе компенсации. Когда катастрофы становятся слишком многочисленными и частыми, то каждая по отдельности не может быть очень серьезной. Часто каждая катастрофа оказывается настолько незначительной, что даже их совокупность может быть ненаблюдаемой. В этих случаях наблюдатель может игнорировать слишком мелкие катастрофы и при помощи операции усреднения выявлять усредненные факторы, доступные наблюдению. Эта процедура, которая будет описана в параграфе 4.7. под названием *редукции поля*, в общем случае ведет к замене метаболической модели статической.

Уже по определению существенная катастрофическая точка не может быть изолированной в множестве катастроф K . На самом деле, если u — существенная катастрофическая точка, то процесс, ограниченный на каждый шар $B_r(u)$, изменяет класс изоморфизма, когда r стремится к нулю, что приводит к тому что граничная сфера $B_r(u)$ сталкивается с новыми катастрофами. Различается два типа существенных точек: те, которые прилегают к обыкновенным катастрофам, и те, в окрестности которых есть только существенные катастрофы. В изучаемых нами моделях точки первого типа расположены на гиперповерхностях, одна сторона которых содержит только обыкновенные катастрофы, а другая — только существенные катастрофы (или не содержит катастроф вообще). Точки второго типа заполняют открытые множества (хаотические процессы) сложной топологической конфигурации типа совершенного канторова множества.

4.4. МОРФОГЕНЕТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЛОКАЛЬНЫМИ КАТАСТРОФАМИ

А. Статические модели

Теперь мы приступаем к фундаментальному построению, определяющему, с нашей точки зрения, морфологию процесса, исходя из его динамики. Рассмотрим сначала случай статической модели. Пусть W — базовое пространство (область пространства-времени) и $L(U, V)$ — расслоенное функциональное пространство. Предположим, что в $L(U, V)$ существует замкнутое подмножество H' подмножества бифуркации H , обладающее следующими свойствами. Пусть $s: W \Rightarrow L(U, V)$ — сечение поля. Допустим, что *локальный процесс изменяет свой феномено-*

логический вид только в точке, где отображение внутренней динамики $g:U \Rightarrow V$ изменяет свой топологический тип. Таким образом, любая точка $x \in W$ такая что отображение $s(x)=g$ структурно устойчиво, является регулярной точкой процесса. Каждая катастрофическая точка u такова, что $s(u)$ принадлежит множеству бифуркации H функционального пространства $L(U, V)$. В действительности, только в одном известном случае статической модели, а именно, в случае, когда V это действительная прямая \mathbf{R} (который будет рассмотрен в следующей главе), устойчивые режимы, аттракторы локальной динамики соответствуют минимуму функции $g:U \Rightarrow \mathbf{R}$. Таким образом, катастрофические точки получаются как прообразы страт H' из H по s , где H' обозначает множество функций $g:U \Rightarrow \mathbf{R}$ имеющих по крайней мере два равных минимума (условие Максвелла). Эти страты H' часто в качестве свободной границы имеют страты $H_i \subset H$, где два минимума совпадают или один минимум разлагается на два при бифуркации. Наиболее простой случай этого явления описан в следующей главе под названием катастрофы Римана – Югонио. Множество этих явлений можно описать при помощи железнодорожной метафоры: бифуркация порождает катастрофу.

Множество $H' \subset H$, определенное при помощи условия Максвелла, инвариантно относительно внутренних диффеоморфизмов многообразий U и V . Так что определение катастрофических точек конкретного процесса не зависит от представителя, выбранного в классе изоморфизмов статических полей. Обычно предполагается, что сечение s это трансверсальное отображение W на H' . Это позволяет определить топологический тип катастрофического множества в окрестности любой точки. В пятой главе будет проведено описание этих локальных типов, когда размерность пространства меньше четырех. В ситуации этого рода получаются только обыкновенные катастрофы. Структурно устойчивое появление в нашем пространстве-времени существенных катастроф достаточно ясно показывает недостаточность статической модели или неточность гипотезы о трансверсальности.

Однако статическая модель позволяет понять важное явление – распространение фронта ударной волны, и теоретически определить все структурно устойчивые особенности такого фронта.

Б. Устойчивые особенности волнового фронта

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка r , действующий на действительных функциях $f(x, t)$, где $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, вида

$$\frac{\delta}{\delta t} f = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha D_\alpha f + \sum_{|\alpha|<r} b_\alpha D_\alpha f$$

где коэффициенты a зависят только от x . Множество членов максимального порядка $(d/dt) f - \sum a_\alpha D_\alpha f$ составляют главную часть оператора. Если решение f имеет разрыв одной из производных порядка r^{-1} , локализованный для $t=0$ на гиперповерхности с уравнением $S(x, 0)=0$, то, как известно, область этого разрыва распространяется в \mathbf{R}^n как гиперповерхность $S(x, t)=0$, где $S(x, t)$ – решение уравнения Якоби:

$$\frac{\delta S}{\delta t} + H(x_i, \frac{\delta S}{\delta x_i}) = 0$$

такое, что $S(x, 0)$ – заданная функция, и где $H = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha P_\alpha = G$ и, как обычно, $\delta S / \delta x_i = P_i$.

Чтобы получить вариацию этой гиперповерхности, как известно, достаточно построить характеристическую систему уравнения Якоби

$$X_i = -\frac{\delta H}{\delta P^i}, \quad P_i = \frac{\delta H}{\delta x^i}$$

которая определяет *бихарактеристики* данного уравнения. Так как

$$X_i = -\frac{1}{\Gamma} G^i_r \frac{\delta G}{\delta p_i}$$

очевидно, что для всех ковекторов (x_i, p_i) получается единственная бихарактеристика $g(p)$, инвариантная относительно гомотетии $(p_i) \Rightarrow \lambda(p_i)$ вследствие однородности. Выберем подходящим образом точку x_l и будем рассматривать все ковекторы, исходящие из этой точки x_l как внутреннее пространство U . Пусть p – ковектор из U , а $g(p)$ – соответствующая бихарактеристика. Вообще говоря, эта бихарактеристика пересекает начальный волновой фронт $S(x, 0) = 0$ в точке $x_0(p)$. Вычислим действие $\int_{x_0}^{x_l} \Sigma_r p_i dx^i$ вдоль этой бихарактеристики между x_0 и x_l . Оно равно $\int_{x_0}^{x_l} H dt$ и минимально для ковектора $p_i \in U(x_l)$, касательного к ударной волне в x_l . Теперь остается связать с каждой точкой x_l функцию, дифференцируемую в пространстве $U(x_l)$ нормализованных ковекторов, исходящих из x_l , и *взять в каждой точке минимум этой функции*. На самом деле, все это представляет собой другой способ описания конструкции Гойгенса, который представил ударный фронт в момент t как огибающую сферических волн с центром на фронте ударной волны в момент $t=0$ (см. рис. 4-1).

В случае нашего трехмерного пространства нормированные ковекторы с заданным началом образуют сферу S^2 . Можно получить все особенности коранга два для функции S в пространстве U . Обращая это построение, можно увидеть, что таким образом все особенности оказываются выявленными. Среди них структурно устойчивыми будут только те, коразмерность которых меньше четырех. Их изучению посвящена следующая глава.

В. Метаболические модели

В метаболических моделях, в которых роль слоя играет динамика (M, X) на W , теория выглядит следующим образом. В функциональном пространстве F векторного поля X имеется подмножество бифуркации, то есть множество систем, в окрестности которых конфигурация аттракторов поля X не является структурно устойчивой. Из этого множества H извлекается подмножество H' , которое задает те поля X , для которых аттрактор $c(x)$, связанный с сечением s , не является структурно устойчивым. Катастрофические точки процесса образуют прообраз подмножества H' по сечению $s: W \Rightarrow F$. В противоположность тому, что происходит в статическом случае, множество H' хотя и (возможно) не стратифицируемо, не является локально замкнутым в F . Поэтому множество $K = s^{-1}H'$ может иметь сложную топологическую структуру и, в частности, иметь существенные катастрофические точки.

4.5. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КАТАСТРОФ

А. Область существования и бассейи

Пусть имеется естественный процесс, протекающий в области пространства-времени W , описываемый метаболической моделью (расслоением) (M, X) . Если предельное положение точки $y \in W$ в локальной динамике (M, X) определяется структурно устойчивым аттрактором $c(y)$, то точка y является регулярной точкой процесса. Все регулярные точки, которые могут быть соединены с y только посредством регулярных точек, образуют область W_y , которую называют *областью существования* данного аттрактора. Не надо путать область существования

аттрактора, открытую область пространства-времени W , с бассейном этого аттрактора, который является открытым множеством многообразия M внутренних состояний.

В окрестности W обыкновенной катастрофической точки $y \in K$ процесса существует по крайней мере два аттрактора c, c_1 из (M, X) , области существования которых пересекаются с W . Естественно предположить, что такая конкуренция возможна только если бассейны c, c_1 имеют в M общую границу. Так геометрически интерпретируется высказывание Гераклита о том, что всякий морфогенез есть результат борьбы.

Б. Катастрофы конфликта и катастрофы бифуркации

1. Если каждый аттрактор, приводящий к катастрофе, в окрестности каждой катастрофической точки, соседней с данной точкой, конкурирует с одним или несколькими другими аттракторами, то говорят, что мы имеем дело с катастрофой *конфликта*. Поведение ударной волны, разделяющей различные области существования, в общем случае трудно уточнить. Во многих случаях каждому аттрактору приписывают потенциал V_i , и ударную волну, разделяющую области c и c_1 , определяют уравнением $V_i(y) = V_j(y)$. Именно это называется *условием Максвелла*, из которого при некоторых общих предположениях следует правило фаз Гиббса.

2. Когда аттрактор находится в конфликте сам с собой (после непрерывной вариации) говорят, что имеет место катастрофа *бифуркации*. Самый простой пример — это катастрофа Риманна-Пюгоньо, описанная в пятой главе. В этом случае условие Максвелла также позволяет уточнить топологическую структуру локальных ударных фронтов. Но это условие применимо только если среда W может быть отображена на универсальную развертку особенности локальной динамики при помощи отображения максимального ранга. Для этого среда W должна быть достаточно поляризована. В других случаях универсальная модель известна только для градиентных динамик. Вообще, хорошо определенные локальные модели, дающие обыкновенные катастрофы, получаются только в случае *градиентных динамик при условии, что среда W предварительно поляризована*. В других случаях (если динамика рекуррентны или среда недостаточно поляризована) можно получить существенные катастрофические точки, приводящие к обобщенным катастрофам (ср. гл.6).

4.6. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ

А. Микроканоническая энтропия

Дано

1. Конфигурационное пространство с локальными координатами q_i , которое является дифференцируемым многообразием V размерности n .

2. Фазовое пространство с локальными координатами q_i, p_i , которое является расслоенным пространством $T^*(V)$ ковекторов V .

3. Не зависящий от времени гамильтониан, который является действительной функцией $H: T^*(V) \Rightarrow \mathbf{R}$.

Если обозначить через каноническую 2-форму $T^*(V)$, локально определяемую как $\alpha = \sum dp_i dq_i$, то поле эволюции X задается в $T^*(V)$ уравнением Гамильтона $i(X).\alpha = dH$, где i обозначает внутреннее произведение. Известно, что поле X допускает H как первый интеграл (единственный, если V компактно) и сохраняет инвариантной 2-форму α . n -ая внешняя степень α задает на X инвариантную меру Лиувилля α^n . Обозначим через $m(x)$ общий объем Лиувилля

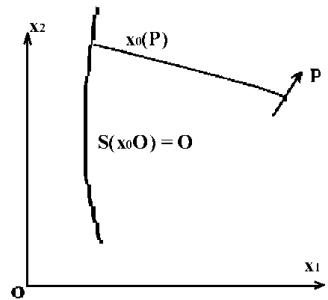


Рис. 4-1.

вилля точек p из $T^*(V)$, таких что $H(p) = x$. Тогда производная $a(x) = dm/dx$ дает $2m-1$ -объем гиперповерхности энергии $H=x$. Микроканонической энтропией системы называют функцию $S(x) = \text{Log } a(x)$. Можно определить «формальную температуру T » как $1/T = dS/dx$. Эта величина геометрически выглядит как средняя кривизна гиперповерхности энергии.

Введение логарифма $\text{Log } a(x)$ может быть мотивировано следующим образом.

Рассмотрим две консервативные гамильтоновы системы S_1, S_2 с конфигурационными пространствами V_1, V_2 и гамильтонианами H_1, H_2 . Предположим, что мы связываем эти системы «термодинамически», т.е. почти в каждый момент объединенная система развивается так, как будто системы S_1 и S_2 не взаимодействуют, но в отдельные очень короткие промежутки времени обмениваются энергией в ходе катастрофических и случайных процессов, в результате которых система находится на гиперповерхности энергии, пропорциональной мере Лиувилля (эргодическая гипотеза). Таким образом гиперповерхность общей энергии c , из уравнения $H_1(x_1) + H_2(x_2) = c$ имеет объем (Лиувилля) A , который может быть вычислен по формуле

$$A(c) = \int a_1(c-t) a_2(t) dt$$

Наиболее вероятное значение параметра t это то, для которого объем произведения гиперповерхностей $H_1 = c-t, H_2 = t$ является максимальным. Это ведет к соотношению $da_1/a_1 dt = da_2/a_2 dt$ которое означает, что две системы S_1, S_2 имеют одинаковую формальную температуру $T_1 = T_2$ или же $dS_1/dH = dS_2/dH$.

Б. Взаимодействие двух систем

Если имеется две системы S_1, S_2 с общей энергией c , в состоянии термодинамической связи, режим равновесия определяется поиском значения параметра t , при котором суммарная энтропия $S_1(c-t) + S_2(t)$ является максимальной. Если имеется только один, причем достаточно выраженный максимум, объединенная система развивается в направлении этого состояния и остается в нем, не считая неизбежных флуктуаций. Напротив, если существует несколько различных максимумов или если максимумы достаточно плоские, об эволюции системы ничего нельзя сказать априори: система может занять один из этих максимумов или напротив флуктуировать, не достигая определенного предела.

Важность термодинамической связи проистекает из того факта, что если привести в пространственный контакт две динамические системы, управляющие двумя смежными открытыми множествами U_1 и U_2 , то можно допустить (не делая предположений о природе взаимодействия), что эти две системы находятся в состоянии термодинамической связи. Если две системы имеют в качестве функций $S(H)$ пересекающиеся вогнутые кривые (как в рассматриваемом случае), сложение одной такой кривой и кривой, получаемой из первой посредством симметрии $t \Rightarrow c-t$, дает кривую с единственным выраженным максимумом (рис. 4-2). В этом случае две системы имеют единственный режим равновесия. Но возможны и другие случаи, когда имеются две динамические системы, очень непохожие на обычные термодинамические системы, состоящие из большого числа элементов.

Рассмотрим несколько таких случаев. Предположим, что каждая из кривых $S(H)$ имеет выраженный максимум при некотором значении a . Тогда суммарная кривая энтропий $S_1(t) + S_2(c-t)$ при c , отличном от $2a$, имеет два различных максимума (в окрестностях $t=a$ и $t=c-a$). В подобном случае можно столкнуться со следующей ситуацией: на каждом открытом множестве U_i, U^p каждая из систем S_1, S_2 приблизительно сохранит свой собственный режим. На общей границе двух открытых множеств два режима будут разделены поверхностью ударного фронта или узкой зоной связи флуктуативного характера, вихреобразной или турбулентной. Две системы практически не смогут быть связаны и будут развиваться каждая самостоятельно (рис. 4-3)

В. Приближение к состоянию равновесия при термодинамическом взаимодействии

Вернемся к ситуации, когда имеются две классические гамильтоновы системы, связанные термодинамическим способом. Если обозначить через A_1, A_2 объемы гиперповерхностей соответствующих энергий $H_1 = E_1, H_2 = E_2$, будет ясно, что энтропии S_1, S_2 двух систем задаются как $S_1 = \text{Log } A_1, S_2 = \text{Log } A_2$, а температуры как $T_1^{-1} = dS_1/dE_1, T_2^{-1} = dS_2/dE_2$, где T_1 и T_2 – скалярные функции, задаваемые на осях энергии, и T_1 имеет размерность энергии. Более того, если H_i ($i=1,2$) зависит от внешних параметров (например, от точки пространства G) и если есть другие первые интегралы, кроме энергии, которые также складываются векторно, задавая, к примеру, пространство P , то на произведении $G \times P$ можно определить функцию T . Если равновесие получено для максимума энтропии на гиперпространстве $H_1 + H_2 = E$, то в общем случае о приближении к состоянию равновесия ничего неизвестно. Поскольку положение равновесия (предположительно единственное), задаваемое через $T_1(E_1) = T_2(E - E_1)$, разумно предположить, что эволюция энергии E_1 первой системы определяется как $dE_1/dt = k(T_2 - T_1)$, где k – безразмерный коэффициент. Это значит, что в пространстве E_1GP направление приближения к состоянию равновесия задается градиентом энтропии.

Г. Поляризованные динамики

Предположим теперь, что на U_1 , к примеру, имеется поле *поляризованных динамик*. Под этим имеется в виду что каждой точке x из U_1 соответствует локальная динамика, характеризующая локальной функцией $s(h, x)$ (далее мы обсудим условия, диктуемые этому полю функций для реализации локального термодинамического равновесия). Предположим, что на U_2 мы сталкиваемся с динамикой, характеризующейся функцией $S_2(H)$ с очень размытым максимумом (в виде плато). Если каждая из функций $s(h, x)$ обладает выраженным максимумом m по h , зависящим от x , то говорят, что на U_1 имеется поле поляризованных локальных динамик. Локальная связь между S_1 и S_2 приводит для суммарной энтропии к функции с выраженным максимумом m' , лежащим в окрестности m (рис. 4-4) и, следовательно, зависящим от точки x , заданной в U_2 .

Это означает, что поляризация поля динамик S_1 растворяется в открытом множестве U_2 . Происходит *пространственное расширение поляризации*. Если динамика S_2 имеет только один выраженный максимум, то режим S_2 не может адаптировать режим S_1 , и расширения поляризации не происходит. Это дает модель для объяснения явления памяти ткани в эмбриологии. В модели этого рода потеря памяти при старении ткани интерпретируется следующим образом. Первоначально плоский максимум функции $S(H)$ постепенно становится все более и более выраженным. В дальнейшем мы увидим, как можно интерпретировать это явление.

Д. Псевдогруппы локальных эквивалентностей поля

Наша теория поля локальных динамик отличается от классической термодинамики в одном важном пункте. В обычной термодинамике рассматривается дискретное множество A *взаимодействующих* динамических систем, на котором не задается никакой топологии (отличной от дискретной). В рассматриваемой здесь теории динамических систем в качестве множества A берется обычное топологическое пространство U (чаще всего, область пространства-времени \mathbf{R}^4). Взаимодействие между системами E_x заметно только если точки x из U рассматриваются вместе с соседними. Кроме того, существует псевдогруппа преобразований G , действующая одновременно в U и в общем конфигурационном пространстве системы и оставляющая инвариантной общую динамику системы. Если псевдогруппа G действует в U транзитивно, мы имеем дело с *однородным* полем на U . В противном случае мы имеем дело с *поляризованной* динамикой. Далее мы покажем, как можно определить над каждой точкой x из U многообразие

P , параметризованное первыми приближенными интегралами динамики-слоя. Получается приведенное поле, определяемое сечением расслоения над U по слою P . При этом уравнение эволюции поля, определяемое условием локального максимума энтропии, будет инвариантным относительно псевдогруппы G .

4.7. ПРИВЕДЕННОЕ ПОЛЕ

А. Определение приведенного поля

На открытой области W из \mathbf{R}^n зададим метаболическое поле. Возьмем в качестве пространства внутренних состояний многообразие F , а в качестве динамики-слоя — гамильтонову динамику $H(F)$. Тогда метаболическое поле определяется как сечение $s:W \Rightarrow H(F)$, которое задает в F векторное поле и некоторую особую точку $s_1(x)$.

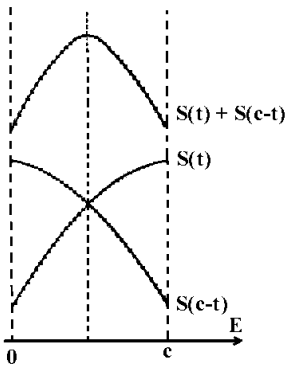


Рис. 4-2.

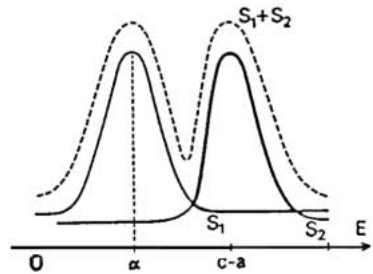


Рис. 4-3.

Пусть энергия E — первый интеграл поля $H(F)(x)$. Приведенным полем метаболического поля (s, sI) называют статическое поле, заданное функцией $g:W \Rightarrow E(s)$: внутренняя тонкая структура динамики-слоя $H(F)$ полностью игнорируется и сохраняется только значения энергии в выделенной точке $s_1(x)$. Более общим образом, если динамика-слой $H(F)$ имеет систему глобальных первых интегралов, задаваемую дифференцируемым расслоением $p:F \Rightarrow P$, то приведенное поле поля (s, s_1) есть снова статическое поле, задаваемое функцией $g(x) = p(s_1(x))$, где $p(s_1(x))$ обозначает множество значений первых интегралов динамики $s(x)$ в точке $s_1(x)$. Заметим, что статические поля относятся к тривиальному типу. Слой $L(U, V)$ сводится к V , а многообразию U — к точке.

Б. Взаимодействие поля с собой. Эволюция приведенного поля

Пусть на базовом пространстве W имеются локальные гамильтоновы динамики, допускающие в качестве первых интегралов расслоение $p:F \Rightarrow P$. Пусть в открытом множестве U из W локальная динамика имеет странный аттрактор $c(x)$. Этот аттрактор как правило содержится в некотором слое расслоения $F \Rightarrow P$. Очень часто в слое содержится целый континуум аттракторов типа $c(x)$, причем этот континуум является симплектическим, и для него можно определить меру Лиувилля A , а затем и энтропию относительно c по формуле $S = \text{Log} A$. С помощью S можно определить также температуру T как $1/T = dS/dE$.

Теперь допустим, что с аттрактором c связана псевдогруппа локальных динамических эк-

вивалентностей G . G действует одновременно в W как подгруппа перемещений, и в континууме аттракторов s слоя F . Если G транзитивна в открытом множестве U из W , и транзитивна ее подгруппа изотропии (подгруппа G , оставляющая некоторую точку неподвижной), то соответствующая динамика однородна и изотропна в U . Допустим (для простоты), что это именно так. Выясним, при каких условиях достигается локальное равновесие. Для локальной системы над диском D из U должно соблюдаться равновесие обмена энергией с остальной частью системы, предполагаемой неизменной (термостат). Из принятой выше гипотезы (см. 4.6.В), согласно которой изменение энергии пропорционально разности температур, сразу следует, что $dE=0$, если и только если интеграл $\int_D (T-T_0)$ равен нулю на D (T_0 обозначает температуру в центре D). В состоянии равновесия температура является гармонической функцией $\Delta T=0$. Если равновесия нет, то уравнение эволюции будет иметь вид $dE/dt=k\Delta T(E)$. Поскольку локальная динамика совпадает с динамикой линейного осциллятора, T и E можно отождествить (с точностью до скалярного множителя) и получить уравнение теплоты. В случае квантового поля, когда энергия E может рассматриваться как комплексная, возникает уравнение Шредингера (ср. прим.[2]).

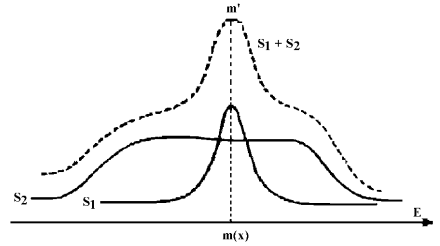


Рис. 4-4.

Вполне возможно, что для некоторых естественных процессов, приближение к равновесию осуществляется через суперпозицию двух способов: обратимой составляющей типа гамильтониана и необратимой составляющей градиентного типа.

Следует заметить, что применимость уравнений эволюции вида $dE/dt=\Delta T$ зависит от возможности определить локальную температуру, связанную с хорошо определенным аттрактором s локальной динамики. Когда этот аттрактор перестает быть определенным и захватывается другими аттракторами, в W возникают катастрофы с морфогенетическим эффектом и уравнение эволюции теряет смысл.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Напомним, что полуаналитическим называется множество, определенное конечным числом аналитических уравнений и неравенств, или же конечное объединение таких множеств. Известно (Лоясевич, (Lojasiewicz)), что эти множества триангулируемы на аналитически погружаемые симплексы. Тот факт, что сечения полуаналитических множеств концентрическими сферами достаточно малого радиуса оказываются гомеоморфными, может быть установлен с помощью теоремы об изотопии трансверсальных сечений стратифицированных множеств (см. ссылки [2] и [7] к гл. III)

[2]. Квантовые поля. В качестве дополнения отметим, что происходит при связи двух квантовых систем. Квантовая система это гамильтонова система, имеющая четное число первых интегралов на многообразии P , снабженном симплектической структурой. В частности, энергия E является комплексной, и аргумент E является фазой системы, а модуль $|E|$ — скалярной энергией. Каждой точке из P соответствует фазовое многообразие, объем Лиувилля A которой позволяет определить энтропию $S=\text{Log}A$. При связи двух систем этого типа роль динамики-произведения играют первые интегралы, определенные многообразием P . Кроме того имеется отображение $P_1 \times P_2 \rightarrow P$, которое задает глобальные первые интегралы объединенной системы. В частности, комплексные значения энергии E_1 и E_2 складываются. В отличие от предыдущего случая предполагается, что катастрофы, при которых системы взаимодействуют, обратимы во времени. Это становится понятным,

например, когда рассматриваемые катастрофы порождаются однопараметрическими подгруппами общего фазового пространства, сохраняющими глобальную симплектическую структуру пространства. В этом случае объем $A(p)$ слоя над точкой (p_1, p_2) не изменяется при взаимодействии; энтропия S остается постоянной, и в ядре отображения $P: P_2 \Rightarrow P$, не происходит приближения к равновесию. В этом случае поле эволюции само будет гамильтоновым, задаваемым (по направлению) как $dp/dt = i \cdot \text{grad } S$ (где $i \cdot \text{grad}$ обозначает симплектический градиент). Объединенная система будет вращаться вокруг этого положения равновесия, никогда его не достигая.

ГЛАВА 5

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ КАТАСТРОФЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ \mathbb{R}^4 , СВЯЗАННЫЕ С КОНФЛИКТАМИ РЕЖИМА

*Εἶδεναι δὲ χρῆν τὸν πολέμων εὐντα ἕνον,
καὶ δίκην εἶν, καὶ γινόμενα πάντα κατ' εἶν
καὶ χρεῶν.*

*Следует знать, что конфликт является все-
общим, что справедливость это борьба, и что все
порождается в результате борьбы и необходимос-
ти.*

Гераклит¹

5.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРАДИЕНТНЫЕ ПОЛЯ И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

А. Конкуренция между локальными режимами

Пусть W – открытая область пространства-времени \mathbb{R}^4 , на которой задано поле локальных динамик (M, X) . Компактное многообразие-слой M называется пространством *внутренних состояний*. Каждой точке x из W поставим в соответствие векторное поле $X(x)$ из M , которое зависит от координаты x дифференцируемым образом. Во всей этой главе, кроме пункта 5.6, мы придерживаемся следующей гипотезы: для всякой точки x из W поле $X(x)$ – это градиентное поле на M , то есть

$$X(m, x) = -\operatorname{grad} V(m; x),$$

где $V(m; x)$ – это *потенциал*, определенный на M и дифференцируемо зависящий от x . Градиент V берется по отношению к римановой метрике, заданной на M .

Метаболическое поле (M, X) можно заменить статическим полем, слой которого – это функциональное пространство $C(M, R)$, то есть пространство бесконечно дифференцируемых функций на M , а $M(m, x)$ – значение этого поля в точке x .

Пусть в некоторой точке x из W устойчивые локальные режимы задаются структурно устойчивыми аттракторами поля X , соответствующими минимумам потенциала $V(m; x)$. Вообще говоря, существует множество таких минимумов, но регулировать процесс в точке x может, очевидно, только один из них. Как выбрать этот управляющий режим среди всех теоретичес-

¹ Приведенный выше перевод этого фрагмента сделан с французского перевода, который отражает интерпретацию, принятую Р. Томом. Перевод Лебедева: *Должно знать, что война общепринята, что вражда – обычный порядок вещей и что все возникает через вражду и взаимообразно* (Фрагменты ранних греческих философов под редакцией А.В. Лебедева. М., 1989). – *Прим ред.*

ки возможных устойчивых режимов? По этому поводу принимается весьма произвольное соглашение, в пользу которого, однако, говорит его простота.

Б. Условие Максвелла

Оно формулируется следующим образом: если в точке x из W конкурируют несколько устойчивых аттракторов c_i , то побеждает аттрактор c_i , соответствующий *минимуму потенциала*:

$$V(c_i) < V(c_j) \quad j = i$$

Аналогичное правило было использовано Максвеллом, чтобы устранить неопределенность v в уравнении состояния ван дер Ваальса $F(p,v)=0$ в случае, когда на заданном интервале p имеется три действительных решения для v , соответствующем смеси газообразной и жидкой фаз. Я не буду долго рассуждать о физической правомерности этого условия. Сразу заметим, что правомерность этого правила в количественном аспекте нас не касается. Единственно, что нам здесь интересно, это описание топологической структуры ударных волн (катастрофических точек) в окрестности особенности потенциала V , где управляющий аттрактор претерпевает бифуркацию. Для этих целей функцию $V(c)$ можно вполне заменить любой другой функцией, выражающей приближенно устойчивость аттрактора, например, объемом или диаметром бассейна аттрактора в M . С помощью такого выбора можно модифицировать структуру катастрофических точек. В более общем плане по поводу данного условия можно сделать два замечания:

1. Это условие приводит к геометрически четким ударным волнам-разделителям, тогда как в природе вследствие вязкости и диффузии переходные области имеют тенденцию расширяться и флуктуировать. Впрочем, очень часто после определенного промежутка времени возникают *переходные устойчивые режимы*, конкуренция которых порождает подморфологию (такую как дорожка вихрей фон Кармана [1] в теории струй или структурированные мембраны в биологии).

2. Это условие не учитывает явления *запаздывания*, которое практически всегда имеет место при появлении нового режима. Предположим, что точкой x из W управляет аттрактор c_1 и что в этой точке появляется новый аттрактор c_2 с очень низким потенциалом $V(c_2) < V(c_1)$. В соответствии с условием Максвелла, должен произойти немедленный скачок в новый режим c_2 . На самом деле новый режим возникает в общем случае гораздо позднее, часто в разветвленной характеристической форме обобщенной катастрофы, описываемой в главе 6.

5.2 АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОТЕНЦИАЛА

А. Множество катастроф

Согласно условию Максвелла, точка x из W может быть катастрофической только в двух случаях: если абсолютный минимум потенциала $V(m,x)$ достигается по крайней мере в двух различных точках c, c' (называемых *точками конфликта*), или если абсолютный минимум потенциала, достигаемый в единственной точке m_0 , перестает быть устойчивым (*точка бифуркации*). Обозначим через K множество функций V в $C(M, R)$, которые обладают одним из двух указанных свойств (то есть значение абсолютного минимума V достигается по крайней мере в двух точках из M , различных или совпадающих). Если $s: \Rightarrow WC(M, R)$ определяет данное поле $[s(x)=V(m; x)]$, то множество катастрофических точек поля это не что иное, как прообраз $s^{-1}(K)$. Всяду плотная часть множества K образуется из страт $C(M, R)$ конечной коразмерности. Если принять естественную гипотезу, что поле s трансверсально множеству K , то в прообразе $s^{-1}(K)$ останутся только страты размерности ниже четырех, и при этом каждая страта будет по-

рождать особый тип локальной катастрофы в W . Оставив на время точки конфликта, рассмотрим точки бифуркации.

Б. Страты бифуркации

1. Алгебраическая лемма — **Определение.** Пусть V — действительная дифференцируемая функция n переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Говорят, что начало координат $O (x_i=0)$ является *строго изолированной особой точкой* функции V , если в алгебре ростков функций C в O идеал J , порожденный частными производными V_{x_i} , содержит некоторую степень максимального идеала, определяющего O . Иначе говоря, любой одночлен M достаточно высокой степени по x выражается линейной комбинацией V_{x_i} с коэффициентами g_i из C :

$$M = \sum g_i V_{x_i}$$

Докажем теперь следующую лемму: если O — особая точка функции V , не являющаяся строго изолированной, то струя бесконечного порядка в O из V принадлежит протомножеству A бесконечной коразмерности в пространстве $J(n, 1)$ струй функций. Действительно, признавая, что O — не строго изолированная особая точка, мы должны признать (по крайней мере в формальном смысле), что через O проходит кривая особых точек. В $J^1(n, 1)$ имеется множество A_1 , задаваемое уравнением $V_{x_i} = 0$. Если утверждать, что производная $J^1 V$ пересекает A_1 в O не трансверсально, то в $J^2(n, 1)$ получается условие:

$$\text{Гессиан } V = \text{Det } |V_{x_i x_j}| = 0$$

что задает множество A_2 , проецируемое на A_1 . В общем случае по индукции зададим множества $A_k \subset J^k(n, 1)$, предполагая, что $J^{k-1} V(O)$ не трансверсально A_{k-1} и что коразмерность A_k больше коразмерности A_{k-1} . Последовательность множеств

$$A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow \dots \leftarrow A_{k-1} \leftarrow A_k \leftarrow \dots$$

задает протомножество A леммы.

Следствие. Любое дифференцируемое семейство функций $V(x)$ с m параметрами может быть сколь угодно точно в C^s -топологии аппроксимировано m -параметрическим семейством функций, все особые точки которых *строго изолированы*.

В. Изучение изолированных особых точек. Коранг

Определения. Возьмем многообразие M размерности n и предположим, что $O(x_1, x_2, \dots, x_n=0)$ это особая точка функции V . Разложение Тейлора функции V в O начинается квадратичной формой $Q(x)$ ранга $n-k$. Целое число k называется *корангом* особой точки O .

Коранг также можно определить внутренним образом: пусть T локальное расщепление (feuilletage) в O коразмерности s , задаваемое s координатными функциями u_1, u_2, \dots, u_s . Будем говорить, что расщепление T *приспособлено к особенности O* из V , если ограничение V на лист $T(O)$, который содержит O , представляет в O критическую квадратичную невырожденную точку. Коранг O является ничем иным, как *минимальной коразмерностью приспособленного расщепления*.

Пусть $(u_1, u_2, \dots, u_s; y_1, y_2, \dots, y_{n-s})$ — приспособленная к расщеплению T система координат. Особая точка O задается на листе $T(O)$ при помощи системы уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial y_j} = 0 \quad j=1, 2, \dots, n-s$$

Это система максимального ранга в $T(O)$. Следовательно, при достаточно малом u она будет иметь максимальный ранг на всем листе $T(u)$. Она задает для ограничения V на $T(u)$ единственную квадратичную и невырожденную точку $c(u)$. Эта точка $c(u)$ дифференцируемо зависит от переменных u и $c(O) = 0$.

Согласно классической теореме Марстона Морса [2], на листе $T(u)$ существует система

координат $Y_j, j = 1, 2, \dots, n-s$ такая, что в этой системе функция V представима в виде:

$$V = V_1(u) + \sum_{j=1}^{n-s} Y_j^2 \quad \text{Уравнение (M)}$$

где $V_1(u) = V(c(u))$ – значение функции V в точке $c(u)$.

Я утверждаю, что функция $V_1(u)$ имеет в начале координат $u=0$ критическую точку ($dV_1=0$ для $u=0$) нулевого ранга. Разложение Тейлора функции $V_1(u)$ начинается членом степени не меньшей, чем три. Если в действительности ранг этой особой точки строго положительный, в плоскости $Y=0$ можно выделить направление (например, ось u_1), вдоль которого V (или V_1) будет бесконечно малой строго второго порядка $V=O(u_1^2)$. Размерность приспособленного расщепления можно увеличить: расщепление, задаваемое при помощи (u_2, u_3, \dots, u_s) будет также приспособленным.

Из этого построения следует, что для утверждения о том, что критическая точка O функции V n переменных имеет коранг k , где k не меньше n , достаточно в квадратичной части разложения Тейлора принять за нуль коэффициенты квадратичной формы с k переменными u_1, u_2, \dots, u_k . Это влечет за собой $k(k+1)/2$ независимых условий.

Утверждение. В пространстве $J^2(n, 1)$ струй функций второго порядка струи особых точек коранга k образуют подмногообразие коразмерности $k(k+1)/2$ в пространстве особых струй первого порядка.

Следствие. Для семейств функций, зависящих от более чем четырех параметров (как взятое нами вначале поле s), устойчивым образом можно получить только критические точки коранга, не большего двух. Действительно, точки коранга три имеют коразмерность $3 \cdot 2 = 6$.

Г. Остаточная особенность

Теперь докажем важное свойство: особенность функции $V_1(u)$, называемая *остаточной особенностью* особенности в O является независимой от приспособленного расщепления T , выбираемого так, как будет уточнено ниже. Действительно, предположим, что мы заменяем расщепление T , заданное функциями u_1, u_2, \dots, u_s , другим приспособленным расщеплением T' , задаваемым координатными функциями v_1, v_2, \dots, v_s (которые в свою очередь являются функциями u и Y). Множество критических точек $c'(v)$ ограничения V на листы $T'(v)$ из T' задается системой

$$\left(\frac{\delta V}{\delta Y_i}\right)_{v=\text{const}} = \left(\frac{\delta V}{\delta Y_i}\right)_{u=\text{const}} + \sum_{\tau} \frac{\delta V}{\delta v_{\tau}} \cdot \frac{\delta v_{\tau}}{\delta Y_i} = 0$$

или при подстановке (M)

$$Y_i = \frac{1}{2} \sum \frac{\delta V}{\delta v_i} \cdot \frac{\delta v_i}{\delta Y_i}$$

Новая остаточная особенность задается функцией

$$V_2(v) = V[c'(v)].$$

Поскольку множество критических точек $c'(v)$ образует s -многообразие, которое может быть равным образом параметризовано при помощи u , функция V_2 может быть представлена в виде

$$V_2(u) = V_1(u) + \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\delta V}{\delta v_i} \cdot \frac{\delta v_i}{\delta Y_i} \right)$$

Имеется следующее свойство (выводимое из результата Ж.К.Тужрона [3]): если V – 2-гладкая функция в начале координат O , то любая функция вида $V+g$, где g принадлежит квадрату J^2 идеала J , порожденного частными производными V/x_i эквивалентна V , то есть существует замена локальных координат $h: \Rightarrow x_i x_i$, такая что $V_Q h = V+g$. Таким образом, остаточная

особенность $V_i(u)$ с точностью до дифференцируемой эквивалентности не зависит от выбора приспособленного расщепления T .

Этот факт имеет важные последствия. Бифуркация критической точки коранга k зависит только от k и от типа остаточной особеннности, но не от размерности n пространства, на котором задана функция. Поэтому всегда можно предполагать, что базовое пространство имеет размерность k , а изучаемая критическая точка имеет нулевой ранг. Это алгебраическое свойство является фундаментальным для нашей модели, поскольку *она показывает, что можно идентифицировать тип катастрофы и ее динамический источник без явного знания всех внутренних параметров, от которых зависит система.*

Теперь мы опишем особенности коразмерности, меньшей четырех. Мы рассмотрим страты конфликта и страты бифуркации. Кроме этого мы упомянем страты, трансверсальные стратам разъединенных особенностей, не представляющие никакой морфологической новизны. Напротив, при рассмотрении расщепления пространства-времени гиперплоскостями $t = \text{const}$ интересно описать локальную эволюцию некоторых особенностей как функцию времени. При этом будут получены так называемые *переходные страты.*

5.3. КАТАСТРОФЫ КОРАНГА 1

В соответствии с теорией, изложенной в параграфе 5.2., можно предположить, что многообразие M внутренних состояний имеет размерность один и обозначить через x координату на M .

А. Страты коразмерности нуль

Рассмотрим функции, абсолютный минимум которых оказывается образующего типа, то есть локально задается квадратичным минимумом $V=x^2$. Соответствующие точки в W являются регулярными точками процесса.

Б. Страты коразмерности один

Они могут быть двух типов:

1. Вы можете столкнуться со стратой *U типа складки*. Глядя со стороны U вы имеете дело с двумя режимами, один из которых стабилен (c_1), а другой нестабилен (c_2 ; минимум V и критическая точка индекса один из V только что взаимно уничтожились при столкновении на U), при том что другие критические точки остаются неизменными (рис 5-1). Если строго следовать условию Максвелла, то одна такая страта не может иметь какого бы то ни было морфогенетического эффекта. Действительно, новый аттрактор c_1 таков, что $V(c_1)$ превосходит абсолютный минимум $V(c_2)$. В принципе не существует ударного фронта типа складки. Если допускается возможность запаздывания, то аттрактор с энергией, превосходящей минимальный потенциал режима, (в этом случае можно говорить о метаустойчивом режиме), может быть разрушен складкой вида $s^{-1}(U)$. Зона, соответствующая W , может войти в метаустойчивый режим низкого потенциала, или базовый режим, в соответствии с топологическим расположением бассейнов аттракторов (рис 5-2).

2. Страты конфликта. Это множество функций V , которые обладают двумя абсолютными минимумами, равных значений c_1 и c_2 . Со стороны страты Z имеем $V(c_1) < V(c_2)$, с другой стороны $V(c_1) > V(c_2)$. Прообраз $s^{-1}(Z)$ порождает ударный фронт, разделяющий районы режимов c_1 и c_2 .

В. Страты коразмерности 2

Имеется четыре типа таких страт.

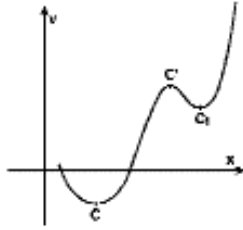


Рис. 5.1.

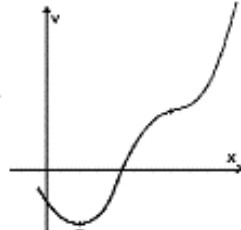


Рис. 5.2.

1. Трансверсальное пересечение двух страт-складок. Эти страты не представляют морфогенетического интереса, как и страты-складки.

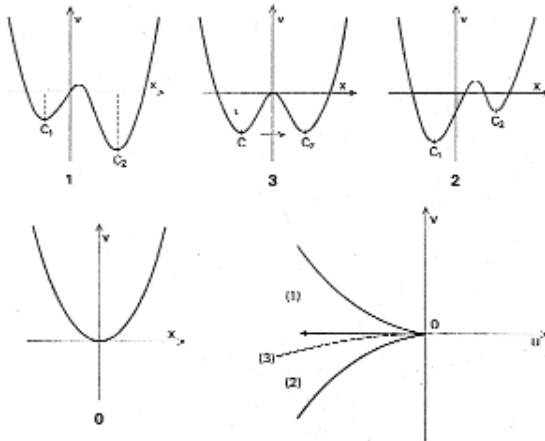
2. Страты точек-остриев. Катастрофа Риманна-Пюгонии. Эти страты очень важны для морфогенеза, поскольку они порождают самую простую катастрофу – катастрофу Риманна-Пюгонии.

Пусть c – критическая точка потенциала V , связанного с точкой O такой страты U . Если через u, v обозначить локальные координаты в L , трансверсальные к U , то потенциал V локально записывается следующим образом (при предположении, что $V(c)=0$):

$$V = \frac{x^4}{4} + u \frac{x^2}{2} + vx$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x^3 + ux + v$$

Рис. 5-3 и 5-4. Элементарные графики (1, 2, 3, 0) представляют локальные потенциалы, соответствующие положениям в универсальной развертке, обозначенным цифрами 1, 2, 3, 0.



(См. 3.2.в, где описана эта особенность). На плоскости u, v , трансверсальной U , полуку-

бическая парабола $4u^3 + 27v^2 = 0$ задает страты-складки коразмерности один из K , проходящие через U . Таким образом страта U возникает как ребро возврата гиперповерхности бифуркации K . С внешней стороны полукубической параболы имеется только один минимум и, таким образом, один возможный режим. Внутри имеется два минимума, соответствующие конкурирующим режимам. Сразу видно, что внутри параболы невозможно выбрать непрерывный режим. Страта конфликта вырождается в *острие* и разделяет области, управляемые каждым из минимумов c_1, c_2 . По условию Максвелла страта конфликта задается уравнением $V(c_1) = V(c_2)$. Она имеет коразмерность один и имеет U в качестве свободной границы. Сечение s дает $s^{-1}(U)$ в качестве свободного края ударного фронта, разделяющего два режима, возникающие при непрерывном дифференцировании одного и того же режима (см. рис. 5-3 и 5-4). Это явление хорошо известно в газовой динамике как образование ударной волны в цилиндре перед поршнем, движущемся с ускорением, которое было изучено Югонио. Теоретическая возможность этого явления была предсказана еще Риманом (см. [4] и [5]), однако топологическая особенность, лежащая в основе этой катастрофы (*острие* Уитни или *точка сборки* отображения плоскости на плоскость) получила объяснение только спустя сто лет в работах Уитни [6]. В классической оптике эта особенность порождает каустики, которые являются структурно устойчивыми (фото II, III, IV). В геологии эта особенность приводит к *провалам* (см. Фото V).

3. Страты конфликта. Если конкурируют три режима c_1, c_2, c_3 , то множество (несовпадающих и невырожденных) точек, в которых потенциал V имеет один и тот же абсолютный минимум, локально формирует страту коразмерности два. Эта страта имеет вид тройного ребра, имеющего общую границу с тремя стратами конфликта коразмерности один:

$$V(c_1) = V(c_2) < V(c_3); V(c_2) = V(c_3) < V(c_1); V(c_3) = V(c_1) < V(c_2).$$

Прообраз этой страты по s определяет тройное ребро, имеющее общую границу с тремя стратами конфликта (рис. 5-5).

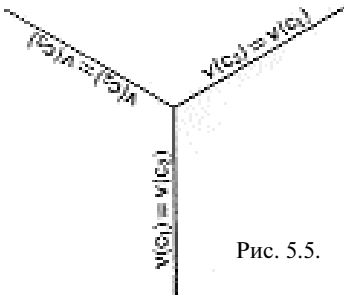


Рис. 5.5.

Эта особенность известна в газовой динамике (она появляется в *отражении Маха*). В случае проблемы Плато ее можно также реализовать с помощью мыльной воды. В биологии эта особенность была тщательно описана Д'Арси Томпсоном [8] в связи с клеточными мембранами.

4. Трансверсальное пересечение складки и страты конфликта. Существует четыре таких режима, из которых три являются устойчивыми.

Г. Страты коразмерности три

Для простоты мы выделим только принципиально новые ситуации, не останавливаясь на описании страт, которые представляют собой трансверсальные пересечения страт, относящихся к совершенно разным режимам.

1. Ласточкин хвост. Эта ситуация возникает при наличии особенности отображения $\mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ (или его разрыва) и обозначается $(S_1)^3$. Если $\dim M = 1$ (координата x) и если u, v, w – координаты, трансверсальные страте U , то уравнения локальной модели будут

$$V = \frac{x^5}{5} + \frac{ux^3}{3} + \frac{vx^2}{2} + wx$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x^4 + ux^2 + vx + w = 0 \quad (Q)$$

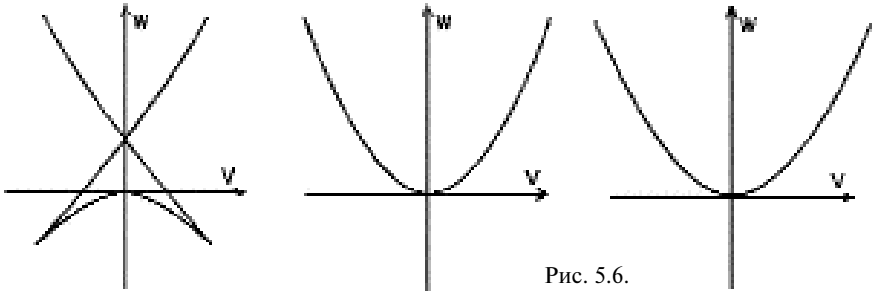


Рис. 5.6.

В пространстве \mathbf{R}^3 с координатами u, v, w дискриминант уравнения (Q) определяет некоторую поверхность K . Чтобы описать форму этой поверхности рассечем ее плоскостями $u = \text{const}$. Найдем множество точек \mathbf{R}^3 в которых уравнение четвертого порядка (Q) имеет по x тройной корень. Мы имеем

$$O = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 4x^3 + 2ux + v$$

$$O = \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = 12x^2 + 2u$$

откуда получается параметрическое представление кривой C :

$$u = -6x^2; v = 8x^3; w = -3x^4.$$

Эта кривая C представляет собой ни что иное как *ребро возврата* поверхности K ; сама C имеет возврат в начале координат. При отрицательных u сечение K плоскостью $u = -a^2$ имеет два возврата, симметричных относительно оси v ; поскольку это сечение содержит семейство прямых с единственным параметром x без стационарной прямой, кривая этого сечения не имеет точек перегиба. Поэтому эта кривая может иметь только вид ласточкиного хвоста (рис. 5-6).

При положительных u возвраты не появляются, и кривая сечения является просто выпуклой кривой. Если начать с $u = -a^2$ и двигаться в сторону возрастания u , то криволинейный треугольник, образующий ласточкин хвост, будет постепенно исчезать и при $u=0$ выродится в точку, совпадающую с началом координат. Кривая сечения в начале координат имеет бесконечную кривизну. Следует заметить, что поверхность K имеет самопересекающуюся кривую (алгебраически задаваемую соотношениями $v=0, w=u^2/4$). В алгебраической или аналитической модели эта двойная кривая полностью принадлежит поверхности K . Следовательно при положительном u кривая сечения K имеет двойную изолированную точку. Такая особенность в общем случае не имеет никакого значения для наших моделей (рис.5-7).

Теперь исследуем, могут ли возникать конфликты режима в окрестности такой особенности. Для этого необходимо, чтобы уравнение имело четыре действительных корня (в противном случае нельзя получить два минимума функции I). Таким образом, следует разместиться внутри криволинейного треугольника ласточкина хвоста при $u < 0$. Поскольку один из возвратов этого треугольника задает катастрофу Римана-Пюгоню, в этом треугольнике имеется фронт ударной волны, линия конфликта между двумя режимами, которая начинается на ребре возврата треугольника и заканчивается в двойной точке кривой сечения. Именно в этом, как нетрудно убедиться, заключается единственная топологическая возможность разделения режимов. Если проследить изменение сечений по мере уменьшения, то таким образом можно качественно описать ласточкин хвост. При $u > 0$ имеется кривая-складка, которая отделяет ус-

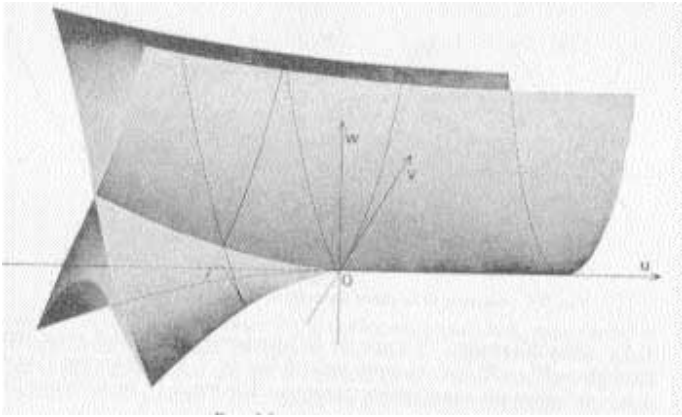


Рис. 5.7.

тойчивый режим от пустого режима (без аттракторов). При $u=0$ эта кривая имеет бесконечную кривизну, а при отрицательных u — две точки возврата, придающих криволинейному треугольнику вид ласточкина хвоста. Внутри треугольника возникает два режима, разделенных кривой, соединяющей одну из этих точек возврата с двойной точкой (рис.5-8), или, если принять условие Максвелла — с точкой складки. *Ласточкин хвост* уже давно замечен в алгебраической геометрии. Но я сомневаюсь, что даже сегодня вполне осознано его значение в качестве устойчивой особенности ударной волны. Мы находим его в физике, в теории ударных фронтов в плазме [10], а совсем недавно он был заново открыт в качестве особенности поверхностей Ландау [9], связанных с некоторыми диаграммами Фейнмана. Ласточкин хвост также обнаруживается в классической геометрической оптике в качестве особенности каустик (фотографии с VI по IX). Что касается эмбриологии, то в 9 главе будет предложено рассматривать оконечности бластропорической борозды как ласточкины хвосты.

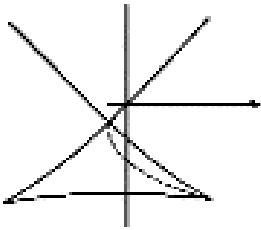


Рис. 5.8.

2. Переходные страты. Переходы на стратах-*остриях*. В пространстве наших трех параметров страта Риманна-Гюгионо представляет собой кривую. Сечение плоскостями $w = \text{const}$ может таким образом иметь особенности, поскольку плоскость $w = \text{const}$ касательна к этой кривой. На

самом деле здесь идет речь не о новой особенности, а о вариации по одному параметру (например, по времени) секущих гиперплоскостей особенности *острие*. Имеется два типа контакта: а) *особенность губа*: два острия возникают при $t = 0$ и затем разделяются, оказываясь связанными через линию разделения двух режимов (рис 5.9); б) *особенность клюв в клюв*: два симметричных острия сходятся своими крайними точками и затем соответствующие разделители воссоединяются. (см. рис.5-9).

3. Страты конфликта. Когда конкурируют четыре режима, это задает в K страту коразмерности три. В пространстве \mathbf{R}^3 , трансверсальном этой страте, имеется четыре тройных ребра, исходящих из одной точки, и шесть поверхностей конфликта. Общая топологическая конфигурация представляет собой конус, вершина которого находится в центре правильного тетраэдра, и основание которого образовано ребрами этого тетраэдра. Сечение этой особеннос-

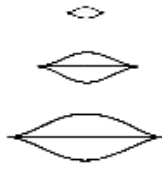
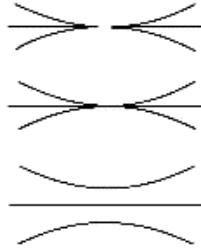


Рис. 5-9

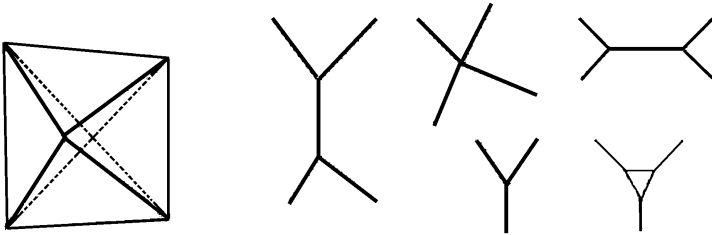


5-10.

ти плоскостью $t = \text{const}$ дает при варьировании от $-a$ до $+a$ взаимное изменение связей между четырьмя разделительными линиями (см. рис. 5-11).

(a) (b)

Рис. 5-11. Сечение четверной точки.



Д. Страты коразмерности четыре

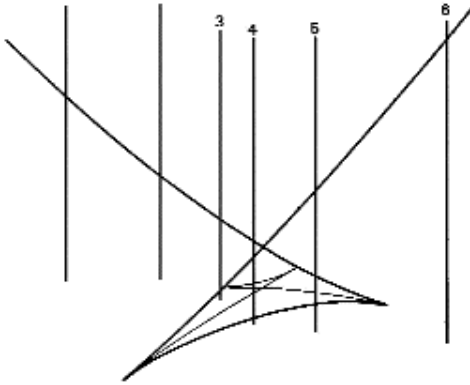
1. *Бабочка*. Речь идет об особенности отображения \mathbf{R}^4 в \mathbf{R}^4 , обозначаемой в классической терминологии $(S_1)^4$. Если обозначить через u, v, w, t координаты трансверсальные страте, то локальная модель этой особенности запишется как

$$V = \frac{y^6}{6} + \frac{ty^4}{4} + \frac{uy^3}{3} + \frac{vy^2}{2} + wy$$

$$\partial V = y^5 + ty^3 + uy^2 + vy + w = 0 \quad \text{Уравнение (H)}$$

(через y здесь обозначена координата M).

Можно достаточно легко составить представление о расположении гиперповерхности дискриминанта D уравнения (H) в пространстве-времени $\mathbf{R}^4(u, v, w, t)$. Для этого нужно параметрически представить поверхность A , на которой (H) имеет тройной корень и кривую C , на которой (H) имеет четверной корень. Чтобы не входить в детали расчетов, которые терпеливый читатель может восстановить сам, ограничусь тем, что покажу на рисунке 5-12 качественное представление D с помощью сечений гиперплоскостями $t = \text{const}$. При положительных t сечение D является поверхностью, с ребром возврата a (сечение A). Эта кривая не имеет особенностей и имеет вогнутую форму. При $t = 0$ это ребро имеет в начале координат бесконечную кривизну. При отрицательных t оттуда выходят два ребра возврата по форме весьма напоминающих ласточкин хвост, но *открытые* в третье измерение. Поверхность сечения D имеет двойную линию W с двумя неподвижными точками на возвра-



тах C и два возврата в точках, где ребро возврата A пересекается с одним из слоев, связанных с другой ветвью C . Плоскость симметрии $v = w = 0$ пересекает поверхность D по кривой, имеющей три ребра и не имеющей возвратов (рис.5-12-4). Это кривая формы бабочки имеет три точки самопересечения, где плоскость встречается с двойной кривой W .

- А) Бабочка и замечательные сечения
- б) Изометрическая проекция бабочки.

образованном кривой-бабочкой, уравнение H имеет пять действительных корней. Следовательно, существует возможность конфликта между тремя режимами (минимумами функции V). Единственная возможная конфигурация разделения между этими тремя режимами представлена на рис. 5-12-4. Из тройной точки исходит три разделительные линии (сепаратриссы), заканчивающиеся соответственно на двух возвратах (Риман-Пюгонии) и в двойной точке. Каче-

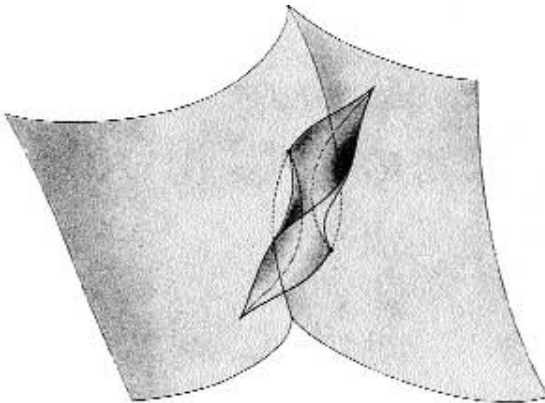
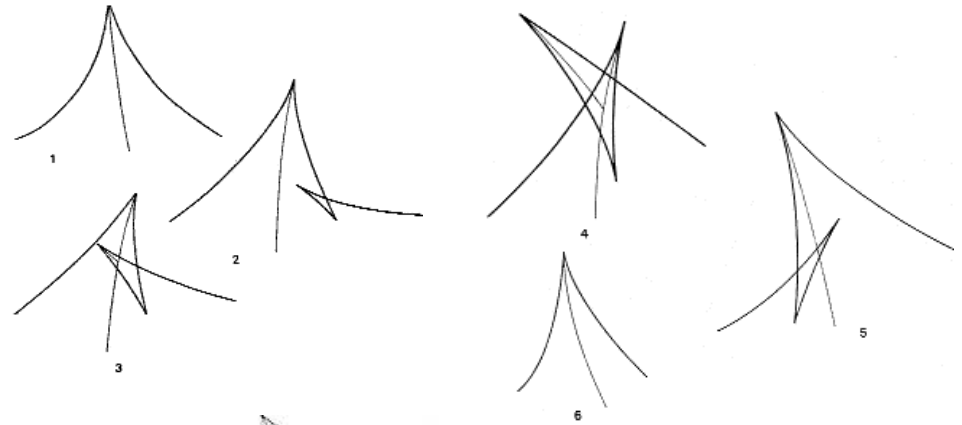


Рис. 5-12.

ственно вариация может описываться так: при положительных t имеется поверхность ударного фронта волны, краем которого служит кривая Римана-Пюгонии. При $t < 0$ край ударной волны отслаивается, порождая маленькое тройное ребро (рис. 5-13-1).

Эта особенность хотя и структурно устойчива, но неудобна для непосредственного наблюдения из-за ее переходного характера. Более нагляден результат пересечения этой особенности с некоторой областью пространства \mathbf{R}^3 . На свободном крае, как мы видели, проис-

ходит отслоение или *вздутие* ударной волны. Очень часто край ударной волны продолжает свое движение вверх, несмотря на соединение двух крайних точек тройной линии. В конце концов получается пузырь, альвеола, присоединенная к вертикальной стенке (рис. 5-13-2). В биологии имеются многочисленные примеры структур этого типа, например, узлы венозных стенок. В семантической интерпретации элементарных катастроф, которую мы предложим в 13 главе, бабочка выступает в роли организующего центра для *кармана*.

Склеивая две отслоившиеся поверхности симметрично вдоль их краев, мы получаем полностью закрытый пузырь. Такая конфигурация соответствует особенности потенциала коразмерности пять. Хотя образование пузырей на ударном фронте волны, разделяющем два режима, определяется неустойчивой особенностью потенциала, оно часто наблюдается. Затем закрытый пузырь развивается в открытый, в альвеолу — явление, символизирующее захват промежуточного режима пузыря одним из пограничных режимов, а именно тем, к которому обращена открытая часть. Помимо всем известных прыщей, лопающихся на нашей коже, в качестве иллюстрации этого процесса можно привести маленькие песчаные пузыри, возникающие на пляже во время отлива (фотография X).

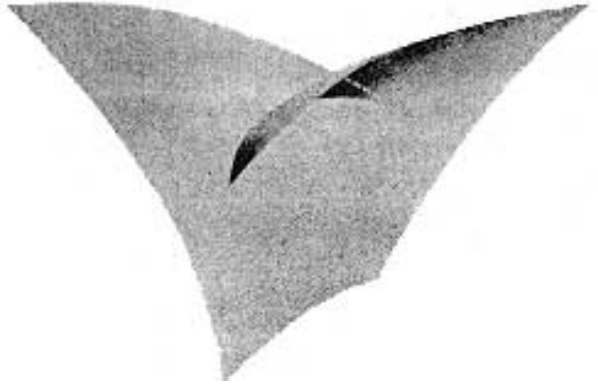


Рис.5-13-1 Отслоение ударной волны.

5.4. Элементарные катастрофы коранга два

А. Омбилические точки

Особенности потенциала $V: M \Rightarrow R$, описанные выше, являются особенностями коранга один. Если многообразие M имеет размерность n , потенциал V в некоторой особой точке O имеет второй дифференциал, который представляет собой квадратичную форму ранга $n-1$. Может случиться, что этот ранг снизится до $n-2$ структурно устойчивым образом.

В действительности, утверждение о том, что квадратичная форма с n переменными зависит только от $n-2$ переменных, требует обращения в нуль трех коэффициентов (например, коэффициентов a, b, c , квадратичной формы с двумя переменными $ax^2 + 2bxy + cy^2$). Эта особенность может проявляться устойчиво в виде изолированных точек в R^3 . По соображениям, которые будут изложены позднее, мы назовем эти точки омбилическими или омбиликами.

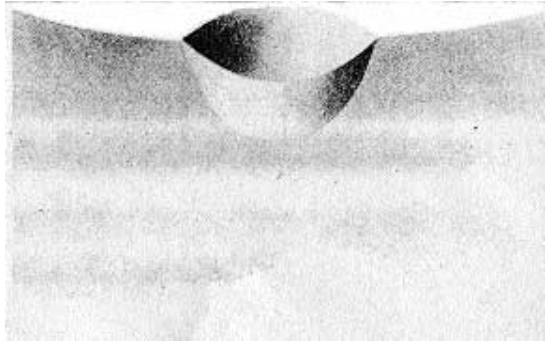


Рис. 5-13-2. Развитие отслоения в пузырь.

Б. Классификация омбилических точек

Теперь мы будем рассматривать многообразие M размерности два (локальные координаты x, y). На самом деле $n-2$ других переменных общей теории не играют никакой роли в описании особенностей. Разложение Тейлора потенциала $V(x, y)$ начинается кубической формой $Q(x, y)$. Для классификации заданных таким образом особенностей согласно теории Д. Матера [11] рассматривают идеал J , порождаемый в алгебре S формальных рядов $\mathbf{R}[x, y]$ с двумя переменными x и y частными формальными производными $\delta V/\delta x, \delta V/\delta y$. Наиболее простой случай – это когда частное S/J имеет конечную размерность равную трем. Это случается, поскольку квадратичные формы $\delta Q/\delta x, \delta Q/\delta y$ не имеют ни одного общего линейного множителя, так как произведения

$$x\delta Q/\delta x, y\delta Q/\delta x, x\delta Q/\delta y, y\delta Q/\delta y$$

порождают все векторное пространство форм степени три относительно x, y .

Факторпространство S/J является векторным, имеющим размерность два, с базой x, y и квадратичной формой $g(x, y)$. Из теории Д. Матера следует, что универсальная развертка особенности V в O задается уравнением

$$V=Q(x, y) - ux - vy + wg(x, y)$$

Поскольку мы имеем дело с потенциалом, постоянный член сюда не добавляется. Согласно теории Матера, имеется устойчивость относительно диффеоморфизмов отображения $(x, y, u, v, w) \Rightarrow (V, u, v, w)$, где эквивалентность задается в смысле диффеоморфизмов исходных пространств, проектируемых на диффеоморфизмы пространства параметров (u, v, w) .

Если квадратичная форма g имеет смешанную сигнатуру, то говорят, что перед нами *гиперболическая омбилика*. Если это форма строго положительна или строго отрицательна, то омбилика называется *эллиптической*.

Этому типу омбилик можно дать более сущностное определение. Линейная инволютивная связка $aQ+bQ=0$, очевидно, не зависит от системы координат x, y . Ее двойные лучи различны. Действительно, если $Q_x = Q_y = 0$ имеют общий линейный множитель, то этот множитель задает инвариантный луч инволюции, и наоборот. Если оба двойных луча действительные, мы имеем гиперболическую омбилику. Принимая эти двойные луча за оси координат, мы приходим к формуле $Q_x=3x^2, Q_y=3y^2$ откуда $Q=x^2+y^2$. Чтобы получить базу пространства квадратичных форм, можно принять $g=xy$. Отсюда следует уравнение

$$V=x^3+y^3+wxu-ux-vy \quad \text{Уравнение (H)}$$

для гиперболического омбилика и его универсальной развертки.

Поскольку двойные лучи инволюции – это сопряженные мнимые величины, можно предположить, что эти лучи изотропны, то есть что $x^2+y^2=0$. Это условие реализуется с помощью подстановки $Q=x^3-3xy^2, Q_x=3(x^2-y^2), Q_y=-6xy$. При $g=x^2+y^2$ мы получаем для эллиптической омбилики и ее универсальной развертки следующее уравнение:

$$V=x^3-3x^2+wx^2+y^2-ux-vy \quad \text{уравнение (E)}$$

В. Морфология омбилик

Описание гиперповерхности пространства \mathbf{R}^5 пяти размерностей, задаваемой уравнениями (H) или (E) сложно для объяснения. Сначала изучается ее внешний контур B на пространстве параметров универсальной развертки u, v, w . Для этой цели с каждой областью, задавае-

мой множеством бифуркации связывается топологический тип функции $V(x,y)$, соответствующий на пространстве x, y внутренним параметрам. Затем дается интерпретация явлений, возникающих при предположении что режим, связанный с аттрактором градиента V занимает всю область, которая ему предназначена.

1. *Гиперболическая омблика: гребень волны.* Рассмотрим множество C критических точек $V(x,y)$, предполагая параметры u, v, w постоянными. Это множество C – многообразие размерности три, задаваемое уравнениями $V_x = V_y = 0$. Пусть

$$u = 3x^2 + 2wy$$

$$v = 3y^2 + 2wx$$

Проекция C на пространстве u, v, w имеет множество критических значений (множество бифуркации) B . При $w=0$ имеется отображение плоскости на плоскость, задаваемое уравнениями $u = 3x^2, v = 3y^2$. Это отображение, задаваемое «вчетверо сложенным платком» (рис. 5-14).

Кривая критических значений сводится к двум положительным полуосям Ou и Ov . Ясно, что добавление к V членов четвертого порядка приводит к отображению типа $u = 3x^2 + y^3; v = 3y^2 + x^3$. Кривая B на плоскости Ouv составлена из двух дуг, каждая из которых имеет обыкновенный возврат в начале координат (рис.5-15). Эта особенность может также реализовываться как особенность каустик в геометрической оптике (фотография XII).

Если придать w малое ненулевое значение, двойная точка кривой C исчезнет. Мы получим критическую кривую, состоящую из двух дуг (рис. 5-16). Одна кривая выпуклая. Другая, содержащаяся внутри предыдущей, имеет обыкновенный возврат. Подобное расположение сохраняется при любом знаке, поскольку замены $x \Rightarrow -x, y \Rightarrow -y$ и $w \Rightarrow -w$ сохраняют уравнение (H). С точки зрения внутренних переменных x, y вырожденная ситуация $u = v = w = 0$ превращает кривую в тройную точку и действительную ветвь уравнения $x^3 + y^3 = 0$. Эта кривая разлагается на прямую $(x+y)=0$ и мнимую окружность $x^2 + y^2 - xy = 0$. Варьируя параметры, мы получаем три возможности:

- i) Функция V не имеет ни одной критической точки, которая бы имела топологический тип линейной функции $(x+y)$
- ii) Имеется две критические точки. Это минимум и точка-седло (случай ii,a) и максимум и точка-седло (случай ii,b).
- iii) Имеется четыре критические точки потенциала $V(x,y)$. Например, для $V = 0$ можно получить пересечение прямой $(x+y)=0$ действительной окружностью уравнения $x^2 + y^2 - h = 0$. В таком случае имеется максимум, минимум и две седловые точки. Случай iii) соответствует внутренней области рис. 5-15 и 5-16. Возврат на рис. 5-15 соответствует внутренней фигуре r , где действительная окружность касается прямой, в результате чего три критические точки совпадают с точками касания. Случаи ii) соответствуют промежуточной области между двумя

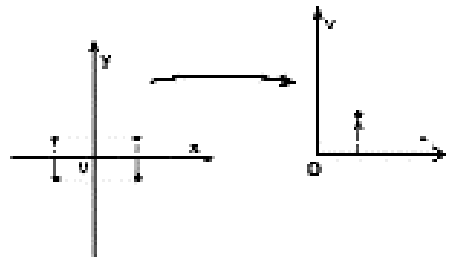


Рис.5-14. Вчетверо сложенный платок

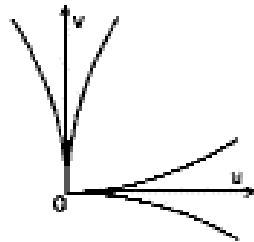


Рис.5-15 Развитие особенности 5-14.

критическими кривыми рисунка 5-16 внутри возвратов на рис. 5-15. Случай i) соответствует внешним областям рис. 5-15 и 5-16.

Рассмотрим морфогенетическое поле, связанное с гиперболической омбиликой. Поскольку в окрестности особенности возможен только один устойчивый режим (минимум потенциала $V(x,y)$), конфликта режимов в собственном смысле слова здесь нет. Тем не менее, мы имеем право допустить, что глобальная форма области устойчивого режима в пространстве универсальной развертки может быть в какой-то мере обнаружена, поскольку локальный динамический режим имеет особенность. Чтобы уточнить эту мысль предположим, что w это время, и что при отрицательных w мы имеем случай ii)а, что бассейн устойчивого режима находится целиком внутри вогнутой кривой c , и что при $w=0$ этот бассейн в O имеет угол. Тогда при положительных w мы имеем случай ii)б (поскольку чтобы получить то же уравнение, необходимо изменить знак V), при том что область устойчивого режима сводится к внутренней части контура c' (рис. 5-17а).

Если допустить, что устойчивый режим связан с жидкой фазой, предыдущее описание может быть вполне достоверно применено в случае приюба. При отрицательных w имеется правильная волна с вогнутым дифференцируемым контуром. При $w=0$ волна имеет угловое сечение, а при положительных w контур имеет возврат. В подобных случаях ясно, что оконча-

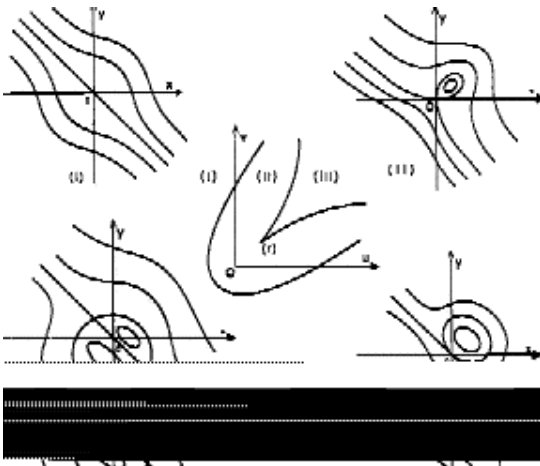


Рис. 5-16 Универсальная развертка параболической омбилики (в центре). Вокруг - локальный потенциал $V(x,y)$, соответствующий положениям (i, ii, iii, r).

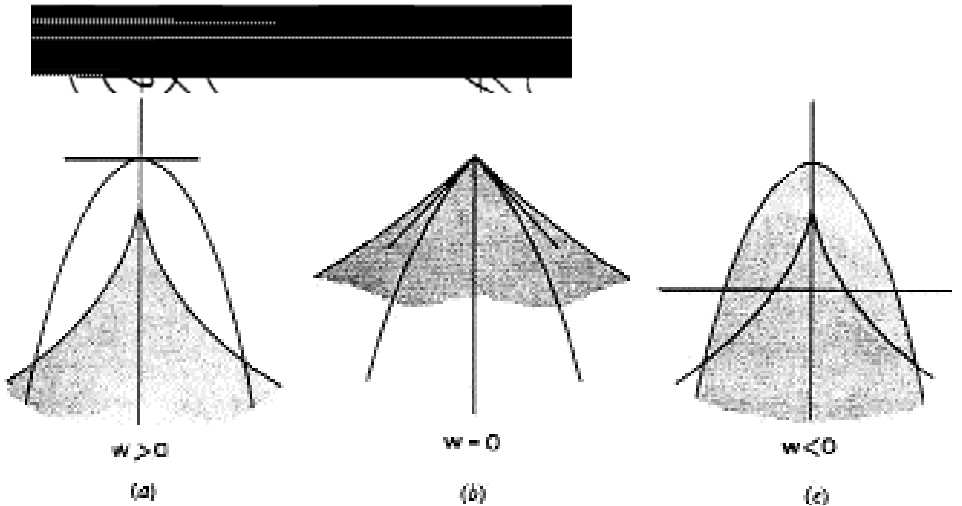


Рис. 5-17 Последовательные сечения приюба.

тельная конфигурация оказывается неустойчивой типа обрушивающейся волны (См. прим. [1] рис. 5-18 и фотографию XIII).

2. Эллиптическая омбилика: волос. Локальная модель задана уравнением (E):

$$V = x^3 - 3xy^2 + w(x^2 + y^2) - ix - iy$$

Множество S критических точек $V(x,y)$ отображается на Ouv через отображение

$$u = 3(x^2 - y^2) + 2ixV = -6xy + 2iy$$

При $w=0$, это отображение переводит точку $z=x+iy$ в сопряженную точку $3z^2$. При малых значениях w мы получаем классическую деформацию отображения $Z=z^2$. Кривая критических значений на плоскости Ouv является гипоциклоидой с тремя возвратами. (см. Уитни [6]). Эллиптическая омбилика характеризуется при универсальном разложении двойным утончающимся конусом, сечение которого является гиперциклоидой с тремя возвратами (см. рис. 5-19).

На плоскости Oxy внутренних переменных особенность при $u=v=w=0$ задает кривую, имеющую тройную точку с различными действительными касательными: $x^3 - 3xy^2=0$ (критическая точка, называемая обезьяньим седлом (*Affensattelpunkt*)) (рис. 5-20-0). Образующая деформация этой ситуации превращает тройную точку в три двойные точки, вершины треугольника, который содержит или минимум, или максимум потенциала V (рис. 5-20, случай ii) а и ii)б соответственно). При $w=0$ также имеет место образующая деформация, дающая только два седла (случай i)). Поскольку переход от отрицательных к положительным w при $u=v=0$ преобразует случай ii)а в случай ii)б, единственной возможной областью устойчивого режима является внутренняя часть сужающихся конусов, изображенных на рис. 5-19.

Не лишена смысла попытка интерпретировать эллиптическую омбилику в гидродинамике как конец струи жидкости. В биологии можно усмотреть эллиптические омбилики в любых заостренных образованиях, нередко имеющих в покрове живых существ, таких как, например, ресницы, жгутики, волосы, иголки у ежей и т.п., хотя очевидно, что эти органы могут иметь совершенно различные функции.

3. Терминологическое замечание. Омбилики. В классической дифференциальной геометрии *омбилическая точка* поверхности S в \mathbf{R}^3 - это точка, где два главных радиуса кривизны равны. Для каждой омбилики M на S существует единственный центр кривизны $q(M)$, лежащий на нормали к M из S . Именно эту точку, возможно, неправильно, мы называем здесь омбиликой. Рассмотрим множество сфер (с переменным радиусом r) с центром на S . Они образуют многообразие Q размерности $2+3=5$, которое естественным образом отображается в \mathbf{R}^3 (параметр q). Это отображение имеет в центре кривизны $q(M)$ особенность типа S_2S_1 , которая локально тождественна омбилике в смысле нашего определения. Классическая типология [12] (по Э.Пикару) омбилических точек поверхности не имеет непосредственной связи с нашей. Заметим только, что если центр кривизны омбилики эллиптический, он проходит через омбилику, соответствующую трем кривым (см. [12], статью И.Р.Портеуса).

В биологии «омбиликой» или *пунком* называется особенность, при помощи которой организм-потомок отделяется от родительского организма. Как мы увидим, имеется определен-

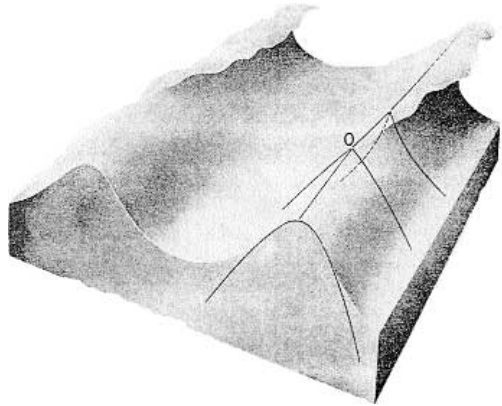


Рис. 5-18 Прибой (изометрия).

ная аналогия между этим понятием и параболическим омбиликом, который сейчас будет описан.

Г. Параболическая омблика: гриб

Поскольку эллиптическая и гиперболическая омблики - особенности размерности три, можно устойчиво получить на \mathbf{R}^4 точки, промежуточные между этими двумя типами. Такие переходные точки мы будем называть параболическими омбликами. Пусть

$$V(x,y) = Q(x,y) + \dots \text{члены порядка, большего трех}$$

представляет собой локальное разложение в ряд Тейлора функции V , где Q - кубическая форма от x, y . Мы докажем, что начало координат это параболическая омблика, показав, что ква-

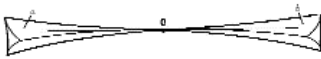


Рис. 5-19. Универсальная развертка эллиптической омблики.

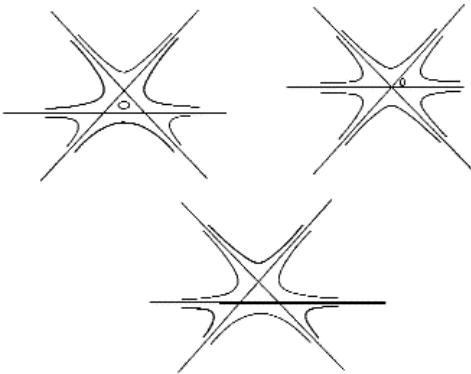


Рис. 5-20. Локальные потенциалы, связанные с положениями a, b на рисунке 5-19.

дратичные формы Q_1, Q_2 имеют общий линейный множитель или показав, что у инволютивной связки $aQ_1 + bQ_2 = 0$ смешаны двойные радиусы. Если этот общий линейный множитель определяется уравнением $x=0$, то можно принять за Q произведение x^2 . Действительно, если

$$Q_1 = xA \quad Q_2 = xB$$

где A, B - линейные множители, то равенство вторых производных $Q_{xy} = Q_{yx}$ дает $x(A_y - B_y) = B_x$, что показывает, что Q_2 имеет вид kx^2 .

Однако следует иметь в виду, что струя третьего порядка $V = x^2 y$, не является детерминантом (в смысле главы 2). Чтобы получить струю-детерминант, необходимо стабилизировать эту струю, добавляя переменные более высокого порядка. Согласно теореме Лю [15], для этого достаточно добавить переменные четвертого порядка. Ограничимся в основном качественным изучением того, что происходит со струей четвертого порядка

$$V(x,y) = x^2 y + \frac{x^2 + y^2}{4}$$

которая соответствует компактной кривой $V=0$. Согласно [15], иной выбор переменных-стабилизаторов ведет к эквивалентной особенности.

1. Изучение этой особенности в плоскости внутренних переменных. Градиент V задается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{\dots} = \frac{dy}{\dots}$$

$$2xy+x^3 \quad x^2+y^3$$

По направлению с угловым коэффициентом m , $y = mx$ предельное положение поля задается уравнением

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+m^3x)}{2mx^2+x^3} = \frac{1}{2m}$$

Помимо вертикали Oy имеется еще два направления $\pm 2/2$, для которых предельное положение поля имеет в точности данное направление. Можно было бы показать, что если дойти до разрыва в начале координат, то соответствующие точки на окружности-прообразе O будут регулярными квадратичными точками индуцированного поля. Это поле проходит через эти точки разграничительных линий, которые обнаруживаются при проекции на плоскость Oxy . Сразу видно, что ветви разделительных линий, расположенные со стороны отрицательных y , являются линиями гребня. Напротив, со стороны положительных y эти ветви ограничивают все открытое подмножество траекторий, направленных к началу координат. Наша особая точка качественно имеет вид седла, но по сравнению с обыкновенным квадратичным седлом имеет интересные особенности:

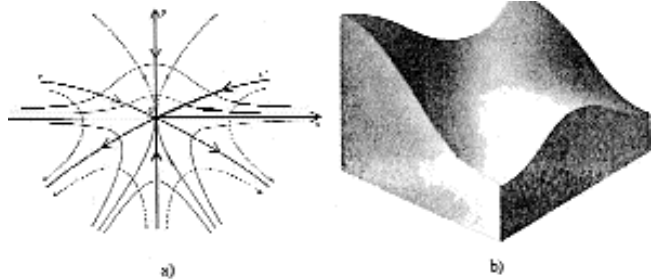
i) Тогда как линия гребня в точке обыкновенного седла регулярна, в нашем случае линия хребта в O имеет угловую точку.

ii) Тогда как для обыкновенного седла две линии *тальягеа*, то есть образующие семейства регулярных кривых, трансверсальных линии хребта - это единственные линии градиента, завершающиеся в седловой точке, здесь мы имеем целый сектор линий градиента (ограниченный кривыми c, c' со стороны положительных y), завершающихся в O . Со стороны отрицательных y имеется единственная линия тальвега - отрицательная полуось Oy . Интуитивно ситуация описывается следующим образом: мы имеем дело с перевалом в горной цепи, траверс которой очень ассиметричен. В направлении убывания y путешественник попадает на перевал по широко раскрытому скату на пологом склоне. Со стороны отрицательных y путешественник попадает на перевал только поднявшись через узкую горловину с крутыми стенками (рис. 5-21).

В этом описании важно следующее: пороговая точка O , которая в классической ситуации имеет нулевую вероятность быть достигнутой, в нашем случае все-таки достигается из любого открытого множества начальных положений. Здесь мы сталкиваемся с первым примером явления *стабилизации порогов*, к которому мы еще вернемся, когда будем говорить о биологическом морфогенезе. Параболическая омбилика также появляется во всех случаях, когда имеется управляемое переливание из верхнего бассейна в нижний, как при вылипании воды из кувшина в миску.

2. Универсальная развертка. Теперь рассмотрим универсальную развертку этой особен-

Рис. 5-21 а) График функций $V+x^2y+(x^4+y^4)/4$; б) изометрическое представление того же графика при $z=-V$.



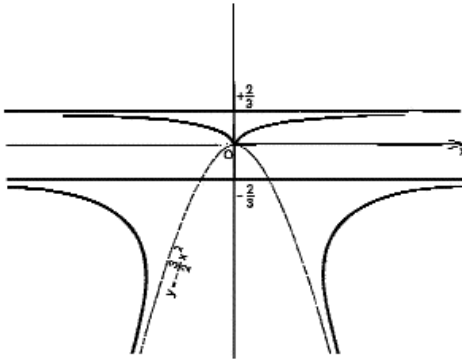
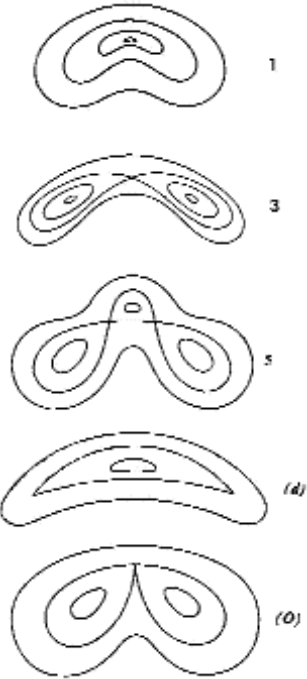
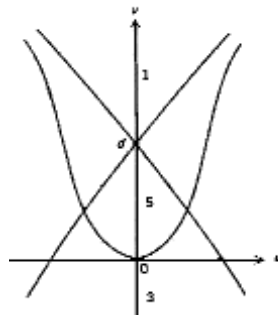


Рис. 5-22.

Рис. 5-23 Изображение 5-22 с локальными потенциалами, соответствующими положениям (1, 3, 5, d, 0) на рис. 5-23.



$$\frac{D(u,v)}{v = x^2 + y^3} = | 2y + 3x^2 \quad 2x |$$

$$D(x,y) \quad | \quad 2x \quad 3y^2 |$$

$$\text{или } 6y^3 - 4x^2 + 9x^2y^2 = 0$$

$$\text{или } x^2(4 - 9y^2) = 6y^3$$

Соответствующая кривая (рис.5-22) состоит из трех дуг, имея в качестве ассимптот прямые $y = 2/3$ и параболу $x^2 = -2/3y$. На плоскости Ouv эта кривая имеет образ типа показанного на

ности. С точностью до топологической эквивалентности она задается уравнением

$$V = x^2y + wy^2 + ty^3 + (x^4 + y^4) - ux - vy \quad 4$$

Для $u = v = w = 0$ мы имеем омбилику, которая является эллиптической при отрицательных t , и гиперболической при положительных t .

В случае $w = t = 0$ для критической кривой получаем

$$u = 2xy + x^3 \quad \text{откуда}$$

рис. 5-22. Инвариантная кривая по симметрии порождает область симметричную по отношению к Ov . Внутри этой области имеется пять критических точек функции V . Их топологический тип показан на рисунке 5-23-5. Топологические типы V , соответствующие отмеченным участкам (3) и (1) показаны на рисунках 5-23-3 и 5-23-1.

Варьируя параметр t , мы получаем рис. 5-24 и 5-25, которые дают универсальные развертки эллиптической и гиперболической омбилик. Варьируя параметр w , мы получаем деформации 5-24b и 5-25b рисунков 5-24 и 5-25. Обратите внимание на маленькую гипоциклоиду с тремя возвратами, характерными для эллиптической омбилики. Все эти изображения полезны при изучении морфологии прибой (см. фотографии XV и XVI).

5.5.МОРФОЛОГИЯ ПРИБОЯ

...Я видел: в горький ветер врывались темные фигуры
 Поль Валери. Потерянное вино

В \mathbf{R}^3 имеется два устойчивых типа прибой: гиперболический, который проявляется, когда гребень волны становится угловатым, а затем острым (типа *острия*), как у обрушивающейся волны. Эллиптический прибой проявляется в виде острых струй и колючек (обычно треугольных в сечении). Обыкновенно переход происходит в направлении эллиптический \Rightarrow гиперболический. В гидродинамике когда окончание струи приближается (в универсальном пространстве u, v, w, t) к параболической ситуации $t=0$, режим струи немного не доходя до $t=0$ захватывается центральным режимом режима (5) (см. рис.5-26). Сначала на конце струи происходит образование толстой капли. Затем этот центральный режим становится неустойчивым и захватывается каким-либо из устойчивых режимов (3) (см. рис. 5-22). В результате кап-

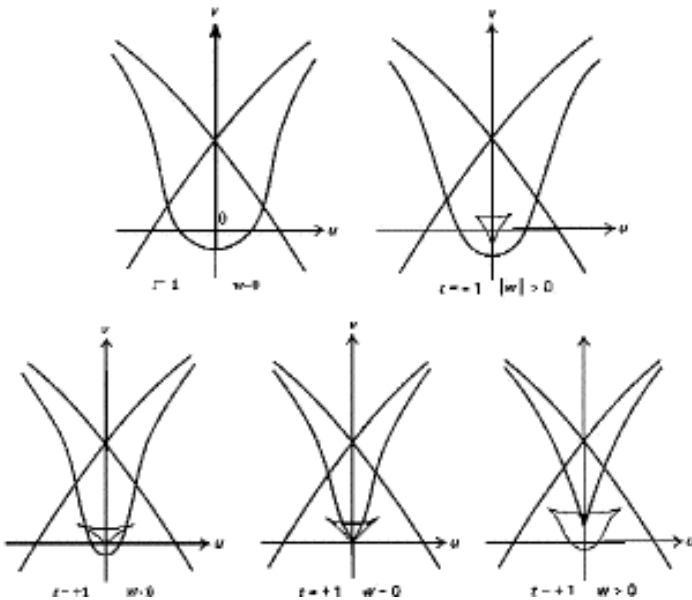


Рис. 5-24. а) универсальная развертка эллиптической омбилики;

б)универсальная развертка омбилики, развернутой по w .

Рис.5-25. а) универсальная развертка гиперболической омбилики;

б)универсальная развертка гиперболической омбилики, развернутой по w .

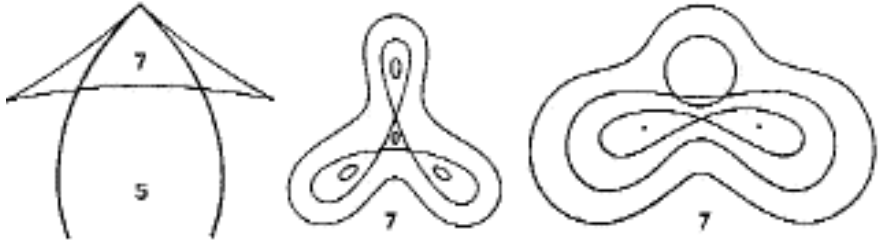


Рис. 5-26. Заметьте, что рис. 5-26 это не что иное, как перевернутый рис. 5-25а.

На рис. 5-25b показан локальный потенциал, связанный с положением 7.

ля разбивается на капельки, каждая из которых подчиняется одному из этих режимов. Кроме того, происходит отрыв от начального режима, еще присутствующего в основании струи, таким образом, что ножка, связывающая каплю с основанием струи, разрывается. В ситуациях подобного типа эволюция происходит слишком стремительно, чтобы допустить переход начального эллиптического режима в гиперболический (типа 7, рис. 5-25). При биологическом морфогенезе эволюция происходит медленнее, и она более строго контролируется. Поэтому в биологическом морфогенезе часто встречается ситуация, когда эллиптический режим сменяется гиперболическим. В этом смысле можно сравнить рис. 5-25 или 5-26 (перевернутый) со срезом гриба. Режим (5) это режим ножки, режим (7) - перепончатая пластинка – образует шляпку. Оконечности в виде острий представляют собой области неустойчивых возвратов, зоны гаметогенеза и спорообразования. Форма среза режима (3) на рис. 5-26 часто наблюдается в эмбриологии. Нервная пластинка и глазные пузыри, возможно, дают иллюстрации перехода эллиптическийгиперболический, за которым следует захват режима (7) более устойчивым режимом (3). К этой проблеме мы вернемся в 9 главе. См. также фотографии XIII – XV, где показаны другие реализации этой особенности.

Тогда как примеры эллиптического возврата в избытке встречаются в биологии (любая поверхность, покрытая ресничками, колючками и т.п.), гиперболический возврат в чистом виде встречается редко. Однако, как представляется, хорошим примером может служить разрушение пластин грибов-навозников [2]. Действительно, при образовании всех несущих поверхностей гамет (пластинчатые поверхности грибов, гонады животных) в начале в общем случае имеется стадия складчатости (образование пластинок, половых канатиков и т.п.), что можно рассматривать как начало гиперболического возврата. Но немного позже гребень складки вместо того чтобы переламываться стабилизируется, и зона возврата оказывается оттесненной назад на боковые стенки пластины, как если бы в конце концов мы снова получили гиперболическую омбилику. Здесь, несомненно, мы имеем дело с явлением стабилизации порога. Наложите друг на друга две гиперболические складки этого типа и вы получите трубчатые перепонки как у белых грибов.

Переход гиперболическийэллиптический более редок, однако тоже встречается. Если, к примеру, гребень волны достигает угла возврата одновременно по всей длине волны, возникает в высшей степени неустойчивая ситуация, ведущая, по терминологии главы 6, к обобщенной катастрофе. Как будет показано ниже, ситуация может стабилизироваться путем образования периодической структуры, нарушающей симметрию. В нашем случае волна, поначалу гиперболическая, ошестинивается эллиптическими колючками, расположенными через равные промежутки на гребне волны. Корона, возникающая при всплеске (упоминаемая д'Арсис Томпсоном) представляет прекрасную иллюстрацию этого явления. Базидии, расположенные

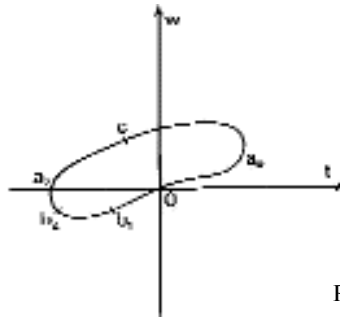


Рис. 5-27 Петля выброса.

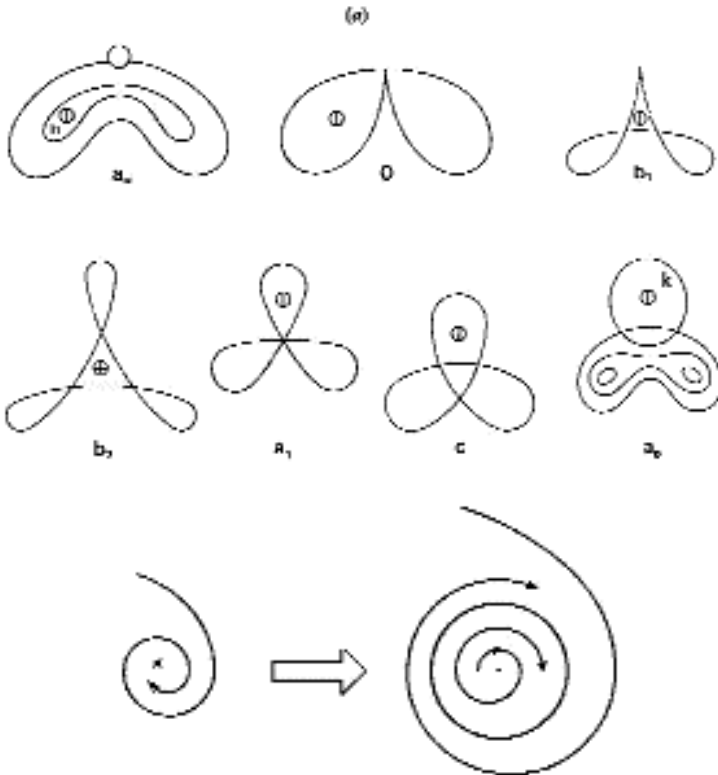


Рис. 5-28. Бифуркация точечного аттрактора в замкнутую траекторию.

на стенках пластинок гриба, равным образом свидетельствуют о частично эллиптической ситуации на первоначально гиперболическом гребне, стабилизировавшемся на вершине (см. Прим. [3]).

Сложный переход гиперболический \Rightarrow эллиптический \Rightarrow гиперболический может описываться при помощи очень интересной петли g на плоскости w, t . Эта петля начинается в точке a_0 , соседней с омбилической гиперболической точкой, при $w > 0$ достигает оси, затем вытывается в параболическую омбилику $w = t = 0$, выходит непосредственно из оси $w = 0$ и достигает окрестности эллиптической омбилической точки ($w < 0, t < 0$). Затем эта кривая снова пересекает ось $w = 0$ в эллиптической омбилике a_1 и возвращается к исходной точке, не попадая в на-

чало координат. Если проследить соответствующую вариацию в пространстве внутренних переменных x, y , то можно попытаться обнаружить петлю в аттракторе (минимуме V) фигуры, соответствующем любой точке петли. Это можно сделать способом, показанным на этом рисунке. Видно, что общий эффект петли заключается в трансформации режима h в начальной точке d в центральный режим k . Общий эффект петли это *провоцирование* (в смысле Уоддингтона) нового режима. Если придать переменным x, y пространственное значение, нельзя не заметить фаллический вид множества процесса выброса. (Обратная петля очевидным образом дает захвата).

Из этого примера можно сделать два вывода:

а) Один вывод касается механизма эмбриологической индукции, провоцирования нового режима. Когда динамическая система находится в критическом состоянии, в окрестности которого многие устойчивые режимы совпадают и конкурируют, колебания системы в универсальной развертке особенности способствуют появлению того или иного нового режима (согласно направлению плоскости колебаний). Можно предположить, что в биохимии вещество, провоцирующее реакцию, действует так же. Реакции каталитического характера, в которых оно участвует, имеют скоротечный характер, однако эти реакции определяют колебания в пространстве биохимических параметров, которые обеспечивают разворачивание особенности метаболизма.

б) В приведенном выше примере петли g внутренние параметры x, y имеют почти-что пространственный смысл. В этом нужно видеть стабилизацию процессом определенных порогов, которые могут расширить страты бифуркации универсальной развертки. Этот процесс проявляется, видимо, в каждом позднем эпигенезе. Математически стратификация двойственная к стратификации плоскости Ouv получается в результате почти что полярного преобразования. Отображение $x, y \Rightarrow u, v$ задаваемое через $u = K_x, v = K_y$, очень похоже на такое соответствие. Это завершает классификацию элементарных катастроф в евклидовом четырехмерном пространстве \mathbf{R}^4 в случае, когда динамика-слой является градиентной. Что происходит, если мы имеем дело с более общими динамиками? Все зависит от топологической природы аттрактора, который задает устойчивый режим. Опишем наиболее простые случаи.

5.6. АТТРАКТОРЫ МЕТАБОЛИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Самый простой аттрактор динамической системы M, X после точки это образующая замкнутая траектория. Займемся сначала точкой, поскольку точечный аттрактор векторного поля a в некоторых случаях отличается от минимума потенциала. В такой точке u поле $X(u)$ нулевое и матрица коэффициентов линейных частей составляющих $X(u)$ на локальной карте имеет все свои собственные значения на полуплоскости $R(z) < 0$. Очевидно, что эта ситуация устойчива. Как может исчезнуть такой аттрактор? Устойчивыми могут быть два случая.

1. Собственное значение матрицы якобиана (функции параметра t) обращается в нуль и является единственным. Это происходит, когда аттрактор пересекает неустойчивую точку, и они оба разрушаются при этом столкновении.

2. Действительная часть собственного значения обращается в нуль при $t = 0$, при том что мнимая часть остается ненулевой. В этом случае сопряженное собственное значение претерпевает аналогичную эволюцию. Этот случай является предметом классического исследования Э.Хопфа [13], откуда и пошел термин бифуркация (Abzweigung, т.е. разветвление). С качественной точки зрения это происходит следующим образом: особая точка становится неустойчивой, но на плоскости соответствующих собственных векторов она окружена небольшим инвариантным притягивающим циклом. Все происходит, как если бы точечный аттрактор рас-

тянулся в диск размерности два, а центр диска превратился в точку отгалкивания поля (см. рис 5-28). В итоге всегда возникает устойчивый режим, и соответствующий аттрактор из точки превращается в замкнутую траекторию. Поскольку новый аттрактор оказывается топологически сложнее исходного точечного аттрактора, можно (в неточных выражениях) сказать, что новый режим содержит больше информации, чем исходный (например, период цикла это новый параметр). После изолированной точки самым простым аттрактором является как раз замкнутая притягивающая траектория. Локальное исследование такой траектории осуществляется классическим методом Пуанкаре-Флоке. Траектория разрезается фрагментом трансверсальной гиперповерхности F . Двигаясь вдоль траектории из точки m из F , мы снова пересекаем F в m' . Соответствие $m \Rightarrow m'$ определяет на F локальный диффеоморфизм. Если траектория притягивающая, все собственные значения якобиана по модулю меньше единицы. В этом случае ситуация тоже структурно устойчива. Но при варьировании параметра функции аттрактор может исчезнуть в соответствии с двумя способами, указанными выше. В случае 1 он разрушается в результате столкновения с неустойчивой траекторией. В случае 2, который возникает только если размерность окружающего многообразия больше трех, происходит бифуркация и траектория превращается в замкнутую и неустойчивую сердцевину маленького инвариантного притягивающего тора.

Это был пример инвариантного притягивающего многообразия для поля X на многообразии M . Математическое изучение притягивающих многообразий поля — дело тонкое. Некоторые из таких многообразий, когда они притягивают достаточно интенсивно и когда поле внутри многообразия в большой степени перемешивающее, структурно устойчивы. Другие, напротив, легко вырождаются в многообразия меньшей размерности или замкнутые траектории. Как указывалось в главе 2, топологическая структура структурно устойчивых аттракторов поля X не изучена. Поэтому систематическое изучение преобразований аттракторов при деформации поля в настоящее время недоступно. Однако мне кажется, что это важнейшее геометрическое явление, которое участвует в большом числе морфогенетических процессов, таких как фазовые переходы в физике и явление индукции в эмбриологии. В отсутствие точной теории приходится ограничиться качественной классификацией этих процессов, которые будут описаны в следующей главе под названием «обобщенных катастроф». Можно заметить, что не существует даже классификации устойчивых особенностей семейства замкнутых траекторий с двумя или тремя параметрами. Наконец, в случае консервативных гамильтоновых полей практически неизвестна классификация по типу замкнутых траекторий 14, и почти ничего не известно об их преобразованиях. Не изучено в общем случае даже явление исчезновения центральной замкнутой траектории, несмотря на очевидный интерес к этой проблеме (особенно в гидродинамике).

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] «Это означает, что когда обрушение происходит в окрестности гребня, волна принимает форму клина с углом 120° . Это согласуется с наблюдением за волнами в момент перед обрушением и с теоретическими результатами, полученными Стоксом.» Томпсон *Теоретическая гидродинамика* (Thompson *Theoretical Hydrodynamics*. Macmillan, Londres, 1962, p.414)

[2] «Навозники среди пластинчатых грибов в какой-то мере играют роль «образцов», имея примечательный способ созревания. У большинства экземпляров оно начинается с края и постепенно продвигает вглубь, что достаточно легко наблюдать, поскольку споры очень темные. В то же самое время пластинки обычно претерпевают нечто вроде саморазрушения: после последнего рождения базидий они превращаются в жидкость. В конечном счете от них остаются только черные линии». Анри Романези. *Новый атлас грибов* (Henri Romagnesi *Nouvel Atlas des Champignons*, Bodras, Paris, 1956, t. 1, p.36)

[3] **Тонкая устойчивость эллиптических состояний.** На проективной действительной плоскости однородных координат A, B, C эллиптические квадратичные формы $AX^2 + BXY + CY^2$ имеют мнимые корни. Они соответствуют отрицательному дискриминанту $B^2 - 4AC$. Поэтому они образуют на этой плоскости вогнутое множество в том смысле, что любая проективная прямая содержит гиперболические точки, для которых $B^2 - 4AC > 0$. Если предположить, что точка A, B, C перемещается по законам динамики, соответствующей естественной метрике проективной плоскости, то всякая такая точка после достаточно большого промежутка времени обязательно попадет в гиперболическое состояние. Выше было показано, что эллиптические состояния должны интерпретироваться как состояния напряжения, а гиперболические — как состояния расслабления. Это можно объяснить тем, что состояния напряжения, хотя и безусловно необходимы в жизни, всегда имеют ограниченную продолжительность и сменяются состояниями расслабления. Вечная диалектика эллиптического и гиперболического позволяет вспомнить оппозицию инь-ян из китайской медицины или же пару возбуждение-торможение, столь близкую нейрофизиологам. Мужской пол выражает большую эллиптичность, чем женский уже в силу самой природы пространственного переноса полового акта мужчины. Возможно таким образом можно объяснить — что в общих чертах было проверено Э.Колли вплоть до гомо сапиенс — что мужские особи более волосаты (в обобщенном смысле), чем их спутницы и что биологически они более хрупки.

В этом же круге идей находятся известные соображения Фрейда о половом символизме (особенно в снах): следует, видимо, допустить, что геометрико-динамические формы, представляющие половые процессы, встречаются в столь многих объектах живой и неживой природы потому, что это единственные структурно устойчивые формы в нашем пространстве-времени, способные реализовать столь фундаментальную функцию, как объединение гамет после пространственного перемещения. Можно почти наверняка утверждать, что эти формы предшествовали разделению полов, которое представляет собой не что иное, как генетически закреплённое проявление этих форм. См. сказанное в гл. 9 о половых креодах (см. фотографию XVII).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] О вихревых дорожках в гидродинамике.
Первоисточником является статья: Theodor von Karmann, *Ueber den Mechanismus des Widerstandes den ein bewegter Koerper in einer Flussigkeit erfahrt*, Nachr. Ges. Wiss. Goettingen, 1911-1912.
Краткое изложение см. в: W. Kaufmann, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1960, p.220.
- [2] Marston Morse, *Calculus of Variation in Large*, Colloquium Math. Serie
- [3] J.C. Tougeron, *Ideaux de fonctions differentiables*, Ann. Inst. Fourier, XVIII, 1968, p.177.
- [4] R.Courant, K.O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Publishers, 1948, p.115.
- [5] Riemann, *Ueber die Fortflanzung ebener Lueftwellen von endlicher Schwingungsweite*, Abhandl. Ges. Wiss. Goettingen Math. Physik Klasse, 1860.
- [6] H.Whitney, *Mappings of the plane into the plane*, Ann. Of Math. 2, 62, 1955, p.374-410.
- [7] Об отражении Маха см. [4]
- [8] D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, abridged ed. Cambridge University Press, 1961, fig.38, p.100.
- [9] R.C. Hwa, V.L. Teplitz, *Homology and Feynman Integrals*, W.A. Benjamin, 1966, p.140.
- [10] Courant, Hilbert, *Methods of mathematical Physics, II*, Interscience Publishers, NY, 1961, p.617, fig. 54.
- [11] J.Mather, *Structural stability of differentiable mappings I-VI*, Annals of Math., 87, 1968; 89, 1969; Publ. Math. IHES, 35, 1969, p.127-156, 37, 1970, p.223-248.

[12] О линиях кривизны в окрестности омбилики см. G.Darboux, *Theorie generale des surfaces*, t.IV, note VII и I.R.Porteous, *The normal singularities of a submanifold* (в печати в Journal for Diff. Geometry)

[13] E.Hopf, *Abzweigung einer periodischen Loesung von einer stationaren Loesung eines Differentialsystems*, Berichte Verh. Saechsicher Akad. Wiss. Leipzig, Math. Nat. Klasse 95, n 1,3, 22, 1943.

[14] V.I Arnold, A.Avez, *Problemes ergodiques en Mecanique classique*, Gauthier Villars, Paris, 1967, App. 29, p.192

[15] Y.C. Lu, *Sufficiency of Sets in $J2(2,1)$ via Decomposition*, Invent. Math. 10, 119-127 (1970).

ГЛАВА 6

ОБЩАЯ МОРФОЛОГИЯ

Μεταβαλλον αναπαυεσται
Огонь покоится, изменяясь¹

Гераклит

6.1. БОЛЬШИЕ ТИПЫ ФОРМ И ИХ ИЗМЕНЕНИЯ

А. Статические и метаболические формы

Различие между статическими и метаболическими моделями, проведенное в главе 4, подтверждаются следующими соображениями.

Определение. Если задана статическая (соответственно, метаболическая) модель локальных динамик, управляющих открытым множеством W пространства, то мы называем *статической* (и соответственно, *метаболической*) *формой* множество точек x из W , управляемых аттрактором поля. Для статической модели (динамики градиентов) этот аттрактор s является точечным в многообразии M внутренних состояний.

Статическая форма имеет следующие свойства: ее граница в общем случае геометрически проста, локально полиэдральна, относительно жестка и нечувствительна к возмущениям. Если статическую форму подвергнуть взаимодействию с внешней системой, то форма поначалу будет оставаться изоморфной самой себе вследствие структурной устойчивости. Если увеличивать интенсивность возмущения, то в конце концов произойдет столкновение аттрактора s с неустойчивым режимом и захват аттрактором более низкого потенциала, по крайней мере в районе максимума интенсивности возмущения или в окрестности границы, где аттрактор s неизбежно более хрупок. Этот процесс превращается в обычную катастрофу или конечную последовательность таких катастроф. Как мы видели на примерах предыдущей главы, соответствующие аттракторы связаны между собой отношениями соседства и преемственности, задаваемыми топологией динамики-слоя. Конечная ситуация может быть очень сложной топологически, но она всегда содержит только статические формы.

Напротив, метаболическая форма обладает следующими свойствами. Ее граница может быть топологически очень сложной. Она в принципе очень чувствительна к возмущениям и очень подвержена флуктуациям. Если подвергнуть метаболическую форму очень слабому возмущению, то она будет сопротивляться, демонстрируя структурную устойчивость, однако ее топология может измениться. Но если возмущение достигнет точки блокировки соответству-

¹Фр. 84 ДК Перевод Лебедева (цит. соч.): *Все, сменяясь, отдыхает.* - Прим. ред.

ющего метаболизма, то есть разрушения рекуррентности динамики-слоя, то возникнет новое грубое явление. Форма почти мгновенно разлагается на континуум элементарных статических или метаболических форм с более простой внутренней структурой, с аттракторами, имеющими меньшую размерность, чем начальный аттрактор c (*катаболическая катастрофа*). Далее мы обсудим различные топологические аспекты этого рода катастроф, которые мы будем называть *обобщенными*.

Кроме того, следует заметить, что метаболической форме присущи свойства внутренней кинетики, связанные с динамикой ее аттрактора, например, собственные периоды. Из этого факта следует, что можно войти в резонанс с метаболическими формами того же типа. В следующей главе мы проинтерпретируем этот факт в том смысле, что метаболические формы являются *носителями значения*.

Типичный пример статической формы – это твердое тело. Например, камень. Среди метаболических форм можно назвать струю воды, кольцо дыма (это формы, задаваемые только своей кинематикой), пламя и – если отвлечься от их сложной внутренней морфологии – живые существа. Не стоит, впрочем, скрывать, что различие между статическими и метаболическими формами – это идеализация, которую трудно выдержать до конца. Большая часть статических форм всего лишь *псевдостатичны*, в том смысле, что их точечный аттрактор может испытывать колебания, которые делают форму метаболической. Если верить в гераклитово $\rho\alpha\pi\tau\alpha\ \eta\epsilon\iota$ (все течет), то любая форма метаболична при рассмотрении фундаментальных явлений, обеспечивающих устойчивость, в достаточно мелком масштабе. Возможно даже, что превращение материи в энергию тоже можно рассматривать как катастрофу этого типа...

Б. Конкуренция аттракторов гамильтоновой динамики

Пусть на открытой области W пространства задано поле локальных гамильтоновых динамик слоя M, X . Предполагается, что гиперповерхность уровня $H = E$ допускает конечное число зависящих от E странных аттракторов $c_1 \dots c_k$ с мерами Лиувилля, соответственно, m_1, m_2, \dots, m_k . Образум относительные энтропии $S_i = \text{Log} m_i$ и соответствующие температуры $T_i^{-1} = \delta S_i / \delta E$. При наличии универсальной термодинамической связи между аттракторами c_i состояния равновесия может быть достигнуто, только если все фазы X_i , (управляемые аттракторами c_i) имеют одинаковую температуру. Пусть $E_i(T)$ – соответствующие энергии c_i (в предположении, что функции необратимы). Пусть также V_1, V_2, \dots, V_k – фазовые объемы X_1, X_2, \dots, X_k . Тогда

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + \dots + V_k &= \text{общий объем } W \\ E_1 V_1 + E_2 V_2 + \dots + E_k V_k &= E \text{ (общая энергия системы)} \end{aligned}$$

Этих двух уравнений недостаточно для задания V_i и, следовательно, для пространственного распределения фаз X_i . Вероятно, это распределение определяется условием минимума на поверхности контакта. Если A_i определяет поверхность ударной волны, отделяющей X_i от X_j , то следует задать минимум выражения вида

$$\sum k_{ij} A_{ij} = P \quad \text{где } k_{ij} \text{ – положительные скаляры}$$

В подобных случаях топология, свойственная динамике-слою, не играет практически никакой роли. Паттерны, встречающиеся в многочисленных биологических структурах (крылья бабочек, ракушки и т.п.), вероятно, подыниются этому механизму. Они имеют слишком много индивидуальных особенностей, чтобы быть строго заданными как в случае с обычными морфогенетическими полями. Даже при допущении вторичных экстремумов таких как минимум $\sum k_{ij} A_{ij}$ окончательная топологическая и геометрическая конечная конфигурация, вообще говоря, далека от определенности. *Следует допустить неопределенный характер конфигурации равновесия между фазами в термодинамическом равновесии как факт, имеющий общее зна-*

чение. Впрочем, очевидно, что если динамика допускает псевдогруппу эквивалентностей G , то эта же псевдогруппа G будет действовать в конфигурационном пространстве равновесия, что даст весь континуум решений.

Теперь мы опишем частный случай предыдущей задачи, состоящий в появлении новой фазы.

В. Появление новой фазы. Обобщенные катастрофы

Предположим, что при $t < 0$ аттрактор c динамики слоя управляет всей областью D пространства, и что при $t = 0$ под действием изменений внешних или внутренних параметров аттрактор c перестает быть единственным. Траектории, высвобожденные из-под притяжения c , устремляются к другим аттракторам, например, к аттрактору c_1 . В области D появятся, обычно в очень слабой и нерегулярной форме, участки режима c_1 . Эти участки будут соединяться и упрощать свою топологическую структуру вплоть до установления нового режима общего равновесия. Такие явления, которые мы будем называть *обобщенными катастрофами*, происходят при различных условиях как в живой, так и в неживой природе. Их топологический вид может быть весьма разнообразным. Мы дадим им огрубленную качественную характеристику. Важной характеристикой является коразмерность *ядер* новой фазы c_1 . Формально обобщенная катастрофа характеризуется нарушением симметрии или однородности. Когда область, локальная динамика которой является инвариантной относительно псевдогруппы G , перестает существовать, происходит обобщенная катастрофа.

1. Комковая катастрофа. Чтобы описать обобщенную катастрофу в первом приближении можно обратиться к статической модели. Предположим, что при отрицательном t потенциал V на D постоянен. Пусть начиная с $t = 0$ функция перестает быть постоянной и поначалу дает бесконечное число очень мелких случайных колебаний (в биологической динамической системе начало катастрофы может определяться множеством ранее существовавшего роста). Предположим, что минимумы V (аттракторы поля $\text{grad} V$) реализуются в виде зерен новой фазы c_1 . Тогда ранее гомогенная область D при $t = 0$ из-за скоротечности этих зерен становится трудной для наблюдения. При возрастании t функция V будет, вообще говоря, топологически упрощаться. Число неоднородностей функции V будет уменьшаться, соответствующие зерна будут захватываться. К концу катастрофы останется только конечное число комков, локализованных на минимумах V . Такова общая модель катастрофы коагуляции или *комковой* катастрофы. Ее примером может быть конденсация дождя из водяных паров облака (см. фотографию 6-а).

2. Пузырьковая катастрофа. Если новая фаза c_1 термодинамически связана с предшествующей, может возникнуть ситуация, топологически двойственная предыдущей. Новый режим имеет поначалу размерность три и оттесняет прежний режим на поверхность (размерности два). Происходит *пузырьковая* катастрофа, при которой область D превращается во что-то вроде пены. Каждый аттрактор функции $-V$ определяет область размерности три. Эти области ограничены поверхностями предшествующей фазы c с особенностями страт конфликта, о которых идет речь в правиле фаз Гиббса. Когда t возрастает и V упрощается, число пузырьков уменьшается. При этом сами пузырьки увеличиваются за счет разрушения промежуточных перегородок (согласно схеме, предусмотренной для слоев конфликта коразмерности четыре). См. 5Г3.

3. Ламинарные и нитеобразные катастрофы. Может оказаться, что начальная коразмерность новой фазы будет равна одному или двум. В первом случае мы получаем *ламинарную* катастрофу. Область D в начале катастрофы изоборждена большим числом узких лент новой фазы c_1 . Эти ленты, поначалу очень многочисленные и свернутые, могут в конце концов образо-

вывать более простые конфигурации и утолщаться за счет захватов. Если начальная коразмерность новой фазы равна двум, то мы имеем дело с *нитеобразной* катастрофой. В момент $t = 0$ в области D появляется большое число маленьких круглых волокон, которые в конце концов могут объединяться одно с другим путем захвата. В наиболее вероятной динамической модели катастрофы этого типа такой захват осуществляется при помощи перекрещивания двух волокон и ведет к процессу *кроссинговера* в генетике.

Забавно, что фазовые переходы в неживой природы почти всегда, как кажется, относятся к первым двум типам. В биологии, напротив, чаще встречаются переходы других типов (см. фотографии с XVIII по XXI).

4. Катастрофы с пространственным параметром. В рассмотренных моделях обобщенной катастрофы параметру времени была отведена привилегированная роль. Но в этой роли может выступить и пространственная координата. В идеальном случае плоскость $x=0$ управляется аттрактором c . Но при $x > 0$ появляются зерна фазы c_1 , которые по мере роста x уводятся и упрощаются путем захватов. Таким образом, получается топологическая конфигурация из одного или нескольких деревьев, стволы которых соответствуют большим значениям x , а ветви находятся справа от $x=0$. Явления этого типа возникают всегда, когда имеет место распространение новой фазы c_1 . Эта фаза управляется градиентом, которому начальная фаза, вообще говоря, не подчиняется.

Типичный пример такой ситуации — наклонная песчаная поверхность, которую осторожно и равномерно поливают с самого верхнего уровня $x=0$. Образуются ручейки воды, поначалу очень маленькие и многочисленные, которые при $x > 0$ захватываются один другим. Другой пример — электрическая искра, проскакивающая с заостренного электрода на плоский (фотография XXII).

Этот тип катастроф играет важнейшую роль в биологическом морфогенезе. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить древовидные формы растений и системы кровообращения животных.

Г. Суперпозиция катастроф

Может случиться, что в некоторой области одновременно происходят две катастрофы, конкурирующие аттракторы которых независимы или очень слабо связаны. В этом случае может возникнуть сложная морфология. Например, суперпозиция двух ламинарных катастроф с достаточно регулярной периодичностью в результате «*муарового эффекта*», приводит к образованию линейного ряда комковых катастроф, производящего впечатление новой более разреженной ламинарной катастрофы. Суперпозиция ламинарной катастрофы и сопутствующей ей комковой катастрофы приводит к появлению борозд, ориентация которых параллельна во всех комках. Некоторые структуры, встречающиеся в эргастроплазме некоторых клеток (аппарат Гольджи), напоминают этот механизм. Разнообразие конфигураций, которые могут быть получены с помощью суперпозиций, практически беспредельно (см. фотографию XXIV).

Д. Модели обобщенной катастрофы. Изменения фазы

Мы видели, что в метаболической модели с гамильтоновой динамикой каждый аттрактор c был связан с псевдогруппой топологических эквивалентностей динамики $G(c)$, с помощью которой можно записать уравнение в частных производных описывающее эволюцию поля к состоянию равновесия. Следует также заметить, что как видно на примере кристаллических фаз, аттракторы распределяются по непрерывным семействам, приводя в действие на псевдогруппе $G(c)$ полную группу перемещений. Подчеркнем, что фаза аттрактора c_1 может по-

явиться внутри фазы c только если псевдогруппа $G(c_1)$ является псевдоподгруппой $G(c)$. Это утверждение, как кажется, противоречит тому хорошо известному факту, что изменения фаз в принципе обратимы. Фаза c может, конечно, породить фазу c_1 , псевдогруппа $G(c_1)$ которой не содержится в псевдогруппе $G(c)$. Но это требует предварительной катастрофы — распада фазы c . Так при плавлении твердое жидкое вещество появляется сначала на краю твердого кристалла, что неизбежно разрушает его структуру. Пусть S — поверхность, ограничивающая ядро новой фазы c_1 , где $G(c_1)$ содержится в $G(c)$. Пусть к тому же g — локальная подгруппа изотропии, то есть множество $gG(c)$, таких что $gG(c_1) = G(c_1)$. отождествим с g множество элементов из $G(c)$, сохраняющих S . Это простое правило позволяет во многих случаях уточнять коразмерность новой фазы. Например, если две фазы c и c_1 гомогенны, то $G(c)$ и $G(c_1)$ это группы перемещений, а S является сферой. Если g — дискретная подгруппа группы вращений (случай кристалла), то S имеет полиэдральную форму, которая определяется правилом Вульфа. Неправильный характер этой формы несомненно соответствует дендрическому росту кристаллов. Если новая фаза c_1 управляется градиентом (но в остальном гомогенна), то g — это подгруппа вращений, осью которой является этот градиент. В этом случае новая фаза имеет коразмерность два (S — цилиндр).

Е. Формализация обобщенной катастрофы

Построение модели обобщенной катастрофы представляет собой, несомненно, одну из наиболее трудных задач механики. Действительно, ситуация обобщенной катастрофы существенно характеризуется тем фактом, что она феноменологически нарушает *принцип Кюри*, согласно которому любая симметрия причин влечет за собой симметрию следствий. На этом основании можно утверждать, что *обобщенная катастрофа не является формализуемым процессом* (в смысле главы 1), поскольку логическая дедукция удовлетворяет формальному аналогу принципа Кюри: в формальной системе P любой автоморфизм системы посылок расширяется в автоморфизм множества заключений. Значит ли это, что нужно отказаться от конструирования моделей? С моей точки зрения, возможны два направления попыток строить модели обобщенных катастроф.

Первое направление состоит в допущении, что катастрофа в самом начале хорошо определена при помощи заданного *множества-ростка*, т.е. множества точек, в которых появляется новая фаза. С математической точки зрения, если взять модель комковых катастроф, заданных потенциальной функцией $V(x, t)$, то можно связать функцию $V(x, 0)$ с измеримой (но не непрерывной и паталогической) функцией $g(x)$. Эту функцию можно регуляризовать при помощи свертки с ядром $m(x, t)$, область задания которой увеличивается с ростом t ; тогда функции $V_i(x, t) = g \circledast m(x, t)$ начинаясь в исключительно сложной топологической ситуации, будут затем упрощаться. Если x — циклическая координата, то функция V_i стремится к своей гармонике минимальной частоты, что объясняет периодичность на конечной стадии катастрофы. (Прим. [*]).

Более тонкий подход состоит в определении условий, при которых метаболическое поле в результате катастрофы превращается в статическое. Иначе говоря, динамика с рекуррентным аттрактором может вырождаться в градиентную динамику без рекуррентности. Этот вопрос мало изучен топологически, но даже в наиболее простом случае, когда на поверхности векторного поля замкнутая устойчивая траектория разрушается в результате столкновения с неустойчивой траекторией, сопровождается (работы Сотомайора [1]) бесконечным числом обычных катастроф статического характера. Иначе говоря, в функциональном пространстве динамик на M множество полей с рекуррентностью, в общем случае ограничено гиперповерхностью бифуркации H . (В случае векторных полей на поверхности эти катастрофы являются связями

между седловыми точками коразмерности один). Трансверсальное сечение H и K сечением, задаваемым полем, показывает что гиперповерхность начала катастрофы $s^{-1}(H)$ является границей обычных катастроф, которые стремятся к $s^{-1}(H)$, разветвляясь на все более мелкие (см. рис. 6-1). В модели этого типа множество $s^{-1}(K)$, по крайней мере в окрестности гиперповерхности начала катастрофы, структурно неустойчиво. Однако в конце катастрофы от множества $s^{-1}(K)$ можно ожидать определенной структурной устойчивости. Только эта окончательная ситуация представима структурно устойчивым морфогенетическим полем (вообще говоря, статической модели) и на практике может быть объектом предсказания.

Конечное состояние обобщенной катастрофы часто определяется присутствием *поляризующих градиентов*. Например, если одна из фаз плотнее другой, то к концу катастрофы она будет располагаться внутри камеры. Но при отсутствии таких градиентов конечное состояние часто имеет не менее замечательную симметрию (периодичность) загадочного происхождения. Примеры этого явления с избытком обнаруживаются как в живой природе (сомиты, филотаксис, рисунки на перьях), так и в неживой (кольца Лизганга, языки на песке во время отлива, волны, возникающие в прямоугольном желобе, явление Бенара и т.д.) (фотографии XXV, XXVI, XXVII, примечание [1]). Другой пример это периодический эллиптический возврат кривой, разбивающейся гиперболически в диадеме *всплеска* (фото XXV). Предложенное выше объяснение множества—ростка катастрофы совсем не убедительно. Скорее надо допустить, что здесь имеется глубокое явление математической природы, требующее серьезных исследований. В конце концов симметрия существует в природе вопреки своей очевидной неустойчивости только потому, что стабилен порождающий ее процесс (см. примечания [1], [2] и ссылку [3]).

Аналогичная катастрофа имеет место, когда многомерный аттрактор c разлагается на аттракторы меньшей размерности (но не обязательно точечные). В этом случае мы имеем дело с *катаболической* катастрофой. Могут случаться также *анаболические* катастрофы, приводящие к образованию аттракторов большей размерности в данном слое. Возникновение аттрактора большей размерности также требует, вообще говоря, бесконечного числа обычных катастроф. Например, чтобы получить инвариантный тор T^2 , необходимо в каком-то смысле оплести тор замкнутыми притягивающими кривыми все большей и большей длины (непосредственное порождение тора из окружности посредством бифуркации Хопфа в этом случае невозможно). Априори представляется, что приемлемые примеры анаболических катастроф могут встретиться только в биологической динамике (телофаза митоза).

Не исключено, что понятие обобщенной катастрофы представляет интерес даже при отсутствии морфогенеза. Так, возникновение турбулентности в ламинарном потоке может в гидродинамике рассматриваться как катастрофа, поскольку при этом нарушается симметрия. Хотя турбулентное решение может быть дифференцируемым, даже в этом случае качественное описание поля оказывается топологически очень сложным. С этой точки зрения было бы

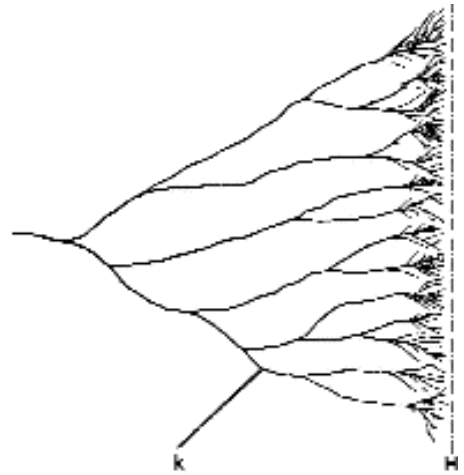


Рис. 6-1. Ветвящаяся структура, связанная с множеством бифуркации обобщенной катастрофы.

интересно изучить вариацию замкнутых центральных траекторий касательного соленоидального поля и его эволюцию к более сложным топологическим состояниям. В этом смысле возникновение турбулентности формально весьма схоже с процессом плавления: оно характеризуется заменой странного аттрактора гамильтоновой динамики типа центральной замкнутой траектории с дискретной псевдогруппой симметрий большим эргодическим множеством с транзитивной псевдогруппой (типа характеризующего газообразную фазу).

6.2. ГЕОМЕТРИЯ СВЯЗИ

Теория бифуркации динамической системы может рассматриваться как теория динамических систем, имеющих точные *первые интегралы*. Если на самом деле динамическая система зависит от параметров, представленных точкой p многообразия P , то можно предположить, что мы имеем дело с глобальной дифференциальной системой (M, X) которая имеет в качестве первого интеграла координатные функции P или же касательные к слоям дифференцируемого расслоения $p: M \Rightarrow P$. В духе этой теории с помощью естественных ослаблений гипотез мы приходим к рассмотрению динамик (M, X) которые допускают глобальные *приближенные первые интегралы*, задаваемые расслоением $p: M \Rightarrow P$. Мы также приходим к понятию *среднего поля*.

А. Средние поля

Рассмотрим сначала динамическую систему (M, X) , которая допускает систему глобальных приближенных первых интегралов, задаваемых расслоением $p: M \Rightarrow P$. То есть поле X в $T^*(M)$ имеет вид $X = X_0 + Y$, где X_0 – вертикальная составляющая, касательная к слою p , а Y – горизонтальная составляющая, которая предполагается малой по сравнению с X_0 . Каждой точке p из P поставим в соответствие аттракторы соответствующей динамики (M, X_0) . Таким образом над \hat{P} задается пространство P' , каждый лист которого ограничен стратами бифуркации, вдоль которых соответствующий аттрактор разрушается катастрофой. Для простоты допустим, что устойчивый режим аттрактора c существует до тех пор, пока представляющая точка p из P не встречает страту S границы листа, соответствующего c в \hat{P} (это сводится к допущению, что преобразование аттракторов происходит с запаздыванием). Более того, поскольку аттрактор $c(X)$ исчезает в точке p из S , его бассейн притяжения, вообще говоря, захватывается другим аттрактором $c_1(X)$. Происходит скачок вдоль S от листка c к листку c_1 . В более сложных ситуациях достижение $c(X)$ может происходить посредством конкуренции между несколькими аттракторами. Мы не будем рассматривать сейчас этот случай. Пусть в точка \hat{p} листка $c(X)$ соответствует среднему горизонтальной составляющей для всех точек $c(X)$ (здесь предполагается, что на $c(X)$ существует эргодическое поле). Мы получаем таким образом на листке c вектор Y' и характеристику этого листка. В конечном итоге на поверхности \hat{P} мы получаем поле векторов Y' , которое называют средним полем динамики (M, X) . Может случиться, что среднее поле Y' само имеет структурно устойчивые аттракторы $c(Y')$, и если взять другие (приближенно) инвариантные параметры, эту конструкцию можно повторить.

Замечание. Здесь не рассматривается математически сложный вопрос об ошибке, которая возникает при замене действительной эволюции системы ее усредненной эволюцией (работы В.И. Арнольда [4] показывают сложность этой проблемы в случае гамильтоновых динамик). Однако следует заметить следующее: динамическая система, состоящая из двух осцилляторов с одинаковым периодом, которые слабо нелинейны и слабо связаны между собой, позволяет измерять энергию периодической осцилляции между двумя осцилляторами. Это феномен *нелинейных биений*. Здесь среднее поле приводит к распределению постоянной энер-

гии между двумя осцилляторами (см. примеч. [2]). Очень грубый характер этой ошибки проявляется уже на качественном уровне, несомненно, доказывая, что здесь среднее поле не является структурно устойчивым. В общем случае ошибка будет определяться отношением горизонтальной составляющей Y и X .

Примеры. Среднее поле, соответствующее элементарной катастрофе

1. *Складка.* Пусть S – гиперповерхность складки, которая ограничивает бассейн аттрактора c , и в результате столкновения с неустойчивым режимом c разрушается на S и захватывается устойчивым аттрактором c_1 . Пусть Y, Y_1 – поля, связанные с c и c_1 соответственно. Если S задана уравнением $z = 0$ и если область существования c это отрицательные z , то мы получим интересную ситуацию, предполагая, что z -составляющая Y положительна, а z -составляющая Y_1 отрицательна. Поле S будет иметь разрыв, превращающий его в отражающую стенку (рис. 6-2). Если Y наоборот ориентировано в сторону уменьшения z , то никакого интересного эффекта не возникнет, поскольку S окажется недостижимым (рис. 6-3).

2. *Сборка.* Обратимся к случаю катастрофы Риманна-Погонио. Внутри возврата, задаваемого уравнением $4u^3 + 27v^2 = 0$, при отрицательных значениях параметров конкурируют два устойчивых режима. Пусть Y_1, Y_2 – соответствующие поля. В начале координат эти два поля совпадают. Для симметрии допустим, что в O поле Y афинно переносится вдоль Ou . Интересным будет случай, когда v -составляющие Y_1 и Y_2 имеют противоположные знаки, что дает зеркальные ветви полукубической параболы $4u^3 + 27v^2 = 0$ (как было показано выше). Принимая теперь во внимание знак u -составляющей, можно получить глобальную конфигурацию воронки (в случае положительной u -составляющей), что обеспечивает возможность попасть в O из любой точки, находящейся внутри сборки. Если напротив u -составляющие Y_1 и Y_2 отрицательны, то мы получаем дисперсный процесс, расходящийся из O (рис. 6-5).

Интересная проблема, связанная со средним полем, заключается в том, чтобы показать, что ситуации схождения в воронку с дискретными поправками имеющие априори целевой ха-

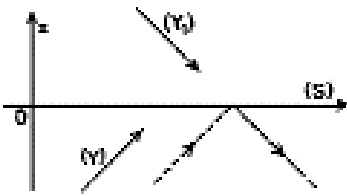


Рис. 6-2.

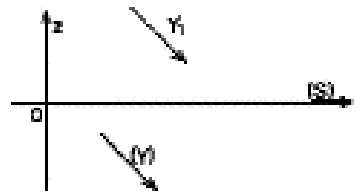


Рис. 6-3.

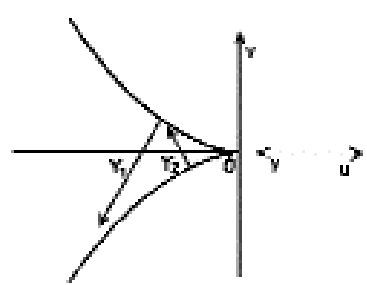
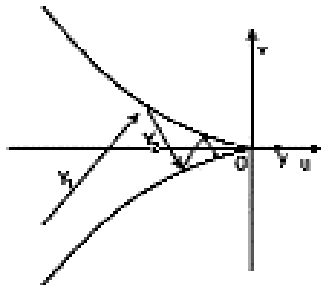


Рис 6-4. Рис. 6-5.

рактир, могут естественно возникать структурно устойчивым образом. Если допустить, что Y имеет слабую v -составляющую в начале координат, единственным эффектом такого возмущения будет более широкое раскрытие отверстия воронки. Это пример явления, названного Уоддингтоном *канализацией с острием* (cusped canalization).[15]

Выше были приведены только самые простые примеры полей, связанных с элементарными катастрофами. Приведем еще пример размерности два. Пусть в окрестности точки O конкурируют три устойчивых режима c_1, c_2, c_3 . Если теперь имеются три прямые складки S_{12}, S_{23}, S_{31} , вдоль которых происходят захваты аттракторов $c_1 \Rightarrow c_2, c_2 \Rightarrow c_3, c_3 \Rightarrow c_1$ соответственно и если средние поля Y_1, Y_2, Y_3 приблизительно постоянны, а направления даны на рис. 6-6, то можно увидеть, что происходит образование инвариантного притягивающего цикла, который оказывается структурно устойчивым (рис.6-6).

Полная топологическая классификация средних полей Y очевидным образом недоступна (эти разрывные поля известны в литературе под названием обрушивающихся систем). Однако априори можно допустить, что естественно возникают только поля Y , связанные со структурно устойчивой особенностью динамики-слоя, которая является организующим центром среднего поля Y , заданного на универсальной развертке этой особенности. С этой точки зрения важно сделать следующее замечание: в определенных ситуациях для подходящих значений горизонтальной составляющей Y (поскольку она не является постоянной на универсальной развертке) система может эволюционировать в направлении аттрактора, который вовсе не содержит начального организующего центра. Все это происходит так, как будто система имеет бесконечные первые интегралы, которые держат ее в удалении от организующего центра.

Пример. Вернемся к сборке и предположим, что u -составляющая U полей Y_1 и Y_2 положительна при $u < u_0$ и отрицательна при $0 > u > u_0$. Ясно, что отрезок прямой $u = u_0$, содержащийся в полукубической параболе, является притягивающим циклом, пробегаемым поочередно в двух направлениях (рис.6-7).

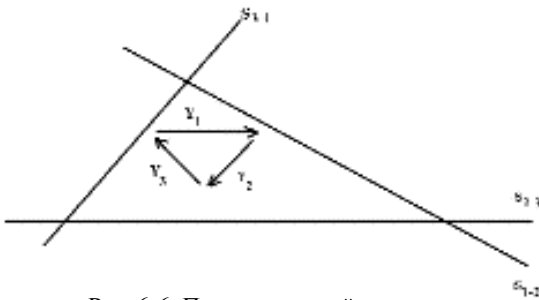


Рис. 6-6. Притягивающий центр, задаваемый разрывным полем.

Если затем область $u > u_0$ при отрицательном U стремится к нулю, притягивающий цикл снова стремится к организующему центру, который может восстановиться.

Б. Средние поля связи

Рассмотрим две динамические системы (M, X) и (P, Y) . Предположим сначала, что $Y = 0$ или по крайней мере мал. Любое взаимодействие между этими двумя системами можно определить как возмущение системы-произведения $(M \times P, X + Y)$. Если $Y = 0$ и если взаимодействие слабо, проекция $M \times P \Rightarrow P$ определяет систему приближенных первых интегралов возмущенной системы произведения. В общем случае над пространством P возникают средние поля Z , вызываемые взаимодействием. Структурно устойчивые аттракторы этих средних полей образуют устойчивые конфигурации взаимодействий на P , которые сопротивляются малым деформациям взаимодействия.

В той мере, в какой эти средние поля связаны со структурно устойчивой особенностью динамики-слоя, эти конфигурации совершенно не зависят от топологической природы дина-

мики (M, X) . Природа этих конфигураций может в весьма широких пределах быть независимой как от (M, X) , так и от взаимодействия.

Абстрактно говоря, можно образовать функциональное пространство всех динамик (M, X) . Это пространство лишено расслоения, которое задает множество бифуркаций H . Любое взаимодействие задает отображение h из P в V и среднее поле в образе $h(P)$. Для всех возможных конфигураций среднего поля, вызываемого взаимодействием существует универсальная модель.

В. Среднее поле, понятия масштаба и кастрофы

Мы видели, что динамика, заданная средним полем в пространстве P приближенных первых интегралов, может иметь структурно устойчивые аттракторы обычного типа (градиент). В этом случае макроскопическое наблюдение за процессом (то есть морфологией среднего поля) не дает возможности восстановить исходную динамику (M, X) , о существовании которой можно только догадываться. Но если средняя динамика демонстрирует явления структурной неустойчивости и в особенности обобщенной катастрофы, то об исходной динамике можно надеяться получить сведения, исследуя эволюцию катастроф. Эта эволюция будет эффективно зависеть от множества-ростка, о котором можно предположить, что он определяется динамикой-слоем (M, X) в начале катастрофы. Известно, что большую роль в научных наблюдениях играет фотография. А что такое фотография, как не *контролируемая химическая катастрофа*, множеством-ростком которой является множество точек ударов фотонов, которые требуется обнаружить? То же самое происходит при обнаружении элементарных частиц с помощью пузырьковых или искровых камер. Аналогичным образом, в эмбриологии многочисленные обобщенные катастрофы развития контролируются тонкой структурой нуклеиновых кислот хромосом. Все это рассуждение еще раз показывает теоретическую и практическую важность обобщенных катастроф, которые являются для нас практически единственным средством изучения бесконечно малого.

6.3. СЕМАНТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Пусть P – естественный процесс, разворачивающийся в открытой области W пространства-времени. Любой анализ процесса начинается со следующей задачи: определить области W , где морфология P структурно устойчива. Предположим, что процесс P структурно стабилен в открытой области $U \subset W$. Напомним, что под этим мы понимаем, что существует универсальная модель $K_1 \subset U_1$, такая что ограничение P на U изоморфно локальному процессу P' , индуцированному в K_1 вложением $j: U \rightarrow U_1$. В этом случае говорят, что P задано на U морфогенетическим полем, или согласно терминологии К.Уоддингтона [5], что P представляет собой *креод* на U .

А. Определение креода

Креод c в пространстве-времени \mathbf{R}^3 определяется:

1. Открытой областью U на гиперплоскости $t = 0$, называемой *областью инициации* c .

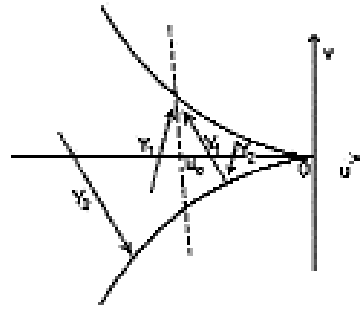


Рис. 6-7 Притягивающий цикл, сечение универсальной развертки сборки.

2. Как и в любом естественном процессе развития, события происходящие в точке пространства-времени x могут осуществляться только как события, расположенные на вершине конуса $C(x)$, называемого конусом будущего (подобно световому конусу в теории относительности). Объединение таких конусов, при котором x пробегает по открытой области инициации U дает открытую область W , называемую зоной влияния креода.

3. Существует открытая область V , содержащееся в W и содержащая U в своей границей, называемая базой креода s и обозначаемая $|s|$. На V существует морфогенетическое поле (статического или метаболического типа), заданное с точностью до изоморфизма. Дополнение $W-V$ образует зону бифуркации или *омбилическую* зону креода. (см. рис. 6-8)

Может случиться, что база V креода распространяется до $t = +\infty$ и что сечение морфогенетического поля, задаваемое на гиперплоскости t , постоянно стремится к фиксированному пределу при t стремящемся к бесконечности. В этом случае говорят, что креод *асимптотичен* (см. рис. 6-9).

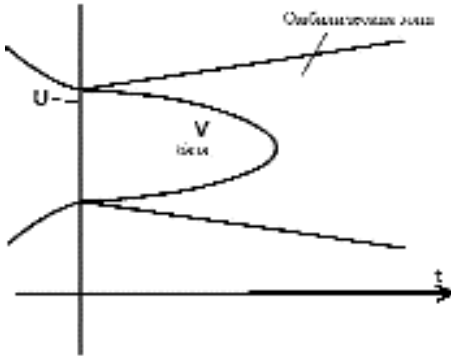


Рис. 6-8. Схема креода.

Замечание. Понятие креода отличается от более общего понятия морфогенетического поля только той особой ролью, которая уделяется времени (и направлению его изменения). Необратимость времени оправдывается следующим фактом: в естественных процессах, в которых участвует диффузия и которые хотя бы частично управляются уравнениями параболического типа, возможности качественной ретроспекции (восстановления прошлого на основании настоящего), несомненно, гораздо более ограничены, чем возможности предсказания.

Б. Подкреод креода

Креод J является подкреодом креода K , если область инициации i , следовательно, база креода J содержатся в базе креода K . Морфогенетическое поле задается базой J путем вложения баз $|J| \Rightarrow |K|$.

Если в базе креода K задана точка x , то существует бесконечно много подкреодов K , база которых содержит точку x . Практически любая достаточно малая окрестность задает такой подкреод.

Поскольку точка x это обычная катастрофическая точка морфогенетического поля, связанного с K , существует фундаментальная система подкреодов, содержащих x , которые все изоморфны. Напомним, что если x это существенная катастрофическая точка поля, такая система не существует.

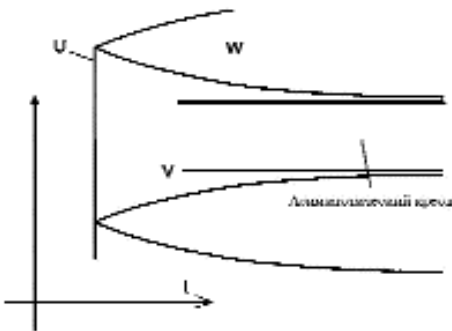


Рис. 6-9. Асимптотический креод.

В. Атлас преемственности креодов

Если открытая область инициации креода g расположена на пересечении омбилических зон креодов k_1, k_2, \dots, k_n , то говорят, что g является наследником k_1, k_2, \dots, k_n . В принципе один и тот же креод может иметь много сис-

тем креодов-предков и наоборот, одна и та же система креодов может породить многочисленные конфигурации потомков. Полное описание семантической модели требует задания всех возможных отношений преемственности между креодами по всем известным правилам, которые позволяют уменьшить неопределенность, присущую этой схеме. С этой точки зрения следует учитывать не только абстрактные отношения преемственности креодов, но и относительные геометрические положения креодов в этой конфигурации. Прежде чем подойти к общей теории таких моделей, полезно показать на примерах большую обобщающую силу этой схемы.

Г. Примеры семантических моделей

1. Диффузия капли чернил в воде.

Вспомним эксперимент Гельмгольца, упоминаемый д'Арси Томпсоном [2]. Падая с высоты нескольких сантиметров, капля чернил погружается в воду. В результате торможения жидкой средой она останавливается и порождает завихрение (соответствующее креоду в виде перевернутого гриба). Потом это завихрение разделяется на три или четыре капельки, каждая из которых после падения порождает свое маленькое завихренище. Здесь креод «перевернутый гриб» наследует сам себя посредством омбилической зоны, которая свидетельствует о большой неустойчивости процесса. При этом даже число капелек, на которые распадается завихрение, очень сильно зависит от начальных условий. На самом деле это наследование является типичным примером обобщенной катастрофы с разложением метаболической формы завихрения в статическую форму капелек.

2. Диаграммы Фейнмана в теории элементарных частиц. В этом случае креоды — это элементарные взаимодействия, символизируемые вершинами диаграммы. Вся внутренняя структура взаимодействия (о которой, впрочем, ничего неизвестно) не принимается во внимание. Отношения преемственности между вершинами задаются ребрами, полностью характеризующимися качественной природой частицы (электрона, фотона...) и ее моментом. В этой теории допускаются любые конфигурации, совместимые с комбинаторными ограничениями, накладываемыми на элементарные взаимодействия. Задача теории состоит в том, чтобы по крайней мере косвенно оценить относительную вероятность каждой конфигурации.

3. В биологии практически любая морфология может рассматриваться как семантическая модель (см. гл. 9 и 10).

4. Поведение животных и человека можно разложить на функциональные поля, играющие роль креодов. В частности, человеческий язык является системой, описываемой семантической моделью размерности один (время), роль креодов в которой играют слова.

5. Этот последний пример в высшей степени значим. Если верно, что, как говорит Кондиллак, «любая наука — это хорошо сделанный язык», то не менее верно и то, что любое естественное явление — это плохо понятый язык. Напомним здесь еще раз Гераклита: «Владыка, оракул которого — в Дельфах, ни говорит, ни скрывает — он обозначает».

Д. Анализ семантической модели

Для анализа этой модели мы будем исходить как раз из частного случая языка. Первый метод это формальный штурм. Полностью игнорируется внутренняя структура каждого креода (здесь — значение любого слова), и описываются только формальные соотношения. Для достоверных выводов касательно формальной структуры отношений преемственности прежде всего необходимо собрать достаточно обширный экспериментальный материал. Следует, как говорят лингвисты, построить «корпус» модели. Отсюда в принципе

можно вывести «грамматику», которая регулирует связь креодов в конфигурациях, представленных в тексте.

Построение корпуса это важнейшая и первоочередная задача экспериментатора. Множество наук, и биология в их числе, практически не вышли из этой стадии. В принципе, в лингвистике можно, благодаря интуитивно воспринимаемому значению слов, прийти к формальной классификации слов, связанной с их грамматическими функциями. Можно также определить формальные условия, при которых фраза будет грамматически правильна, но не обязательно будет что-то обозначать. Задача лингвистов очень тяжела, потому что между устной или письменной структурой слова и его значением практически нет никакой связи. Выборы соответствующих слов для определенных обозначаемых, совершалась в результате длительного исторического процесса, квази-перманентной обобщенной катастрофы. Это, впрочем, отражает коммуникативную функцию естественного человеческого языка, которая накладывает строгие ограничения на структуру выражения (см. в этой связи гл. 13).

В естественных процессах, не связанных с коммуникацией, которые могут быть сведены к языкам только в порядке метафоры (впрочем, полезной метафоры), следует рассчитывать, что внутренняя структура каждого креода относительно прозрачна. В таком языке все слова были бы звукоподражаниями. В действительности хорошо было бы постулировать, что априори в таком креоде нет ничего, кроме того, что можно обнаружить феноменологически, т.е. кроме множества его катастрофических точек, и действовать в рамках наиболее экономичного (conservative, как говорят по-английски) динамического анализа этого креода. В этом свете *значение* креода — это не что иное, как топологическая структура его катастроф, и, по возможности, динамический анализ, ведущий к определению организующего центра креода.

Е. Динамический анализ креодов статической модели

Здесь мы ограничимся креодами, связанными с полями градиентных динамик, потому что только их можно рассматривать математически. Метаболические модели через катаболические катастрофы ведут к обобщенным катастрофам, о которых мы пока еще ничего не знаем. В обычном пространстве-времени все креоды, связанные с этой моделью, уже описаны. Что можно сказать об их связях? Некоторые из них встречаются чаще, чем другие. Важный класс таких конфигураций определяется организующими центрами более высокой коразмерности, чем коразмерность пространства-времени. Предположим, к примеру, что мы берем струю z определяющей функции, но коразмерности, например, пять. Универсальная развертка особенности, задаваемой этой струей, имеет размерность пять, а условие Максвелла определяет универсальное множество катастроф K . Пространство \mathbf{R}^4 , трансверсальное K в окрестности начала координат, дает конфигурацию креодов структурно устойчивых относительно малых деформаций глобальной эволюции процесса. В этом случае о струе z удобно говорить как об организующем центре конфигурации. Локально устойчивые конфигурации креодов (то есть грамматика процесса) полностью содержатся в топологии множества бифуркации функционального пространства потенциалов. Деформация погружения \mathbf{R}^4 в универсальную развертку, достигая, к примеру, исходной точки z , приводит к модификации устойчивой конфигурации креодов. Таким образом, можно говорить о *связанных* или *дуальных* конфигурациях по отношению к организующему центру .

Идея, что последовательность устойчивых трансформаций нашего пространства-времени могут управляться, программироваться организующим центром, то есть некоторой *внешней по отношению к самому пространству-времени* алгебраической структурой, может показаться трудно приемлемой абстракцией. Главное, как всегда, видеть в этом только язык, предназначенный содействовать интуитивному выявлению глобальных координат всех частных систем,

участвующих в этих преобразованиях. Мы приложим эти идеи к биологии (главы 9 и 10) и к естественному языку (глава 13).

ДОПОЛНЕНИЕ

Морфология спиралевидных туманностей

Пусть O — центр тяжести облака газа, сконцентрировавшегося под воздействием гравитации. Предположим, что существенная часть этой массы уже сконцентрирована в окрестности O , образуя ядро. Рассмотрим поле скоростей газа в окрестности ядра, которое в первом приближении мы будем считать точечным.

Пусть J — полный импульс газа. Поле скоростей $V(m)$ в O нулевое. Допустим, что нуль поля V является образующей особенностью векторного поля. Это означает, что матрица M , образованная линейными частями составляющих V , имеет различные собственные значения, действительные части которых отличны от нуля. Поскольку глобальный процесс — это свертка, необходимо, чтобы по крайней мере одно из собственных значений имело отрицательную действительную часть. В то же время в этом облаке представлены только те стационарные состояния, у которых гравитационный потенциал определяется оборотом вокруг оси Oz параллельно J , исходящему из O (см. [6], теорема 3.5). При этих условиях единственная матрица M , совместимая со стационарным состоянием, это та, для которой Oz имеет собственный вектор, а два других собственных значения s, s' определяют вращения в ортогональной плоскости Oxy . Допустим, что наша матрица M является, по крайней мере, вначале, близкой к матрице, связанной с таким стационарным состоянием.

Если это так, то можно допустить, что матрица M изначально свертывается как по Oz , так и по Oxy . Но свертка по Oz , на которую не действует центробежная сила, возникающая в результате вращения, идет с ускорением, так что у собственного вектора, соответствующего Oz , уменьшается собственное значение. Под действием падающей на ядро материи поле на Oxy начинает снова (слабо) расширяться. Поэтому особенность поля V в O является бифуркацией Хопфа. Поле образует вокруг O на Oxy инвариантный притягивающий цикл. Такой цикл, притягивающая траектория поля V , символизирует кольцо, образующееся в диске туманности. Разрыв кольца по экватору ядра приводит к реактивному возобновлению свертывания поля на O . Это выражается в бифуркации, создающей закрытую отталкивающуюся траекторию. Потом новое расширение на Oxy приводит к новому образованию концентрического кольца внутри первого и т.д. Геометрически можно считать, что собственное значение s мнимой положительной частью ωi , где ω — угловая скорость вращения, подвергается вибрации с двух сторон мнимой оси. Но в то же время эти кольца удаляются от ядра, сохраняя свою скорость вращения. Поэтому они придают ядру импульс. Нужно быть готовым к тому, что мнимая часть i числа s уменьшается по ходу этого процесса. Окончательная кривая, описывающая s на комплексной плоскости, будет иметь вид 6-10a) или 6-10b). В случае а) мы имеем предельное состояние, определяемое чистым вращением ($s_0 = i\omega$). Это соответствует случаю обычных спиралевидных туманностей (ядро находится в состоянии относительно медленного вращения его периферии; наша модель не претендует на описание внутренней части ядра, где, возможно, следует ожидать более высоких скоростей вращения). В случае б) собственное значение s в конце концов встречается с действительной осью в O или в окрестности O . При бифуркации два собственных значения s сливаются и становятся действительными. Отрицательное значение γ_1 дает сильно сжимающий собственный вектор. Положительное значение γ_2 дает слабо растягивающий собственный вектор. Материя диска ядра будет таким образом концентрироваться на оси, которая образует нечто вроде рукава, протянутого вдоль диаметра yy' централь-

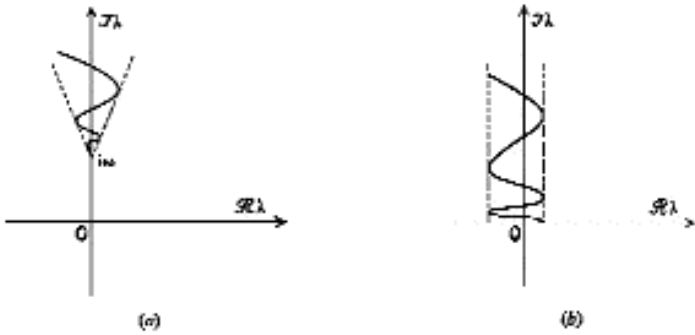


Рис. 6-10.

ного диска. В результате силы гравитации, действующие на периферическое кольцо (находящееся в медленном вращении) захватывают эту полоску материи. Таким образом образуется фигура вида θ , которую часто можно наблюдать в перегороженных спиралях. Вытянутый рукав $\alpha\alpha'$ разбивается и разлетается на звезды (см. рис. 6-11). Затем активные рукава, увлекаемые дифференциальным вращением, выпрямляются, принимая прямолинейную форму, задаваемую полем градиентного типа, которое накладывается на поле вращения.

Спиралевидная структура. Мы видели, что в нашей модели туманности нормальной оказывается структура концентрических колец, а не спиралевидных рукавов. Очень похоже, что более тонкая модель должна принимать во внимание форму ядра и структуру экваториального обрушения. Если сравнить линзообразную форму поздних эллиптических туманностей (стадия E7, пример 4530) с еще более поздним состоянием (как 4594), то невозможно избежать ощущения, что здесь произошло обрушение гиперболического типа вдоль экваториального ребра. Возникающий сегмент остриеобразного сечения оказывается неустойчивым и разбивается на замкнутые кольца или спирали. Как происходит это явление? Можно предположить, что сначала на экваторе появляется пара гиперболических омбилических точек m и m' , каждая из которых, вообще говоря, может перемещаться по экватору, а затем в результате параболического обрушения периодического характера появляется первое периферическое кольцо. Если точка m захватывает точку m' , то может возникнуть замкнутое кольцо. Затем возможно образование на экваторе устойчивой конфигурации, состоящей из точек выброса, например, из двух диаметрально противоположных точек. Каждая из этих точек порождает свободный рукав. Однако можно считать, что речь здесь идет о неустойчивой ситуации, подвер-

женной значительным топологическим изменениям, в ходе которых рукава могут захватывать друг друга и порождать различные разветвленные конфигурации. Предложенная выше модель перегороженных спиралей имеет серьезный недостаток: она требует, чтобы диаметральный рукав был неподвижен. Кажется, что этот рукав можно было бы оживить, заставив его вращаться вокруг центра O . В этом можно было бы усмотреть действие магнитного поля. Аксиальное магнитное поле оказывает на заряженную массу тот же эффект, что и сила Кориолиса, возникающая в результате враще-

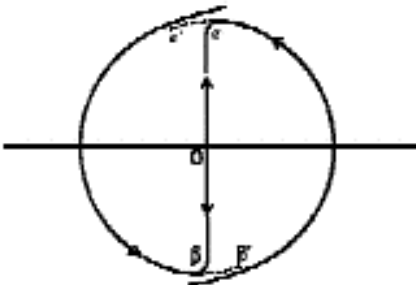


Рис. 6-11.

ния.

Можно также заметить, что движение точек выброса на экваторе центрального диска не обязательно связано с эффективным вращением ядра. Аналогичным образом перемещение (гиперболической омбилической) точки обрушения на гребне разбивающейся волны не связано с сопутствующим перемещением жидкости.

ПРИМЕЧАНИЯ

[*]Этим замечанием я обязан В.И. Арнольду.

[1]. Устойчивость симметрий. Периодическое повторение некоторых обобщенных катастроф может объясняться следующим соображением: конечное решение является плодом конкуренции между комками новой фазы, играющими роль центров-аттракторов для материи новой фазы. Говоря антропоморфно, при борьбе между приблизительно равными по силе и ловкости партнерами высока вероятность того, что локальная серия побед одного партнера над другим будет неустойчива и сопровождаться реваншами. Говоря геометрически, если область аттрактора незаконно распространяется на некоторую точку, она формирует в этой точке зуб, который имеет сравнительно слабый градиентный аттрактор и относительно длинную границу. Эта зона оказывается хрупкой и уязвимой для вражеских атак. Было бы очень интересно предложить геометрическую модель для процессов этого типа. Более подробное рассмотрение этой проблемы см. в [3].

[2]. Это утверждение корректно только если гамильтониан взаимодействия не содержит квадратичного члена. В противном случае — который и встречается на практике — среднее поле эффективно ведет к синусоидально колеблющейся энергии, распределенной между двумя осцилляторами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Sotomayor, *Estabilidad estructural de primeira arden e variedades de Banach*, These I.M.P.A., Rio de Janeiro, 1964. *Generic one-parameter families of vector fields on twodimensional manifolds*, в печати в Topology.
- [2] D'Arcy Thomson, *On Growth and Form*, Cambridge University Press, 1945, p.660, 505, 396.
- [3] H.Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.
- [4] V.I. Arnold, A.Avez, *Problemes ergodique en Mecanique classique*, Gauthier-Villars, Paris 1967, параграф 22.
- [5] C.H. Waddington, *The strategy of the genes*, Allen and Unwin, London, 1957.
- [6] S. Chandrasekhar, *Principles of stellar Dynamics*, Dover, NY, 1942.

ГЛАВА 7

ДИНАМИКА ФОРМ

«Здесь многое вызывает восхищение и потрясение»

Лорд Рейли о кольцах Лизганга

Большая часть идей, высказываемых в этой главе, носят несколько авантюрный характер. Им недостает четких формулировок и строгих математических доказательств. Некоторые читатели согласятся со мной, что интересность или полезность математических или физических идей редко являются синонимом формальной строгости. Другие же должны будут просто подождать несколько лет...

7.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

А. Ограничения классических и квантовых моделей

Механические модели бывают только двух типов: классические и квантовые. Напомним, что классическая модель строится с помощью конфигурационного пространства (дифференцируемого многообразия) M и фазового пространства (пространства ковекторов) $T^*(M)$. Задаётся гамильтониан $H: T(M) \Rightarrow \mathbf{R}$ и динамическое поле X , которое является симплектическим градиентом гамильтониана, т.е. $i(X).a = dH$, где a — это каноническая 2-форма $a = \sum idp_i \wedge dq_i$ на $T^*(M)$.

В квантовой модели состояния системы параметризуются векторами гильбертова пространства, а эволюция вектора состояния задаётся самосопряжённым оператором H (гамильтонианом):

$$\frac{d\psi}{dt} = iH(\psi)$$

Эти две модели имеют одинаковый характер. Они представляют интерес, только когда гамильтониан H (классический или квантовый) достаточно прост, чтобы допустить явные вычисления, или по меньшей мере глобальную качественную оценку динамики. Для каждой из этих двух моделей существует типичный пример, свидетельствующий о ее триумфе. Это ньютоновская механика (с законом притяжения $1/r^2$) в классическом случае и атом водорода (с гамильтонианом $\Delta - 1/r^2$) в квантовом случае. Эти две области науки обеспечили успех соответствующих моделей. Но как только возникает необходимость рассмотреть более сложные ситуации, обе модели сразу же демонстрируют свою неэффективность. Причина этого проста. Если гамильтониан задаётся априорно, интегрирование уравнений движения может оказаться затруднительным или вовсе невозможным. В этой связи стоит вспомнить о проблеме трех тел, которая не поддается никаким усилиям механики, ни классической, ни квантовой. Если же исходят из экспериментальных данных и пытаются сконструировать подходящую модель

(классическую или квантовую), которая их объясняет, проблема, вообще говоря, допускает слишком много решений, и гамильтониан подбирается *ad hoc*. В этом случае он оказывается искусственным и не связанным сущностным образом с конфигурационным пространством. С этой точки зрения было бы неплохо произвести учет всех естественных классических динамик. Это, к примеру, геодезические потоки на таких замечательных многообразиях, как группы Ли, и однородные пространства, снабженные каноническими метриками, допускающими большую группу изотрии. Не кажется случайным, что в некоторых естественных консервативных явлениях эти особые динамики реализуются геометрически предсказуемым образом. Может быть, в этом следует видеть основание для применения групп внутренней симметрии в теории элементарных частиц. Но это возможно только на малом числе пространств с естественной метрикой, которая обеспечивает им большую группу изотрии. Поле отображений естественных классических моделей также очень узко. В квантовом случае ситуация совершенно аналогична.

Б. Детерминизм

К этим ограничениям известных механических моделей добавляется классическая контрверза детерминизма. Обычно считается, что явления макроскопического мира описываются классической механикой и вследствие этого строго детерминистичны, тогда как явления квантовых масштабов в сущности недетерминированы. Это книжное видение вещей, и оно, как мы полагаем, глубоко ошибочно. Я здесь не собираюсь обсуждать вопросы квантового индетерминизма. Хочу только отметить, что аргумент, на котором он базируется — принцип дополнительности или неопределенности — выявляет только приближенный и неадекватный характер точечной модели частиц. Втискивая объект в концептуальные рамки, слишком бедные для его отображения, не приходится удивляться возникающей несовместимости или схожим трудностям. Вернемся в макроскопический мир. Даже если встать на в высшей степени метафизическую и даже теологическую лапласову точку зрения, согласно которой существует универсальная дифференциальная система, параметрирующая состояния Вселенной, нужно признать, что такая модель может допустить экспериментальный контроль только при соблюдении следующих двух условий: А) модель допускает *процедуру локализации*, с помощью которой можно строить локальные модели; Б) построенные таким образом локальные модели структурно устойчивы. Но банальным экспериментальным фактом (см. Введение) является то, что многие явления являются неустойчивыми. Таким образом, очевидно, что никакой экспериментальный критерий не позволяет отличить структурно неустойчивое, но детерминированное явление, от явления неустойчивого в принципе. Вот почему, как только проблема детерминизма переводится из философской плоскости в феноменологическую*, она формулируется в виде утверждения, которое трудно оспорить: *имеются более и менее детерминированные явления*. Более или менее детерминированный характер процесса выражается преимущественно более или менее гладкой (дифференцируемой) непрерывностью этого процесса как функции исходных условий. Я добавлю к этому следующий постулат.

Постулат (ЛС) *Более или менее детерминированный характер процесса определяется локальным состоянием этого процесса.* Для каждого процесса, удовлетворяющего (ЛС), имеется, таким образом, два типа областей: области, где процесс хорошо детерминирован и структурно устойчив, и зоны неустойчивости и недетерминированности. Таким образом, вводятся семантические модели, рассмотренные в предыдущей главе. Области первого типа, вероятные островки детерминизма, будут креодами Уоддингтона. Области неустойчивости это омбилические зоны креодов. Очень часто в этих областях происходят обобщенные катастрофы, которые невозможно формализовать.

Эти модели, превращающие детерминизм и неустойчивость в локальные свойства рассматриваемого процесса, кажутся мало приложимыми к биологии. Будут ли они когда-нибудь приспособлены к квантовым процессам? По крайней мере, на это можно надеяться.

7.2. ИНФОРМАЦИЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ

А. Принятое понятие информации

Эта глава написана под впечатлением от современного состояния молекулярной биологии, где сегодня часто употребляется слово «информация». Постоянно говорят об информации, содержащейся в нуклеиновых кислотах хромосом, о потоке информации, испускаемом ДНК в цитоплазму при посредничестве передатчика РНК и т.д. Биологи подсчитывают в *биотах* количество информации, содержащейся в хромосоме *Escherichia coli*, и сравнивают ее с информацией, содержащейся в геноме человека, неявно постулируя равновероятность всех комбинаций нуклеотидов в цепи ДНК, что трудно проверить теоретически или экспериментально. Даже если такое употребление термина неоправданно, надо тем не менее признать, что слово «информация» вскрывает полезное понятие, имеющее право на существование. Это ставит вопрос научном содержании понятия информации и о его высвобождении из стохастической оболочки, в которую оно до сих пор заключено.

Б. Относительный характер сложности

Центральный тезис этой главы заключается в том, что там, где обычно говорят об информации, следовало бы употреблять слово «форма». Мера информации – как, впрочем, и термодинамические величины энергии и энтропии – должна поддаваться геометрической интерпретации как *топологическая сложность формы*. К несчастью, при современном состоянии топологии сложности формы трудно дать точное определение. Одна из главных трудностей вытекает из следующего факта: если задана динамическая система, параметризованная формой F , сложность F только изредка задается сущностно связанным с F способом. В общем случае F необходимо погрузить в непрерывное семейство G , и определять топологическую сложность F относительно G . С этой точки зрения энергия оказывается сложностью относительно наибольшего непрерывного семейства, в которое можно погрузить систему. Эта сложность сохраняет смысл при любых взаимодействиях системы с внешним миром. Это в каком-то смысле «универсальная форма» сложности, самая бедная с точки зрения информации. Если за семейство G , содержащее форму F , принять более мелкие подсемейства, которые сохраняют более частные особенности формы F , получаются более специальные сложности, которые провозможно рассматривать как разновидности информации. Обратимся и здесь к примеру из биологии. Пластиды растений извлекают из света самую большую сложность, энергию. Сетчатка глаз животных извлекает из светового поля корреляции, формы, иными словами, информацию, часто необходимую для получения пищи, т.е. энергии. Теперь перейдем к более техническим деталям, чтобы определить сложность формы.

В. Топологическая сложность формы

Вернемся к случаю, во многих аспектах типичному, связанному с формой дифференци-

* (здесь) то есть формулируется в терминах экспериментальных наблюдений. - *Прим. ред.*

руемого отображения многообразия X на многообразии Y . Мы видели, что в функциональном пространстве $L(X, Y)$ существует локально замкнутая гиперповерхность с особенностями H , называемая множеством бифуркации, такая что любая связная составляющая $L(X, Y) - H$ задает структурно устойчивую форму отображений X в Y . Пусть f, g — две такие формы. Если — это наше предположение — f может быть непрерывно деформировано в g , то существуют дифференцируемые пути, связывающие f и g . Почти любой путь этого типа пересекает гиперповерхность H трансверсально. Обозначим через $d(f, g)$ минимальное число точек пересечения такого пути со стратами из H коразмерности один. Это позволяет определить на множестве форм расстояние с целым значением, поскольку $d(f, g) = d(g, f)$ (симметричность). Если $d(f, g) = 0$, то f и g имеют одну и ту же форму (рефлексивность). Наконец, выполняется неравенство треугольника: если f, g и k три структурно устойчивых отображения, то

$$d(f, k) \leq d(f, g) + d(g, k)$$

Попытаемся теперь определить форму f_0 , которую можно рассматривать как топологически простейшую. Это будет базовая форма (ground form) нашего семейства форм. Определим сложность некоторой (структурно устойчивой) формы f как целое число $q(f) = d(f_0, f)$. Сложность структурно неустойчивого отображения g можно посредством обобщения определить как верхнюю границу сложностей $d(f_0, g')$, где g' — произвольное структурно устойчивое отображение из окрестности g . С этой точки зрения определение сложности формы основывается в первую очередь на выборе простейшей (базовой) формы. Таким образом этот выбор поднимает проблему, пока еще практически не затронутую в топологии.

Г. Выбор базовой формы

Пусть $m = \dim X$ — размерность многообразия-прообраза, а $n = \dim Y$ — размерность пространства-образа. По крайней мере в одном случае выбор базовой формы не вызывает сомнений. Если $n \geq 2m+1$, то в любом классе гомотопий отображений из X в Y , имеется простейшая форма, а именно погружение X в Y . Любые два таких погружения изотопичны, так что топологический тип погружения является единственным. При $n < 2m+1$, к сожалению, о простейшей форме нельзя сказать ничего определенного, и остается предположить, что она в этом случае уже не будет единственной. Можно только надеяться, что число таких форм будет конечным. При $n \geq m$ в качестве простейших естественно рассматривать отображения без особых точек. Такие отображения являются дифференцируемыми расслоениями (по крайней мере, когда X и Y компактны). Поэтому неизвестно, является ли число расслоений (заданных с точностью до гомеоморфизма) конечным или нет. Априори в этом приходится сомневаться (случай накрывающего отображения окружности в себя $S^1 \rightarrow S^1$, как кажется, достоверно указывает на отрицательный ответ). Можно ли с помощью гомологических или гомотопических критериев уточнить простейшую (или простейшие) форму (или формы)? Я ограничусь здесь постановкой вопроса. Другой очень естественный путь для оценки сложности отображения заключается в принятии во внимание особенностей этого отображения. Если в первом приближении допустить, что сложность замкнутого множества K можно связать с суммой чисел Бетти $\sum b_i(K)$, то можно попытаться определить сложность отображения f как сумму чисел Бетти множества особых значений f . Тогда для дифференцируемой функции $f: V \rightarrow \mathbf{R}$ сложность будет определяться общим числом критических точек этой функции, предполагаемых невырожденными и квадратичными. На таком подходе основаны известные результаты по топологии графиков собственных функций уравнения колеблющихся мембран (или уравнения Шредингера). К сожалению, это все верно только в общем, тогда как на компактном многообразии V имеется бесконечное число различных топологических типов дифференцируемых функций, имеющих минимальное число критических точек, требуемое теорией Морса. У некоторых из

этих функций клетки градиента расположены сложнее и в каком-то смысле более связаны, чем у других. Последние на этом основании можно считать более простыми [1]. Тем не менее, в классических динамических ситуациях, например, в случае уравнения колеблющейся мембраны, кажется, что сложность можно описать непосредственно в терминах особенностей. Наконец, сделаем замечание относительно сложности структурно неустойчивых форм. Отображения, имеющие особенности бесконечной коразмерности, обязательно имеют и бесконечную сложность, поскольку они могут быть локально приближены отображениями произвольно большой сложности. Таким образом, действительная функция $f: \mathbf{R}^1 \Rightarrow \mathbf{R}$ постоянная на открытой области U из \mathbf{R}^1 имеет в каждой точке U особенность бесконечной коразмерности. Поэтому ее сложность тоже бесконечна. Заметим, впрочем, что любая функция f может быть преобразована в тождественный ноль с помощью непрерывной гомотетии, допускающей между любыми функциями f и g путь, имеющий при любом значении параметров только три значения f , 0 и g . Функция 0 также прилегает ко всем стратам структурно устойчивых форм в функциональном пространстве $L(\mathbf{R}^1, \mathbf{R})$.

Д. Сложность в пространстве-произведении

Пусть имеются два функциональных пространства $F = L(X, Y)$, $G = L(A, B)$. Пусть $L(X, A, Y, B) = H$ – пространство отображений произведения из X, A на Y, B . Имеется каноническое инъективное отображение $F \times G$ на H , определяемое как

$$j(f, g)(x, a) = (f(x), g(a)).$$

Если f, g – два структурно устойчивых отображения из F и, соответственно, из G , то отображение-образ $j(f, g)$ будет также структурно устойчивым в пространстве H . В функциональном пространстве H существует целый класс открытых множеств, образуемых произведениями множеств, соответствующих структурно устойчивым отображениям сомножителей. Эти формы, называемые *разложимыми*, характеризуются тем, что если фиксировать одну из координат a или x , то возникающие секущие отображения в Y , и, соответственно, в B будут структурно устойчивыми. Если F и G – конфигурационные пространства двух динамических систем, то говорят, что между этими системами имеется *слабое взаимодействие*, если график отображения $h: (x, a) \Rightarrow (y, b)$ из H является разложимым (т.е. остается структурно устойчивым при разложении). *Сильное взаимодействие* между системами имеет место тогда, когда график h не является разложимой формой.

В пространстве H , как и в любом функциональном пространстве дифференцируемых отображений, имеется подмножество бифуркации K . Это подмножество содержит образ (по j) произведения множеств бифуркации F и G . Пусть заданы множества бифуркаций сомножителей F и G . Зададим в H базовую форму как образ по j произведения базовых форм F и G . Нетрудно видеть, что при этих условиях сложность разложимой формы (f, g) в H меньше суммы сложностей форм сомножителей f и g соответственно в F и G . Действительно, обозначим через f_0, g_0 базовые формы F и G соответственно. Любую разложимую форму H вида (f, g) можно соединить с базовой формой (f_0, g_0) дифференцируемым путем, состоящим из

1. пути, преобразующего заданное отображение h в отображение вида (f, g) (которое не содержит никакого изменения формы; это возможно на основании предположении о том, что h разложимо);

2. пути вида f, g , преобразующего f и g к базовым формам f_0, g_0 и трансверсально пересекающего множества бифуркации F и G в конечном числе точек, равном сумме сложностей $q_f(f) + q_g(g)$. Поскольку в H могут существовать и другие пути, которые связывают h с базовой формой,

$$qh(f, g) = q_r(f) + q_c(g).$$

Таким образом, топологическая сложность ведет себя *субаддитивно* относительно операции топологического произведения двух функциональных пространств. Это свойство – классический аналог неэнтропии или, иначе говоря, информации, связанной с двумя случайными процессами. Впрочем, очевидно, что это свойство будет иметь место и при более общем определении топологической сложности дифференцируемого отображения, чем то, которое было здесь рассмотрено.

7.3. ИНФОРМАЦИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЕ И СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

А. Свободное взаимодействие

Понятие накопления информации или *памяти* с точки зрения общей динамики приводит к курьезному парадоксу. Если M – система хранения информации, то информация, содержащаяся в M , тем или иным способом определяется структурно устойчивыми состояниями, в которых может находиться M . В самом деле, от информации требуется, чтобы она сохранялась в течение времени. Поэтому M должна быть в структурно устойчивом состоянии. Но память полезна, только если она выдает информацию. Поэтому необходимо, чтобы при взаимодействии с воспринимающей системой A система M была способна вызвать большие изменения системы A , не претерпевая возмущений, которые вывели бы ее из структурно устойчивого состояния. Какие ограничения при таком несимметричном поведении должны быть наложены на структуру систем M и A ?

Ясно, что какими бы ни были системы M и A , всегда можно вообразить потенциалы взаимодействия, дающие качественное представление о желаемом поведении. Чтобы минимизировать роль взаимодействия, нужно задавать их сколь возможно слабыми. С этой целью мы вводим понятие *свободного взаимодействия* двух динамических систем. Под этим мы понимаем слабое возмущение в произвольном направлении, начиная с положения, заданного топологическим произведением двух систем (случай нулевого взаимодействия). Если системы M и A – структурно устойчивые статические формы (например, градиентные динамики), нужно также исходить из их топологического произведения. Тогда свободное взаимодействие этих систем не будет иметь никакого качественного эффекта. *Между свободно взаимодействующими статическими формами обмен информацией невозможен.* Однако свободное взаимодействие двух метаболических форм может производить значительный качественный эффект. Как известно, *топологическое произведение двух структурно устойчивых динамических систем в общем случае не является структурно устойчивым.* Так два постоянных поля на окружностях S_1 и S_2 задают на торе $S_1 \times S_2$ параллельное поле, которое не является структурно устойчивым. Если число вращения рационально, то это поле вырождается в структурно устойчивое поле с замкнутыми притягивающими траекториями. Это явление резонанса (когда число вращения иррационально, малое возмущение делает его рациональным). Таким образом, между двумя системами с рекурренцией всегда возникают *резонансы*, устойчивость которых (и качественное общее воздействие на эволюцию системы-произведения) тем больше, чем меньше знаменатель у резонансного отношения (числа вращения). Следовательно между двумя метаболическими формами при свободном взаимодействии всегда происходит *обмен значением*. Случай произведения статической формы на метаболическую еще не изучался с математической точки зрения [2]. Однако кажется, что в этом случае из-за отсутствия резонанса возбуждающее взаимодействие не будет иметь места. Приложим теперь эти рассуждения к нескольким примерам.

Примеры. Для того, чтобы заставить две системы взаимодействовать, в принципе доста-

точно сблизить их в пространстве или же привести их в контакт. Типичный пример статической формы это твердое (кристаллическое) тело (сейчас мы увидим, какие ограничения мы вынуждены будем наложить на это утверждение). Применяя приведенную выше теорему о том, что между статическими формами не возникает свободного взаимодействия, мы замечаем, что между твердыми веществами трудно осуществить химическую реакцию. Как в случае с черным порохом, чтобы начать реакцию необходимо воспользоваться метаболическим посредником, например, огнем.

В другом примере, связанном с твердыми телами, а именно в системе «ключ-замок», столь любимой биохимиками, взаимодействие невозможно, если не предположить, что ключ подвижен (и во всех допустимых положениях является дополнительным к скважине). Если бы ключ нельзя было воткнуть и повернуть, он не был бы для скважины носителем информации. В этом случае мы имеем типичный пример ситуации, в которой (если считать, что ключ и скважина не меняются), вся структура их взаимодействия практически полностью зависит от движущего агента. В данном случае этот тот, кто поворачивает ключ, иначе говоря, потенциал взаимодействия. Чтобы исключить взаимодействие, надо сделать обе системы подвижными.

Рассмотрим теперь в качестве систем кристалл соли NaCl , с одной стороны, и жидкую воду H_2O , с другой. Если привести эти системы в соприкосновение, соль растворится в воде. Если считать воду метаболической формой, имея в виду тепловое движение молекул, то можно допустить взаимодействие с длительным эффектом между водой и предположительно статичным кристаллом. Известно происхождение этого явления. Молекулы NaCl и H_2O ионизируются превращаясь в $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ и $\text{OH}^- \text{H}^+$ и образуют нечто вроде четырехчленного семейства из обратимых реакций $\text{Cl}^- + \text{H}^+ \leftrightarrow \text{ClH}$ и $\text{OH}^- + \text{Na}^+ \leftrightarrow \text{NaOH}$. Здесь мы имеем типичный пример статической системы с *бесконечно малыми осцилляциями*, собственный период которых входит в резонанс с собственными колебаниями системы. Теперь становится понятно, что первая система, став метаболической, может вытягивать энергию из второй и вызывать в ней значительные изменения. Таким образом, можно сказать, что соль это носитель значения для воды. Но это не будет системой памяти, поскольку соль сама разрушается в ходе взаимодействия, которое обратимо только частично (чтобы восстановить кристалл NaCl , нужно выморозить раствор). Форма, которая внешне выглядит как статическая, но относительно легко подвергается бесконечно малым изменениям, называется *псевдостатической*. Этот пример показывает, что псевдостатическая форма может быть носителем значения для метаболической формы.

Другая иллюстрация: система *книга+читатель*. Книга может передавать информацию, только если она освещена. Необходимо посредничество светового поля, которое является метаболической формой. Таким образом, мы рассматриваем два взаимодействия: $\text{книга} \leftrightarrow \text{свет}$ и $\text{свет} \leftrightarrow \text{читатель}$. Это последнее взаимодействие между двумя метаболическими формами в принципе не представляет сложностей (еще и потому что это взаимодействие включает такой специализированный рецептор как глаз). Первое взаимодействие — это электромагнитное взаимодействие электронов и фотонов, которые отражаются от белых участков листа и, напротив, поглощаются там, где что-то напечатано. Сколь бы тонкой ни была природа этого взаимодействия, его можно интерпретировать как предыдущее: система «книга» испытывает очень малые деформации, которые поглощают энергию другой системы, и обладает очень существенными качественными особенностями (в нашем случае — пространственными). Однако эти деформации приводят только к тепловым переносам поглощенной энергии без изменения общего вида напечатанных букв. Поскольку речь идет о статической характеристике, которая не меняется при мелких локальных взаимодействиях, глобальная инвариантность

формы букв сохраняется. Здесь мы имеем наиболее совершенный вид взаимодействия типа память \Leftrightarrow воспринимающая система, где память практически не повреждается при взаимодействии. Всю энергетическую нагрузку взаимодействия несет воспринимающая сторона, которая имеет одновременно и метаболический (рекуррентность), и рассеивающий характер (энергия уходит из источника в бесконечность). Было бы интересно узнать, в какой мере этот вид взаимодействия сохраняется в общем случае. В любом случае представляется необходимым, чтобы рецептор был *открытой системой*, через которую проходит очень разнообразный в качественном отношении поток энергии. Если поместить напечатанную страницу в ящик с полностью отражающими стенками (черное тело), то весьма вероятно, что никакой рецептор не сможет ее читать. Существование светового источника, постоянно испускающего частицы, представляется необходимым.

Фундаментальная биологическая система ДНК \Leftrightarrow метаболизм мелких молекул, как кажется, функционирует аналогично. В определенных условиях (требующих регуляции) поток энергии метаболизма запускает некоторый цикл, который посредством резонанса возбуждает геометрико-химическую деформацию некоторой порции хромосом. Запущенный таким образом цикл извлекает энергию, и его конечные продукты оказывают соответствующее регулирующее воздействие. Более того, здесь имеется регулирующее воздействие целевого характера. Несомненно, это связано с тем, что здесь мы имеем дело с естественной памятью, которая, возможно, создана и во всяком случае поддерживается окружающей динамической системой.

Б. Энтропия формы

Если мы хотим уточнить понятие свободного взаимодействия между двумя динамическими системами математически, есть только один способ это сделать. Надо снабдить функциональное пространство динамик систем-произведений V мерой, которая позволила бы придать смысл понятию *слабого случайного возмущения*. Несмотря на труды многочисленных математиков (Н. Винер, И. Сегал) и объединенные усилия некоторых физиков (например, Фейнмана), пока еще нельзя утверждать, что у нас есть ясная теория интегралов на функциональных пространствах. Во всех случаях такая теория в большой степени зависит от функциональной природы (гильбертовость, банаховость) рассматриваемого пространства V . Что касается меня, то я склонен определять эту меру при помощи следующей процедуры. Функциональное пространство V динамической системы часто представимо в виде индуктивного предела вложенных римановых многообразий $X_1 \subset X_2, \dots, \subset X_n, \dots$, который часто называют *спектром* рассматриваемого функционального пространства. Если задана структурно устойчивая форма F , в каждом X_i берется i -размерная мера $m_i(F)$ открытого множества точек из X_i , которые топологически представляют форму F . Сумма вида $m(F) = \sum m_i(F)/i!$ (где знаменатель $i!$ может быть достаточно произвольным) является общей мерой элементов формы F в V . Такую меру можно назвать энтропией структурно устойчивой формы F (не путать с микроканонической энтропией, формально определенной в главе 3).

Вероятно, существует связь между таким образом определенной энтропией и топологической сложностью формы. Чем сложнее форма F топологически, тем меньше ее энтропия. Интуитивно очевидно, что топологически более сложная форма хуже сопротивляется возмущениям заданной амплитуды, чем менее сложная.

Возвращаясь к типичным случаям постоянного поля на торе T^2 , можно заметить, что резонансы с «малым знаменателем», притягивающий цикл которых погружен в T^2 топологически просто (относительно заданной базы), гораздо более устойчивы, чем резонансы с «большим знаменателем», притягивающий цикл которых погружен в T^2 сложным образом. В этом случае особая роль главных кругов тора проявляется в положении спектра в про-

странстве B векторного поля на T^2 . Этот факт дает основание для того, чтобы определить скалярную меру информации, содержащейся в форме, как ее топологическую сложность, поскольку эта сложность и энтропия изменяются в противоположных направлениях.

Если индекс i спектрального многообразия X пропорционален энергии E , то меру $m(F)$ можно выразить при помощи дифференцируемой функции $g(E)$ и записать $m(F) = \int g(E) dE$. Функция $g(E)$ полностью характеризует термодинамику формы F . Говоря нестрого, термодинамика динамической системы определяется положением спектра X по отношению к множеству бифуркации H .

В теории такого рода нельзя требовать, чтобы интеграл имел все те же свойства, что и в случае конечной размерности. Однако это не так уж важно, поскольку на самом деле достаточно ограничиться рассмотрением только открытых областей особого типа.

В. Конкуренция резонансов

Когда две динамические системы с рекурренцией A и B вступают в свободное взаимодействие, система-произведения $A \times B$ оказывается структурно неустойчивой. Вообще, если C и C' — аттракторы, действующие в A и B в момент взаимодействия, то аттрактор-произведение $C \times C'$ претерпевает катаболическую катастрофу и вырождается в аттрактор K меньшей размерности, содержащийся в произведении $C \times C'$. Именно в этом состоит наиболее общая форма явления, известного в динамике под названием *резонанса*. В общем случае возможны резонансы нескольких типов, между которыми система должна сделать выбор. Такая *конкуренция резонансов* никогда не изучалась математиками, хотя это явление представляется исключительно важным. Априори кажется возможным определить энтропию для каждого резонанса K , которая тем больше, чем топологически проще K погружен в $C \times C'$. В случае локальных динамических полей слоев A и B происходит обобщенная катастрофа. Добавим к тому же, что природа возникающих в начале взаимодействия возмущений играет решающую роль для выбора конечного состояния (примечание [3]). В частности, этот выбор может определяться бесконечно малыми колебаниями некоторых квазистатических форм (см. например, петлю, описанную в 5.5). Процесс такого же рода контролируется хромосомной ДНК в ходе развития организма.

7.4. ЭНЕРГИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СЛОЖНОСТЬ

А. Спектр

Рассмотрим классическую непрерывную динамическую систему, заданную на области D евклидова пространства, например, колеблющуюся струну или мембрану. Конфигурационное пространство такой системы — это функциональное пространство L , например, $L(I, R)$ в случае колеблющейся струны. Известно, что это движение разлагается на сумму гармоник. Рассмотрим множество положений X , соответствующих сумме p первых гармоник движения (p — целое положительное число).

В пространстве L имеется семейство вложенных многообразий конечной размерности $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_p \subset \dots$, составляющее спектр движения. Хорошо известно, что спектр существует в случае линейных самосопряженных систем. Однако весьма вероятно, что существование спектра не связано, как часто думают, с линейным характером дифференциального оператора и конфигурационного пространства. На самом деле спектр возникает в каждой задаче, связанной с вариационным принципом, типа определения экстремума действия (или лагранжиана),

удовлетворяющего подходящим локальным условиям. На функциональном пространстве L (или на гиперповерхности, заданной условием нормировки вроде $\int |\psi|^2 = 1$) имеется функционал A , который при отсутствии внешнего потенциала сводится к полной кривизне графика отображения. Определим критические точки функционала A . Если они квадратичны с конечным числом отрицательных квадратов во второй вариации (обычный случай функционалов, удовлетворяющих условию Лежандра), то можно построить траектории градиента A , заканчивающиеся в этих критических точках. Как и в классической теории Морса таким образом определяется последовательность вложенных клеток, которая задает спектр нашей динамической системы. В ситуации этого рода критическая точка A никогда не является точкой из множества бифуркации K из L . В действительности в окрестности формы f , принадлежащей к множеству K , существуют формы g , сколь угодно близкие к f и относящиеся к различным топологическим типам. Существуют более и менее сложные типы, у которых полная кривизна различна. Например, для кривой $y=g(x)$ перегиб $y = x^3 + 1$ может быть приближен или с помощью $y = x^3 - a^2x + 1$ (кривая с двумя горбами) или с помощью $x^3 + a^2x + 1$ (кривая без горбов). Видно, что первое приближение имеет большую полную кривизну чем второе (можно даже получить первую ненулевую вариацию A , удовлетворяющую условию нормировки $\int |\psi|^2 dx = 1$). *Ненормированные элементы*, т.е. критические точки A , соответствуют структурно устойчивым формам, топологическая сложность которых возрастает вместе с A .

Б. Теория Штурма-Лиувилля в случае многих размерностей

Эта математическая проблема, заключающаяся в наиболее классическом случае в изучении зависимости топологической сложности собственных функций уравнения $\Delta u = Eu$ от собственного уровня E , почти не исследована, не считая случая размерности один (случая колеблющейся струны). Известно, что в последнем случае (теория Штурма-Лиувилля) собственные уровни E характеризуются числом нулей собственной функции, а также общим числом ее критических точек. Для размерности $n \geq 2$ нельзя ожидать столь же простого результата. Например, для уравнения $\Delta u = Eu$ на квадрате $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ уровню $E = 50$ отвечают две собственные функции: $u_1 = \cos 5x \cos 5y$ и $u_2 = \cos 7x \cos y$, у которых общее число критических точек в первом квадранте сильно различается (у одной 25, а у другой 7). Однако совпадения такого рода можно считать случайными поверхностными эффектами, которые асимптотически исчезают при больших объемах. Можно предварительно допустить, что существует положительная возрастающая функция $q=h(E)$, определяемая геометрическими характеристиками системы, которая связывает сложность собственных функций с энергией. Будем считать в дальнейшем, что мы имеем дело со свободной количественной системой на области Ω , волновая функция которой удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$\frac{d\Psi}{dt} = i\Delta\Psi$$

Энергия системы, которая в стационарном состоянии предполагается равной Ψ_α , где $\Delta\Psi_\alpha = E_\alpha\Psi_\alpha$, может быть определена при помощи функции h^{-1} на основании сложности графика Ψ_α . В этом смысле можно сказать, что энергия определяется положением точки Ψ_α в $L(U, C)$ по отношению к множеству бифуркации K функционального пространства $L(U, C)$. Что в этом случае можно сказать об эволюции системы? В случае, стационарного состояния с энергией E_α Ψ_α допускает частоту $\nu_\alpha = E_\alpha/h$. Если взять действительную часть Ψ_α , то видно, что она топологически меняется ν_α раз за единицу времени. Это наводит на мысль принять в качестве среднего значения энергии за промежуток времени T частное от деления на T числа случаев, когда график $\text{Re}\Psi$ (действительная часть Ψ) изменяет свой топологический тип в этот промежуток времени. Естественно, такие изменения формы не являются реальными физическими яв-

лениями. Они существуют в каком-то смысле виртуально и могут быть выявлены только после проекции, т.е. после взаимодействия с другой системой. Подобная интерпретация в любом случае совместима со следующими двумя фактами:

1. Вследствие квантового индетерминизма энергию системы невозможно измерить в заданный момент времени. Чтобы получить среднее значение плотности изменения формы с течением времени, следует наблюдать систему в течение достаточно долгого промежутка времени, который в случае стационарного состояния не может быть меньше периода

$$T_{\alpha} = 1/\nu_{\alpha} = h/E_{\alpha} \quad (\text{где } h \text{ — постоянная Планка})$$

Приближение будет тем лучше, чем больше будет время наблюдения и чем ближе будет система к стационарному состоянию.

2. При слабом взаимодействии двух квантовых систем S_1 и S_2 средняя временная сложность произведения (средняя плотность изменения формы по времени) равна сумме средних сложностей систем-сомножителей. В этом случае энергия объединенной системы равна сумме энергий ее составляющих. Если же взаимодействие между S_1 и S_2 становится сильным, то, вообще говоря, происходит уменьшение пространственной сложности графика произведения и соответствующее уменьшение его средней сложности по времени. Видимая энергия уменьшается, что можно интерпретировать как накопление энергии связи, отвечающей за установление между S_1 и S_2 *связанного состояния*. Если в конце концов (в конце взаимодействия) объединенная система снова развивается в сторону разложимости, эта энергия связи может быть восстановлена.

В. Старение динамической системы и развитие системы к равновесию

Пусть на некоторой области W пространства задано поле локальных динамик, динамика-слой которого имеет аттрактор K , обладающий гамильтоновыми свойствами (как в случае систем Аносова). С этим аттрактором можно связать меру Лиувилля m и, следовательно, энтропию S — функцию энергии E . Свяжем с данным полем два приведенных поля: одно будет задавать локальную энергию $E(x)$, $x \in W$, а другое — локальную энтропию $S(x)$. Локальная энергия $E(x)$ в результате рассеивания будет стремиться выравниваться во всей области; если поле взаимодействует с самим собой термодинамически, то с энтропией $S(x)$ будет происходить то же самое.

Однако равновесие может быть восстановлено, только если функция $S(E)$ такова, что конечное значение полной энтропии $\int S(E_0) dx$ больше начального. Если это условие не выполняется, поле локально изменяет аттрактор — или очень незаметно за счет почти непрерывных переходов, или, напротив, путем резкого скачка к изолированному аттрактору. Тогда в результате обобщенной катастрофы возникает новая фаза. Парадоксальным образом эволюция системы к пространственной однородности может привести к совершенно неоднородной ситуации, а именно к смеси двух фаз.

В случае почти непрерывного скольжения аттрактора, который более детально будет описан в 12-2, можно ожидать, что если система открытая, то кривая $S(E)$ будет иметь максимум среднего значения E_0 . Действительно, в этом случае значительные локальные переносы энергии могут происходить без приближения к равновесию. В случае живых тканей, которые пронизываются непрерывным потоком энергии, это условие, очевидно, выполняется. Эволюция кривой $S(E)$ к кривой с выраженным максимумом в E_0 — это характерная черта *старения* и потери специфичности в эмбриологии.

7.5. ФОРМАЛЬНЫЕ ДИНАМИКИ

Поскольку конфигурационное пространство динамической системы, как и пространство $L(X, Y)$ отображений из многообразия X в многообразие Y , является функциональным пространством, можно задать естественно связанные с данным пространством динамики. Действительно, в L существует подпространство H , которое с ним канонически связано, а именно подмножество бифуркации. На L может существовать динамика, заданная потенциалом V , который является постоянным на дополнении $L-H$ и имеет разрывы (или по крайней мере очень сильные скачки) вдоль слоев коразмерности один из H . Такую динамику, потенциал которой задан топологической формой графика отображения $f: X \Rightarrow Y$, мы будем называть *формальной*. В большинстве известных случаев функция V это монотонно возрастающая функция топологической сложности графика, для которой топологически простейшие формы являются аттракторами. (Это как раз случай линейных динамических систем, таких как колеблющиеся струны и мембраны). Появление формальных динамик представляется специфическим для биологических явлений. Однако существуют по крайней мере намечки формальных динамик и в явлениях неживой природы. Модели, которые мы намерены описать, может быть, позволяют представить, как на основе индифферентных динамик классического типа могут возникать формальные динамики, нагруженные информацией. Таким образом будет частично преодолен тот разрыв между энергией и значением, который с термодинамической точки зрения отделяет мир живого от мира неживого.

А. Происхождение формальных динамик

Вернемся к классической осциллирующей системе такой как, например, колеблющаяся мембрана, или к свободному уравнению Шредингера на области W . Известно, что собственные функции, или собственные формы возникают при рассмотрении на гиперповерхности $|\psi|^2 = 1$ экстремумов функционала $I = \int |\text{grad} \psi|^2 = 1$

Как мы видели в главе 3, геометрически легко установить, что обычная точка множества бифуркации H не может быть экстремумом функционала I . Действительно, начиная с некоторой точки некоторой страты коразмерности один из H , можно двигаться как от одного конца этой страты, так и от другого, или в направлении возрастания топологической сложности, или наоборот, что приведет к первым ненулевым вариациям I . Поэтому собственные формы, образующие спектр рассматриваемой динамической системы, структурно устойчивы. Хотя такая динамика не является формальной в указанном выше смысле, эволюция системы тем не менее стремится избежать множества бифуркации H , и в этом факте можно усмотреть элементарный источник формализации.

Несомненно, наиболее вероятный источник формализации будет найден в определенных типах взаимодействия, типичной моделью которых является процесс *фильтрации*. В исходной схеме задается сеть точек с целыми координатами в \mathbf{R}^3 , заключенными между двумя плоскостями $z = m$. Далее на этом графике наугад строится некоторое количество N ребер длины один. Определим вероятное значение N_0 , такое что при $N > N_0$ соединения ребер лежат между двумя плоскостями. Если допустить, что между двумя плоскостями имеется разность потенциалов и что ребра обладают проводимостью, то как только установится такое соединение, между плоскостями $m = z$ потечет ток, который вызовет в системе скачок энергии. Мы имеем здесь прототип ситуации, при которой энергетическое состояние системы зависит, по сути, от топологических свойств среды (а именно, от контакта электродов). Весьма вероятно существование аналогичных ситуаций, в которых фактором, включающим поток энергии, может быть не контакт, а отличие от нуля гомологической группы при размерности большей едини-

цы, или любое другое топологическое свойство. Так или иначе, этот тип ситуаций можно схематизировать следующим образом. Пусть на открытой области W имеются две взаимодействующие динамики. Первая из этих динамик градиентная. На краю $S = \delta W$ задается потенциал. Этот потенциал локально постоянен на S и порождает внутри W ток, задаваемый векторным полем X . Общий поток этого тока определяет в W долю энергии F , обеспечиваемую этой динамикой, которая является движущей. Вторая динамика по отношению к первой играет роль фильтра. Можно предположить, что она определяется полем гамильтоновых динамик на W , для которого характерна конкуренция между аттракторами c_i . Если аттрактор c управляет областью A из W , c приписывают коэффициент проводимости n . Таким образом, поле X движущей динамики определяется градиентом U , где U – решение на W задачи типа Дирихле, которое определяется экстремумом

$$\delta \int n \text{grad } U = 0 \text{ и } U=V \text{ на краю } S \text{ на } W$$

Более того, имеет смысл постулировать, что движущая динамика взаимодействует с фильтрующей динамикой. В отсутствие более точных гипотез можно допустить, что это взаимодействие приводит к таким состояниям фильтрующей динамики, для которых производство энтропии минимально (согласно принципу Ле Шателье). Имеет также смысл считать, что производство энтропии пропорционально общей кривизне поля X , а выделенными состояниями – те, которые ведут к более прямой циркуляции тока движущей динамики. Это обратное действие движущей динамики на фильтр может привести к его периодической эволюции. Простую модель этого явления демонстрирует винт, который, будучи помещен в жидкий поток, начинает вращаться с угловой скоростью, пропорциональной скорости потока. В биологии можно допустить, что живая материя содержит в основном два типа молекул: крупные (нуклеиновые кислоты, белки) и мелкие или средние (вода, аминокислоты, нуклеотиды). В первом приближении можно допустить, что локальные конфигурации больших молекул играют роль фильтрующей динамики по отношению к кинетической биохимии, в которой участвуют мелкие молекулы и которая играет роль движущей динамики. Действительно, белки обладают ферментативной активностью, которая может заметным образом (в 10 раз) изменять скорость реакции мелких молекул. С этой точки зрения деление живой клетки может рассматриваться как периодический процесс, затрагивающий большие молекулы и вызываемый реакцией движущей динамики, т.е. метаболизмом мелких молекул.

Наконец, реакция на фильтрующей динамике может привести к настоящей пространственной циркуляции участков, управляемых каждым из аттракторов c . Используя антропоморфную терминологию, мы бы сказали, что циркуляция энергии в движущей динамике накладывается на циркуляцию информации, которая ею управляет. Впрочем, ничто не мешает произвести итерацию этой конструкции и подчинить циркуляцию информации новой фильтрующей динамике. В таком случае мы будем иметь информацию второго порядка. Этот механизм мы обсудим более детально в связи с биологической целесообразностью и отношениями между генетической и термодинамической регуляцией. Однако прежде мы покажем возможность некоторых явлений на качественном уровне.

Б. Явления памяти и содействия

Предположим, что фильтрующая динамика гамильтонова типа имеет на интервале энергии $a < E < b$ следующую топологическую конфигурацию: при $E=a$ имеется два изолированных аттрактора, один из которых (c_0) соответствует большой неупорядоченной (газообразной) фазе, а другой (c_1) имеет малую меру Лиувилля и соответствует упорядоченному (кристаллическому) состоянию. Когда энергия E достигает значения b , аттрактор c_1 поглощается аттракто-

ром c_0 , что соответствует плавлению кристаллической фазы.

Предположим, что движущая динамика имеет в подобласти U особенность s , характеризующую очень большим локальным изменением потенциала V , и что фаза c_1 производит в U ферментативный эффект, уменьшающий производство энтропии в окрестности s . Появление в U фазы c_1 весьма вероятно, поскольку вследствие реакции движущей динамики фаза c_1 будет аттрактором в строгом смысле (рис. 7-1). Сначала в U появится небольшой участок фазы c_1 , возбуждаемый энергией E в окрестности b . Затем внешние условия метаболизма среды будут меняться, особенность s движущей динамики исчезнет, c_1 перестанет быть притягивающим, а локальная энергия E уменьшится. Возможно, что локальный участок c_1 устоит, будучи изолированным от большой фазы c_0 . Присутствие этого фрагмента фазы c_1 , ставшего метаболически инертным, предстанет как *воспоминание* о метаболической особенности s . Если позднее в метаболизме (движущей динамике) появятся условия близкие к особенности s , фрагмент фазы c_1 , может сыграть роль ростка и благодаря своему локальному каталитическому действию способствовать возвращению в U особенности s . Если такое возвращение действительно происходит, фаза c_1 вновь становится аттрактором и может расти пространственно. Таким образом, становится понятно, как некоторые метаболические режимы могут быть, так сказать, злокачественными. Если они возникают однажды, в дальнейшем они возникают вновь все чаще и все легче. Фаза c_1 выступает как система *порождающих частиц* этой злокачественной трансформации.

В. Канализация равновесий

В живых динамиках часто встречается еще одно явление. Геометрически его можно описать так: точка устойчивого равновесия системы (характеризуемая, например, квадратичным минимумом потенциала) с течением времени замещается зоной P безразличного равновесия (с постоянным потенциалом V), ограниченной крутым потенциальным барьером. Такой отражающий барьер соответствует включению механизмов регуляции генетического происхождения. С точки зрения структурной устойчивости несомненно, что в таком состоянии устойчивость обеспечена гораздо лучше, чем в случае обычного термодинамического равновесия. Действительно, дифференциальная система может быть структурно устойчивой только по отношению к C^1 -малым возмущениям (и их малым первым производным). Если от системы требуется быть устойчивой просто по отношению к малым непрерывным возмущениям, система обязательно должна иметь разрывы (такие системы, известны в литературе как *обрушивающиеся* (deferlants)). Формирование в ходе эволюции ограниченных участков безразличного равновесия ограниченных потенциальным барьером, представляется результатом взаимодействия между фильтрующей динамикой генетического характера и движущей динамикой (обычным метаболизмом). Предположим, что метаболизм имеет притягивающий цикл z , устойчивость которого обеспечивается механизмами биохимической кинетики. При неизбежных возмущениях случайного характера с относительно слабой амплитудой вся трубчатая окрестность T цикла z будет также описываться этой системой. Внутри T будут возникать деформации фильтрующей динамики, обладающие «усиливающим эффектом», однако этот эффект не будет действовать вне T , что приведет к образованию вокруг T отражающих стенок. Так, если поставить тяжелый шар на песочную поверхность и потрясти систему случайным образом, то вокруг шара образуется сравнительно ровная площадка, ограниченная крутыми стенками (рис. 7-2). Аналогичный механизм (не в смысле физиологической регуляции, а в смысле пространственной локализации) может правдоподобно описывать органогенез в ходе эволюции.

Этот механизм показывает, что с многих точек зрения появление катастроф (разрывов) это цена, которую приходится платить за обеспечение большей устойчивости процесса.

Г. Стабилизация порогов

Одним из наиболее типичных аспектов биологического морфогенеза является *стабилизация порогов*: особенности, которые никогда не должны были бы проявляться структурно устойчивым образом из-за слишком высокой коразмерности, тем не менее проявляются устойчивым образом. Вот приемлемый формальный механизм, объясняющий это явление. Динамика (M, X) проходит через бифуркацию (в смысле Хопфа), результатом которой оказывается рост размерности аттрактора (это то, что называют *выигрышем* или *скрытой катастрофой* в смысле главы 11). Пусть (P, Y) новая динамика-слой, возникающая таким образом на аттракторе c из (M, X) , где P это, к примеру, тор конечной размерности k . На произведении $M \times P$ можно структурно устойчивым образом получить особенности коразмерности $4+k$. Если такая особенность проектируется на точку p из P , то, очевидно, система почти всегда отображается в окрестность точки p . Если, к примеру, координаты P имеют биохимический смысл, это говорит о наличии гомеостатических механизмов, возвращающих систему к p . Можно предпо-

ложить, что такой механизм устанавливается благодаря среднему полю взаимодействия между медленной динамикой (P, Y) и быстрой динамикой (M, X) . Таким образом, следует учитывать не только появление новых циклов реакции (P, Y) , но и их резонансы с исходной динамикой (M, X) .

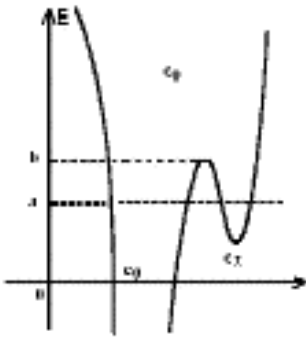


Рис. 7-1

Д. Стабилизация порогов и теория игр

Явление стабилизации порогов напоминает одну классическую теорему в теории игр, а именно *теорему фон Неймана о минимаксе*. Если в области U конкурируют два устойчивых режима a, b , разделенные порогом s , то стабилизация порогов проявляется в том, что почти вся область U эволюционирует к s , и только малая часть области сохраняет необходимую подвижность для колебаний между a и b . Все происходит так, как если бы в любой точке из U два игрока a и b играли друг против друга, причем каждый следовал бы стратегии минимизации потерь. Говоря антропоморфно, *любой конфликт развивается так, чтобы минимизировать причиняемые им страдания*. Нельзя ли с динамической точки зрения рассматривать страдания как *суммарную плотность локальных катастроф*? Тогда можно будет сказать, что развитие направлено в сторону простейших форм наименее богатых катастрофами и поэтому более устойчивых.

Весьма вероятно, что такое развитие случается как в неживой, так и в живой природе. В первом случае [4] оно чаще всего влечет исчезновение порождающего конфликта (как это происходит в случае ударной волны, которая гасится трением). В биологии, напротив, конфликт обусловлен глобальной регуляцией живого существа и периодическим характером его размножения. Конфликт не исчезает, и организм с помощью генетических механизмов наследственности развивается по направлению к более устойчивой ситуации, совместимой с поддержанием конфликта, т.е. с регулирующей функцией.

Е. Другие формальные аспекты взаимодействия. Кодировка

Рассмотрим две гамильтоновы системы, конфигурационные пространства которых это функциональные пространства L_1, L_2 (как в случае колеблющейся струны). Свяжем эти две си-

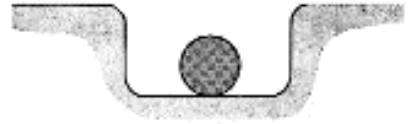


Рис. 7-2.

стемы потенциалом взаимодействия V_{12} . Если этот потенциал имеет разрывы или по крайней мере очень сильно меняется вдоль определенных страт произведения H гиперповерхностей бифуркации H_1 и H_2 из L_1 и L_2 соответственно, то мы имеем дело с формальной связью. Если, к примеру, V_{12} имеет минимум на некоторых связанных составляющих дополнения (L_1 , L_2)- H вида g_1 , g_2 , где

g_1, g_2 — собственные формы, то если L_1 находится в состоянии g_1 , система L_2 с большой вероятностью может оказаться в состоянии g_2 . В этом случае система-произведение играет роль кода, который связывает состояния первой системы с состояниями второй. Для возникновения этого эффекта кодирования отнюдь не обязательно, чтобы потенциал взаимодействия был строго формальным; в общем случае нередко имеются другие выделенные связи. И кодирование всегда происходит с помехами и с большей или меньшей вероятностью ошибки. Приведем простой пример. Пусть L_1 и L_2 это одинаковые осцилляторы, а потенциал взаимодействия является притягивающим и имеет вид $V=k(x_1 - x_2)^2$ (или аналогичный). Тогда V будет минимальным на диагонали L_1 L_2 . Это значит, что когда L_1 находится в собственном состоянии g_1 , L_2 притягивается тем же собственным состоянием. Будет иметь место резонанс и пространственное расширение формы g_1 .

Явление резонанса также объясняет, почему изменение фазы среды сопровождается резкими изменениями свойств этой среды. Действительно, когда мы имеем дело с конденсированной фазой кристаллического типа, корреляции и периодичности этой фазы посредством резонанса действуют на все динамическое поле, связанное с этим пространством. При переходе к хаотическому газообразному состоянию (через плавление) эти эффекты исчезают.

7.6. ФОРМА И ИНФОРМАЦИЯ

Мы привыкли воспринимать любую информацию в виде сообщений, т.е. конечных последовательностей букв некоторого алфавита. Но это только один возможный вид информации. Информация может содержаться в любой геометрической форме. Скалярной мерой количественной информации является топологическая сложность формы носителя информации. Я думаю, что мы привыкли кодировать информацию в виде последовательностей букв только из-за технического удобства передачи такой информации. Самый простой (и возможно, в конечном счете, единственный) способ размножения форм в пространстве основывается на механическом явлении *резонанса*. Если источник S и приемник R — два одинаковых осциллятора, симметрично взаимодействующих друг с другом, то возбуждение в S собственного состояния a приводит R в то же самое состояние a . Можно ожидать, что собственные колебания a в R будут самортизированы для передачи другого собственного состояния b и так далее. Одномерный и ориентированный характер сообщения является отражением одномерности и необратимости времени. Можно однако придумать другой тип распространения информации, который происходил бы при помощи контакта или диффузии. Если привести в контакт поле локальных поляризованных динамик и поле безразличных конкурентных динамик, то поляризация распространится на вторую область и вызовет пространственное расширение собственной формы первой динамики. Однако эта процедура, как представляется, позволяет осуществить только очень ограниченное пространственное расширение. Действительно, когда динамический режим расширяется пространственно, это оказывает воздействие на собственную форму режима, которое изменяет его топологические характеристики (это справедли-

во по крайней мере для динамик, основанных на химической кинетике, как у живых существ). Пространственная диффузия нарушает геометрическую точность собственной формы, что ставит передачу информации под угрозу. Нуклеиновые кислоты со своей линейной структурой являются единственными носителями *генотипа*, по-видимому, потому, что эта статическая форма необходима для пространственного переноса на (относительно) большие расстояния информации, обычно представленной в форме метаболических структур (аттракторов биохимической кинетики), топологическая сложность которых допускает только очень ограниченное пространственное распространение. Так же как при колебаниях маятника энергия переходит из кинетической формы (в самой нижней точке) в потенциальную (в верхних точках) и обратно, так и в периодическом процессе деления клетки сложность колеблется между метаболической формой (в интерфазе) и статической (в метафазе). Однако в последнем случае переход происходит с разрывом, катастрофически. В заключение скажу: не стоит считать, что линейная структура необходима для передачи или хранения информации (точнее, значения). Хотя эта мысль кажется непривычной, вполне возможно, что язык, то есть *семантическая модель*, элементами которой являются топологические формы, не дает серьезных доводов в пользу линейного характера нашей языковой практики. Действительно, топологическое произведение, композиция и т.п. дают гораздо больше комбинаций чем простое соединение двух линейных последовательностей. Мы вернемся к этому вопросу в главе 13.

ДОПОЛНЕНИЕ 1

Инвариантность энергии и первое начало термодинамики. Пусть E — изолированная (не взаимодействующая с внешним миром) динамическая система, динамика которой инвариантна по отношению преобразованиям $t \Rightarrow t_0+t$ и $t \Rightarrow t_0-t$. Средняя (по времени) сложность и пространственная сложность графика системы остаются постоянными. Таким образом, если бы не существовало способа сравнивать между собой сложности не связанных между собой систем, первое начало термодинамики не представляло бы интереса. Заметим, что если две системы не связаны или слабо связаны, сложность объединенной системы равна сумма сложностей ее составляющих. Существуют эмпирически очень важные динамические системы (например, твердые тела), единственная рассматриваемая энергия которых это кинетическая энергия. Для таких систем сложность можно определить как функцию $q = h(E_c)$ кинетической энергии E_c . Пусть теперь S будет динамической системой, и предположим, что в результате взаимодействия с твердым телом B система S переходит из состояния a в состояние b . В момент t_0 мы имеем систему $S+B$ в состоянии слабого (внутреннего) взаимодействия, общая сложность которой равна $q(a) + h(E_c(B), t_0)$. После взаимодействия (которое способно разрушить сильную связь), объединенная система находится в момент $t_1 > t_0$ в состоянии слабого взаимодействия и ее сложность равна $q(b) + h(E_c(B), t_1)$. Приравняв эти два значения, мы получаем:

$$q(b) - q(a) = h(E_c(B), t_1) - h(E_c(B), t_0).$$

Если теперь допустить, что функция h линейна и не зависит от B , то разность $E(B)(t_1) - E(B)(t_0)$ будет зависеть только от a и b , то есть только от состояний системы S . Для определения разности энергий используют действительные числа. Таким образом, кинетическая энергия служит универсальным эталоном изменений внутренней энергии системы. Чтобы использовать первое начало термодинамики, необходимо, чтобы почти каждое взаимодействие между динамической системой и материальным телом оказывалось в конечном счете разложимой (или слабо связанной) формой. Так в классической системе (газ + поршень), столь популярной в термодинамике, следует предполагать, что система не перестает быть разложимой (как

это происходит, например, когда газ химически воздействует на поршень). Эту необыкновенную устойчивость материальных тел необходимо принять как эмпирический факт. Без нее первое начало термодинамики фактически потеряло бы смысл, и скалярная мера энергии стала бы невозможной.

Возвращение двух взаимодействующих систем после сильного взаимодействия к слабому априори кажется совершенно невероятным. В функциональном пространстве типа $L(X, A, Y, B)$ разложимые отображения образуют подпространство бесконечной коразмерности, и вероятность того, что система будет развиваться к такому состоянию, должна априори рассматриваться как нулевая. Однако, как кажется, в квантовой механике допускается, что многие столкновения между частицами (соответствующие данному открытому множеству начальных условий) в конечном счете развиваются к разложенным состояниям. Этот удивительный факт, с моей точки зрения, можно объяснить с помощью обратимого во времени гамильтониана только если предположить, что этот гамильтониан гораздо более жесток и менее чувствителен к внешним возмущениям, чем это обычно допускается. Возможно, что представление сложного состояния с помощью тензорного произведения является избыточным, содержит ненужные параметры. Иначе говоря, инвариантная псевдогруппа гамильтониана может быть намного шире классической группы перестановок, соответствующей принципу неразличимости частиц.

ДОПОЛНЕНИЕ 2

Топологическая сложность динамики. Мы видели, что существуют определенные трудности в определении топологической сложности функции или отображения. Эти трудности становятся еще более значительными, когда пытаются определить топологическую сложность динамической системы на конфигурационном пространстве M . Хорошее определение можно надеяться получить только в двух случаях:

а) Динамика X на M является полем градиентов $X = \text{grad} V$, где V является действительным потенциалом $V: M \Rightarrow \mathbf{R}$. В этом случае естественно определить сложность динамики X как сложность действительной функции V .

б) M – симплектическое многообразие, а X – гамильтонова динамика на M : $X = i\text{grad} H$, где H – действительный гамильтониан, $H: M \Rightarrow \mathbf{R}$. В этом случае каждому значению E первого интеграла H приписывают дискретное множество $J(E)$, точки которого соответствуют *множествам эргодичности* динамики X на гиперповерхности $H=E$. Таким образом, получается пространство \hat{E} на \mathbf{R} , которое можно снабдить топологией (вообще говоря, не сепарабельной), которая по мере исчезновения множеств эргодичности будет показывать, какие множества занимают их место (говоря более строго, эта топология наследуется от пространства-частного M/X при отождествлении траекторий, имеющих одни и те же множества и пределы). Именно сложностью пространства \hat{E} (представляющего собой что-то вроде неотделимого графика) может измерять сложность гамильтоновой динамики H . Во многих случаях на гиперповерхности $H=E$ имеется большая эргодическая составляющая, которая содержит почти все многообразие (что соответствует газообразной фазе) и небольшое число инвариантных множеств малой меры (Лиувилля), сопутствующих замкнутым траекториям типа центра (или более общо, инвариантным многообразиям типа центра). Эти множества в общем случае соответствуют конденсированным фазам (твердой или кристаллической). График \hat{E} и функции $S(E)$ (энтропии, связанные с каждой точкой \hat{E} при заданном значении E) полностью характеризуют термодинамические свойства рассматриваемой динамики (а также свойства соответствующих инвариантных пресвогрупп G).

ДОПОЛНЕНИЕ 2

Бесконечная сложность геометрических форм. Понятию сложности присуща странная двойственность. С наивной точки зрения, постоянная функция, несомненно, кажется простейшей (среди действительных функций). Тем не менее, с нашей точки зрения, она имеет бесконечную сложность, поскольку ее можно сколь угодно точно приблизить функциями, графики которых имеют произвольную топологическую сложность. (Это напоминает знаменитый парадокс квантовой теории поля, согласно которому *плотность энергии вакуума бесконечна*). Причина этого явления такова: из всех форм отображений из X в Y идентифицируем только структурно устойчивые или почти устойчивые формы. Сюда включаются также геометрические формы, для которых возможно прямое определение, как, например, отображение, задаваемое суперпозицией $X \rightarrow Z \rightarrow Y$, где $\dim Z < \dim Y$ и где составляющие отображения являются базовыми для $L(X, Z)$ и $L(Z, Y)$ соответственно. Эти отображения, хотя и вполне корректно определены, имеют бесконечную топологическую сложность и принадлежат стратам множества бифуркации $H \subset L(X, Y)$ бесконечной коразмерности. Они близки к бесформенным формам, описанным в главе 1. В том, что в ходе термодинамического развития в сторону равновесия графики вырожденных полей (в смысле главы 3) в общем случае стремятся к геометрическим, а не к бесформенным формам, проявляется однородность пространства. В общем случае динамика допускает важную группу (или псевдогруппу) симметрии элементарных взаимодействий, которая всегда транзитивна и допускает галилееву или релятивистскую (по выбору) инвариантность. Таким образом мы приходим к следующему очевидному результату:

Принцип симметрии. Если динамическая система S взаимодействует с неизменной окружающей системой T (термостат), и если все взаимодействия и начальные условия инвариантны относительно псевдогруппы G , то конечное состояние равновесия, *если оно единственно*, также инвариантно относительно G .

Поскольку элементарные взаимодействия в общем случае удовлетворяют галилеевой или релятивистской инвариантности, определяющей транзитивную псевдогруппу, состояние равновесия, если оно единственно, обычно постоянно или по крайней мере постоянно на орбитах группы автоморфизмов системы. Это и делает график состояния равновесия в геометрически бесконечно сложным.

Однако в такой ситуации нет никаких причин для того, чтобы термодинамический предел оставался единственным. Например, если охладить сферический баллон наполненный водяным паром ниже температуры насыщения, то при отсутствии какого-либо внешнего градиента (связанного с температурой или с силой притяжения) появление жидкой фазы начнется с конденсации на стенках, однако конечное распределение жидкой и газообразной фаз будет очень неопределенным и заведомо не будет обладать сферической симметрией. В процессах такого рода происходит нарушение симметрии начальных условий. Мы имеем здесь дело с одной из обобщенных катастроф, описанных в главе 7. Может случиться, что когда система S стремится к своему состоянию равновесия, определяемому инвариантным относительно G графиком, режим локальных взаимодействий псевдогруппы G перестает быть устойчивым и уступает место новому режиму псевдогруппы G' . Новая фаза псевдогруппы G' с самого начала создает исключительно топологически сложную ситуацию. Здесь мы также имеем обобщенную катастрофу. Такие колебания между возможными предельными режимами часто наблюдаются в неизолированных системах S (называемых в термодинамике открытыми) и в особенности у живых существ.

Пространство форм функционального пространства. В функциональном пространстве $L(X, Y)$ двум структурно устойчивым формам f и g , ставится в соответствие их относительная

топологическая сложность $d(f,g)$, которую можно рассматривать расстояние на дискретном множестве структурно устойчивых форм. Следовательно, существует метрическое многообразие W , которое содержит это дискретное множество изометрически. Такое многообразие называется пространством форм $L(X, Y)$ и оно играет роль двойственного пространства в теории преобразований Фурье. Если в $L(X, Y)$ протекает случайный динамический процесс, то каждой структурно устойчивой форме f можно поставить в соответствие ее вероятность появления в единицу времени. Таким образом будет задана функция $g: W \Rightarrow \mathbf{R}^+$, такая что $\int_0^1 g = +1$. Энтропия данной системы это количественная величина сложности функции g . Если абстрагироваться от явлений резонанса, описанных выше, все происходит так, как если бы g подобно жидкости стремилось выравниваться на W посредством диффузии. Однако осциллятор собственной формы f стремится с помощью резонансов предпочтительным образом обмениваться энергией с формами, кратными f . Эти кратные формы, вообще говоря удалены от f в W . Поскольку с помощью резонанса можно получить *мгновенный перенос* сложности g из точки f в достаточно удаленную точку f' , поведение g не похоже на непрерывное течение жидкости. Чтобы объяснить это явление, можно попытаться модифицировать топологию W . Но скорее всего построить отделенное пространство таким образом не удастся, тем более что отношение f' кратно f не является симметричным. Я бы не стал заходить так далеко в этих весьма предположительных рассуждениях, если бы со многих точек зрения они не давали бы хорошую модель поведения нервной системы. Возбуждение нервных центров (физиологический стимул), остается узконаправленным вплоть до возникновения вполне определенного двигательного рефлекса. Диффузия оказывается при этом если и не устраненной, то, по крайней мере, строго контролируемой. Известно, что если подавить первоначальный рефлекс, искусственно блокируя движение, то возникнет рефлекс №2; снова блокируя снова этот рефлекс, можно получить рефлекс №3, и так далее. Это позволяет предположить, что имеется эффективная диффузия возбуждения, но как только возбуждение находит выход в рефлексе, оно полностью поглощается при выполнении этого рефлекса. Тут имеется забавная аналогия с таким таинственным явлением как *редукция волнового пакета* в волновой механике.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Это явление проявляется уже у функций с четырьмя критическими точками на произведениях двух сфер $S_1 \times S_2$. Этим замечанием я обязан Д.Эпштейну.

[2] С. Смейл в своей статье «Дифференцируемые динамические системы» (S. Smale, *Differentiable Dynamical Systems*, Bul. Amer. Math. Soc. 73, 6, Nov. 1967, pp. 747-817) приводит пример структурно неустойчивого произведения $A \times B$ двух структурно устойчивых динамических систем, из которых одна является градиентом. Однако представляется, что это явление влияет только на относительное топологическое расположение бассейнов, а не самих аттракторов.

[3] Модели воспроизводства по частям, предложенные Л.С. Пенроузом (L.S. Penrose, *Annals of Human Genetics*, 23, 1, pp. 59-726, 1968) дают иллюстрацию этого явления. Способ вложения двух частей A, B в один комплекс (AB) интерпретируется как вырождение фазового пространства $D(A) \times D(B) \Rightarrow D(AB)$ (где D – евклидова группа), т.е. как катаболическая катастрофа, *резонанс*. Конечное состояние системы кратной изолированным частям A, B зависит в основном от начальных условий, т.е. от первого вложенного комплекса, помещенного в систему.

[4]. Явление стабилизации порогов также наблюдается в геологии. Так, свод юрской антиклинали оседает под воздействием эрозии, порождая изрезанные овраги в более мягком нижележащем материале. Формально это явление очень напоминает удвоение ударного фронта волны при образовании переходного устойчивого режима, описанное в главе 10. Также очень часто пороги и выступы

проламываются подземными водоносными горизонтами, образующимися там постоянно. Обратите также внимание на пруд Шебр к северо-востоку от Лозанны, который стекает и на север к Аару и Рейну, и на юг к озеру Леман и Роне. (рис. 7.3).



Рис. 7-3.

ГЛАВА 8

БИОЛОГИЯ И ТОПОЛОГИЯ

«Овладение пространством — это изначальный жест живых существ, людей и животных, растений и облаков, фундаментальное проявление равновесия и длительности. Первое доказательство существования — это занятие пространства»

Ле Корбюзье

(Цит. по Ф. Ле Лионэ, *Основные течения математической мысли*) (F. Le Lionais, *Les grands courants de la pensee mathematique*)

8.1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТ БИОЛОГИЧЕСКОГО МОРФОГЕНЕЗА

Теория морфогенеза, очевидно, должна быть приложима к биологическому морфогенезу. На самом деле именно изучение трудов по эмбриологии (и особенно, Г.К. Уоддингтона (H.C. Waddington)) привело меня к созданию качественной динамики, представленной в этой работе. Наша задача состоит в том, чтобы придать математический смысл таким эмбриологическим понятиям как *морфогенетическое поле* и *креод* Уоддингтона. Я вполне отдаю себе отчет в том, насколько эти понятия в настоящее время дискредитированы в глазах биологов, поскольку они не дают никакого биохимического объяснения эпигенеза. Однако я считаю, что с эпистемологической точки зрения, чисто геометрический подход к проблеме морфогенеза не только имеет право на существование, но, возможно, и необходим. Утверждение о том, что живое существо представляет собой глобальную структуру, вовсе не является аргументом в пользу витализма: это просто констатация очевидного. Что действительно недопустимо и связано с метафизическим витализмом, так это попытки объяснять локальные явления через глобальные структуры. Чтобы понять каждое частное микроскопическое явление внутри живого существа, биолог должен для начала постулировать существование локального детерминизма, а затем пытаться интегрировать все эти локальные детерминизмы в единую когерентную и устойчивую глобальную структуру. *С этой точки зрения, основная проблема биологии является топологической, поскольку топология это как раз та математическая дисциплина, которая позволяет переходить от локального к глобальному.* Радикализируя этот тезис, можно считать все биологические явления проявлениями некоторой геометрической сущности, которую можно было бы назвать *жизненным полем* (подобно гравитационному или электромагнитному полю). Живые существа будут *частицами* или *структурно устойчивыми особенностями* этого поля. Явления симбиоза, хищничества, паразитизма, полового влечения будут видами взаимодействия или связи между этими частицами. Можно ли объяснить фундаментальную природу этого по-

ля с помощью известных полей неживой материи — это чисто метафизический вопрос. Важно сначала описать это поле геометрически, а затем определить его формальные свойства и законы развития. Со времен Ньютона физика не продвинулась ни на шаг в познании фундаментальной природы гравитационного поля. Тем более нельзя априори требовать от биологов, чтобы они оказались удачливее своих коллег-химиков и физиков и нашли объяснение природы жизненных явлений, при том, что последние в течение столетий отказываются от подобных амбиций при изучении неживой природы.

Конечно, все те модели биологического морфогенеза, которые я собиоаюсь предложить, не обязательно требуют введения гипотетического жизненного поля. Мы будем пользоваться только статическими и метаболическими полями, допускающими формальную интерпретацию в терминах кинетической биохимии, которые я не решаюсь называть жизненными. Мне не позволяет этого сделать ограниченность моих знаний в области биохимии; кроме того, крайняя сложность реакций, участвующих в метаболизме живого организма, делает такое отождествление очень проблематичным. Я защищаю здесь следующую принципиальную точку зрения: устойчивость любого живого организма, как и любой структурно устойчивой формы, основывается в конечном счете на некоторой формальной структуре, т.е. на геометрической сущности, биохимической реализацией которой и является живое существо. Здесь мы пытаемся только выявить эту геометрическую структуру и предложить некоторые модели. В будущем же мы надеемся по возможности уточнить, как эти модели реализуются в биохимической кинетике.

8.2. ФОРМА В БИОЛОГИИ. ПОНЯТИЕ ФЕНОТИПА

А. Пространственная форма

Основное понятие в топологии это гомеоморфизм. Два пространства A и B имеют одинаковую форму, то есть *гомеоморфны*, если существует взаимнооднозначное и в обе стороны непрерывное отображение A на B . Это понятие представляет определенный интерес для биологии. Возьмем двух животных одного вида и пола. Тогда, грубо говоря, существует гомеоморфизм, отображающий одно животное на другое и сохраняющий гистологическую специализацию клеток (то есть отображающий око в око и зуб в зуб). Заметим, что любое животное топологически представляет собой шар размерности три. Единственным исключением могут быть только простейшие, образующие колонии. Имеется ли какая-либо причина этой топологической простоты живых существ? Можно задуматься над необходимостью пространственного раздвоения, которое проще реализовать на шаре, чем на более сложной фигуре вроде заполненного тора. У растений ситуация совершенно иная. В этом случае можно говорить о гомеоморфизме только по отношению к отдельным органам, таким как, например, лист, ствол, корень и т.п., но глобального изоморфизма между двумя организмами в этом случае, вообще говоря, не существует. Однако даже в мире животных понятие гомеоморфизма не подходит биологам. Оно одновременно и слишком тонкое, и слишком грубое. Слишком тонкое, потому что гомеоморфизм между двумя животными одного вида не может быть прослежен вплоть до мелких анатомических деталей. Например, две кошки не обязательно имеют одинаковое число волос. А слишком грубое потому, что два животных близких видов могут быть гомеоморфны с той же степенью приближения, что и два животных одного вида (вспомним в связи с этим классические диаграммы д'Арси Томпсона для идентификации рыб различных видов). Для определения пространственного аспекта отношения эквивалентности, задаваемого принадлежностью к одному биологическому виду, понятие гомеоморфизма следует заменить понятия-

ем G — эквивалентности, где G это группа эквивалентностей, специфичная для каждой биологической формы, для каждого фенотипа. Формально определить эту группу нелегко. G должна приблизительно сохранять метрику (между животными одного возраста). G должна также сохранять вертикальное направление и, возможно, также конечное множество горизонтальных плоскостей. Весьма вероятно, что каждый фенотип имеет собственную группу эквивалентностей, и все эти группы имеют скорее всего очень мало общего.

Чтобы определить понятие фенотипа мы до сих пор использовали пространственную структуру организма. Часто это слово употребляют в более широком смысле. Например, некоторые экологические или физиологические особенности организма животного также принято считать элементами фенотипа вида. Важными составляющими фенотипа бактерий (скорее по соображениям удобства эксперимента, чем по существенным причинам) являются характер ферментативных реакций и сопротивление антибиотикам. Важно убедиться, что определение фенотипа как класса форм, соответствующего группе эквивалентностей G , сохраняет смысл даже при таком расширенном понимании. Например, данная бактерия, помещенная в данную среду, содержащую септомицин в концентрации c , порождает колонию, развитие которой определяется функцией $N = F(c, t)$. Отсюда ясно, что характер влияния септомицина определяется топологическим типом функции $F(c, t)$. С абстрактной точки зрения фенотип можно также определить как множество реакций организма на все возможные возмущения среды и как качественную классификацию этих ответов. Это означает, что практически невозможно дать формальное определение фенотипа. Так называемая формальная генетика, таким образом, полностью основывается на понятии нормального или *дикого* (*sauvage*) фенотипа, который, как выясняется, невозможно формализовать. Однако такая ситуация повсеместно возникает и в более точных дисциплинах, и математики не умеют ее формализовать.

Б. Глобальная форма

Важно заметить, что пространственная структура особи это только один из аспектов глобальной биологической структуры рассматриваемого вида. Мы получим гораздо более существенную форму, рассматривая в пространстве-времени геометрическую фигуру, которая, начинаясь с особи X в возрасте a и после периода времени T достигает стадии взросления потомков X , которые изоморфны X и имеют возраст a . Пространственная форма особи это, очевидно, не что иное, как сечение этой глобальной фигуры F гиперплоскостью $t = \text{const}$. Но эта фигура отнюдь не представляет всю геометрическую структуру, связанную с данным видом. Нужно также принять во внимание все стабилизирующие механизмы, которые в более или менее нормальных условиях обеспечивают размножение вида. В одной из предлагаемых нами глобальных моделей множество живых локальных состояний параметризуется функциональным пространством (конечной или бесконечной размерности) U . Фигура F погружается в U , но не канонически. Она некоторым образом инкапсулируется в трубчатую окрестность с отражающими стенками R . Именно совокупность этих отражающих стенок определяет механизмы эпигенеза, регуляции и гомеостаза, т.е. морфогенетической регенерации, и составляет полную геометрическую структуру, связанную с данным видом. Пространственная форма F это в конечном счете не что иное, как что-то вроде необходимой реализации, место обязательного прохождения волны развития, которая возникает в пространстве U , имеющем гораздо больше измерений, чем пространство-время \mathbf{R}^4 .

Мы вернемся к этой модели и рассмотрим ее подробнее в 10 главе.

8.3 МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ И МОРФОГЕНЕЗ

А. Недостаточность биохимии

Впечатляющий прогресс в молекулярной биологии в течении последних лет не должен заслонять тот факт, что к проблеме структурной устойчивости пространственной структуры живых существ (которую с полным основанием можно рассматривать как важнейшую проблему биологии) до сих пор еще не подступались. Несомненно, важно знать, как, из каких компонентов и в каком цикле реакций образуется тот или иной протеин. Но еще важнее знать, *где и когда* образуется этот протеин, и почему, если протеин образуется в некоторой области U клетки, он не образуется одновременно в другой области V той же клетки. Однако геометрический и пространственный аспект биохимических реакций находится полностью вне поля зрения биохимии. Реализацию *in vitro** ферментативной реакции, специфичной для живой материи, обычно рассматривают в качестве большого успеха. Но это скорее должно огорчать, поскольку животное это не колба для экспериментов. Не вызывает сомнений, что пространственная организация появляется уже на макромолекулярном уровне, о чем свидетельствует относительно строгая организация определенных органелл клетки (хромосом, центросом, митохондрий и т.п.). В этой области биология переживает, может быть, те же разочарования, что и физика, которая надеялась найти объяснение всех макроскопических явлений во взаимодействии небольшого числа элементарных частиц. На самом деле чем глубже мы спускаемся к бесконечно малому, тем вещи становятся сложнее, и исследователю открывается совершенно новая вселенная, однако в огромном множестве этих явлений невозможно как следует различить факторы, имеющие значение для макроскопической организации. Трудно отрицать, что в эпигенезе больших животных упрощения статистической природы не могут не играть роли. Напротив, форма вириона это форма типа кристаллической, связанная с точной, дискретной геометрической конфигурацией. Можно с уверенностью сказать, что она *проше* формы млекопитающего. Но все математики знают, что простые и нередуцируемые структуры (например, «простые» группы) могут быть очень сложными, и что проблема определения и классификации всех возможных простых структур чрезвычайно трудная. Впрочем, даже если геометрическая структура вируса (в состоянии вириона) может рассматриваться как простая, то ее биологическое значение, т.е. взаимодействие с чужой клеткой, несомненно, таковым не является. Чтобы в этом убедиться, достаточно просто рассмотреть репродуктивный цикл вируса (в нелизогенном случае). Мне неизвестно ни одно формальное доказательство морфологической непрерывности связи между заражающей клетку вириальной частицей и ее потомками в подвергаемой лизису клетке. Даже если допустить такую непрерывность, то несомненно, что в связи с характером генетической рекомбинации она предполагает крайне сложную молекулярную комбинаторику. Это далеко от топологической простоты воспроизводства при помощи яиц у многоклеточных.

Я вовсе не хочу сказать, что современные исследования в молекулярной биологии бесполезны. Напротив, они необходимы, поскольку только они позволяют воссоздать динамику, лежащую в основании той биохимической морфологии, которую они описывают. Мы слишком мало знаем о механизмах, управляющих макромолекулярными взаимодействиями, чтобы осмеливаться пренебрегать этим опытом и этими данными. Кто мог бы заранее предвидеть состав и законы поведения хромосом, не говоря уже об ответе на главную загадку биологической динамики?*

Но я хотел бы подчеркнуть следующее. Со времени открытия законов Менделя и успехов изучения макромолекул существует тенденция недооценивать динамические и

* в пробирке или колбе (прим. ред.)

непрерывные аспекты биологических явлений за счет переоценки роли хромосом, рассматриваемых в качестве фактора, управляющего всем метаболизмом.

Я со своей стороны, предлагаю рассматривать хромосомы как органеллы, которые во всех аспектах подобны прочим и для которых метаболизм среды обеспечивает одновременно устойчивость, дубликацию и вариативность. В предложенной здесь общей программе, заключающейся в динамической интерпретации форм клеточной ультраструктуры, мы сталкиваемся с хорошо известной трудностью: на самом деле мы совершенно не знаем природу сил, которые обеспечивают работу клеточных органелл, которые вызывают митоз, мейоз, кроссинговер и т.п.

Не следует удивляться нашему незнанию. Если вникнуть в трудности, с которыми сталкивается математический анализ конденсированных структур даже в простейшем случае *модели Изинга* (в теории затвердевания), то станет неудивительно, что мы не знаем как макромолекулярная структура действует на окружающую цитоплазму и как среда действует на эту структуру. Вот почему можно попытаться сделать ход, обратный обычному, и вместо объяснения морфогенеза *im Grossen*** через модификации клеточной ультраструктуры, объяснить клеточную ультраструктуру через динамические схемы, которые аналогичны схемам глобального морфогенеза, но действуют на уровне клетки. Конечно, эта программа не может быть начата без определенной доли произвольности при динамической интерпретации клеточных органелл. Однако это неизбежная опасность, на которую приходится идти в такого рода новаторском предпринятии.

Б. Морфология и биохимия

Можно, впрочем, уже теперь задаться вопросом, не лучше ли вместо того, чтобы объяснять морфогенез с помощью биохимии, обратиться к противоположному подходу. Проблема определения *третичной структуры* белка как функции его *первичной структуры* это типичная проблема динамики форм (в смысле главы 7). Речь идет об определении минимума функции U , а именно *свободной энергии* на функциональном пространстве L всех конфигураций данной молекулы. Можно ли сомневаться в том, что множество бифуркации S в L в, представляющее множество положений, в которых молекула имеет самопересечения, играет роль особенности для U ? И что относительная топология бассейнов дифференциальных минимумов U играет важнейшую роль в ферментативной и динамической активности молекулы? Недавние исследования различных ферментов (например, лизоцима) со всей очевидностью продемонстрировали морфологический аспект большинства ферментативных реакций. Молекулы ощупывают, ощипывают, скручивают и разрывают друг друга как живые существа. Не стоит этому удивляться. В той мере, в какой биохимические реакции отражают локальные эпизоды пространственной конкуренции различных режимов, на эти локальные эпизоды накладываются топологические ограничения, которые приводят к симуляции глобальных морфогенетических катастроф в пространстве-времени \mathbf{R}^4 . В большинстве случаев эти молекулярные механизмы необходимы для того, чтобы наилучшим образом локально симулировать глобальную биологическую катастрофу, которая их порождает. Тот факт, что некоторые из этих механизмов воспроизводятся *in vitro*, не должен скрыть их происхождения и их биологического значения. Эти реакции отличаются большой внутренней устойчивостью при взаимодействии с окружающей средой. Впрочем, *in vitro* теряется поляризация и ориентация макромолекул, которая харак-

* По-видимому, автор имеет ввиду открытие Уотсонов и Криком молекулярного механизма наследственности (прим. ред.)

** целиком (нем.)

терна для этих реакций, когда они происходят в живой среде.*

С этой точки зрения, является поразительным тот факт, что реакции репликации с участием ДНК, в которых видели саму сущность жизни, относительно грубы и неподатливы, тогда как реакции, определяющие всю жизненную энергетику, вроде тех, которые протекают в пластидах и митохондриях, зависят от морфологии, которую до сих пор не удавалось воспроизвести *in vitro*.

8.4. ИНФОРМАЦИЯ В БИОЛОГИИ

В 7.2 я уже указывал на неправильное употребление слова *информация* в биологии. Существует опасность того, что биологи могут найти в математической теории информации то, чего там на самом деле нет. Эта теория рассматривает на самом деле в основном техническую проблему, состоящую в передаче оптимальным способом заданного сообщения от источника к приемнику по каналу с заданными характеристиками. Биологическая же проблема состоит в другом, а именно в том, чтобы понять сообщение, предположительно зашифрованное (в обычном смысле, который с нашей точки зрения требует нескольких уточнений) с помощью цепочки из четырех букв ДНК. Итак, изначально любая информация это форма, а значение это топологическое отношение между формой сообщения и характеристическими формами рецептора (то есть формами, способными вызывать возбуждение рецептора). Сводить информацию к ее скалярной мере (исчисляемой в *битах*) это все равно что сводить форму к ее топологической сложности (в смысле главы 7), практически полностью теряя при этом аспект значения. Например, легко сказать, что овогенез это операция передачи информации от родителя к потомкам, поскольку-де в этом случае имеется идентичность между передающим каналом (яйцо) и приемником (эмбрион, выходящий из яйца), между сообщением и его читателем.

Часто отмечалось, что теоретическая биология никогда не была свободной от своего главного греха — греха антропоморфизма. Начиная с Декарта, животных всегда уподобляли машинам, созданным человеком. Современный вариант этой вредной привычки состоит в том, что животных сравнивают с компьютерами, снабженными устройствами контроля и авторегуляции. Не все плохо в таком подходе (мы вернемся к этому в главе 12, посвященной биологической целесообразности). С этой точки зрения картезианская модель является, возможно, более истинной и еще более загадочной, чем современные кибернетические сравнения. Нельзя, например, отрицать, что сердце работает как насос, а легкие как — кузнечные меха. На уровне ультраструктуры бактериофаг функционирует как шприц. Это потрясающее сходство между продуктами человеческого труда и продуктами биологического органогенеза, отмеченное уже Бергсоном, так и не имеет удовлетворительного объяснения (следует ли думать, что инструмент и орган похожи потому, что оба представляют собой оптимальное решение одной и той же технической задачи?) [1]. Язык современной биохимии изобилует антропоморфными словами, такими как «информация», «копирование информации», «сообщение» и т.п. Эти понятия были (и несомненно еще некоторое время останутся) очень полезными для того, чтобы понять как действуют живые системы на интуитивном уровне. Но когда-нибудь следует перейти, пусть за счет некоторого абстрагирования, к динамическому пониманию ж и з н и . С этой последней точки зрения, информация — это не что иное как геометрическая параметризация стационарного режима локальных динамик, копирование информации — это прост-

* то есть в живой клетке, *in vivo* (прим. ред.)

ранственное распространение этого режима, сообщение — это предпочтительная субординация между двумя локальными режимами. Какой смысл нужно придать сообщению, переносимому хромосомной ДНК? Здесь можно воспользоваться следующей аналогией. Как известно, почти во всех случаях форма структурно устойчивой динамической системы, такой как градиентное поле, определяется особыми точками соответствующего поля (то есть положениями равновесия системы, в которых поле обращается в нуль). Рассмотрим делящуюся клетку как динамическую систему, удвоение которой структурно устойчиво. Этому удвоению соответствуют *спектральные элементы*, образующие множество точек, в которых начинается пространственное удвоение. Это хромосомы и молекулы нуклеиновой кислоты. Всякая достаточно сильная модификация динамики самовоспроизводства предполагает изменение геометрической или химической структуры этих спектральных элементов, этих особенностей. Я думаю, в этом и только в этом смысле ДНК можно считать носителем генетической информации.

Явления генетической трансформации, наблюдаемые у некоторых бактерий при введении чужой ДНК или при переносе ДНК лизогенным вирусом, могут заставить думать, что хромосомный запас живого существа можно произвольным образом изменить. Я думаю, что это иллюзия. Замещение сегмента хромосомы подобным сегментом экзогенного происхождения происходит только в том случае, если такая замена создает локальный термодинамический баланс, который оказывается благоприятным с точки зрения метаболизма среды. При каких условиях этот баланс оказывается благоприятным, мы пока не знаем. Следует, впрочем, заметить, что этот локальный баланс совершенно не обязательно должен совпадать с глобальным метаболическим балансом. В противном случае вирусное заражение было бы невозможным.

ДОПОЛНЕНИЕ

Витализм и редукционизм. Из двух точек зрения, которые традиционно противопоставляются в биологии — виталистской и редукционистской — метафизической, вопреки распространенному мнению, является вторая, поскольку редукционизм постулирует возможность сведения биологических фактов к физико-химическим, что никогда не было подтверждено экспериментально. Витализм, напротив, отталкивается от множества впечатляющих фактов регуляции и целесообразности, которые встречаются в биологии повсеместно. Однако витализм дискредитировал себя употреблением пустых слов (таких как «организующее начало» и «энтелехии» Дриша (Driesch)), неудачно подхваченные и популяризированные философами телеологического направления (такими как Бергсон и Тейяр де Шарден). Не будем судить этих мыслителей слишком строго. Их труды содержат много смелых идей, до которых не могли прийти ученые, связанные механистическими табу. Даже терминология Дриша свидетельствует о потребности разума постичь положение дел в биологии, не пользуясь аналогиями с науками о неодушевленном мире. Спор здесь по сути идет ни о чем. Многие физико-химические свойства материи нам до сих пор неизвестны. Старая мечта атомистов воссоздать нашу вселенную и все ее качественные свойства только с помощью комбинаторики элементарных частиц и их взаимодействий — это программа, к которой только-только приступили (вспомним, что пока нет никакой приемлемой теории жидкого состояния вещества). Биолог, если он хочет продвинуться в понимании жизненных процессов, не может ждать, пока физико-химик даст ему полную теорию всех локальных явлений, встречающихся в живой материи. Он попытается построить модель, локально совместимую с известными свойствами среды, и выявить геометрико-алгебраическую структуру, обеспечивающую устойчивость системы, не пытаясь получить исчерпывающего описания метаболизма. Эта методологическая позиция идет вразрез с доминирующей в наши дни философией, которая говорит, что для выявления природы

вещей нужно прежде всего разложить систему на ее простейшие составляющие. Следует отбросить как иллюзорную ту примитивную и каннибалистскую концепцию знания, согласно которой, чтобы познать какую-то вещь, ее следует предварительно разобрать на части — как это делает ребенок, который ломает часы и вынимает из них шестеренки, чтобы понять как они работают.

Несомненно, что во многих случаях катастрофическое разрушение системы может рассказать о ее структуре много интересного. Но для этого нужно, чтобы разрушение не было слишком грубым, чтобы не получалось так, что выделяются несущественные составляющие, тогда как существенные элементы разрушаются, как это происходит при химическом анализе живой среды. Так, изучение взаимодействий живых тканей (после разделения и перекомбинации листков) методами экспериментальной эмбриологии дало гораздо больше интересного, чем все предшествующие биохимические анализы.

Наш метод, согласно которому живому существу приписывается формальная геометрическая структура, обеспечивающая устойчивость, может быть охарактеризован как разновидность *геометрического витализма*. Как и в случае энтелехии Дриша речь здесь идет о глобальной структуре, управляющей локальными деталями. Однако эта структура может в принципе быть выявлена только при помощи локальных детерминизмов, теоретически сводимых к механизмам физико-химической природы. Я не знаю, можно ли провести такую редукцию последовательно. Но я считаю, что понимание формальной структуры будет полезным даже без полного физико-химического обоснования.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] В рамках нашей теории можно утверждать, что органы и инструменты оказываются изоморфными по той причине, что они занимают гомологичные положения в универсальной развертке одного и того же архетипического креода.

ГЛАВА 9

ЛОКАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ В ЭМБРИОЛОГИИ

*Και ο λογος σαρξ εγεντο
И слово стало плотью*

Евангелие от Иоанна¹

9.1. РАЗНООБРАЗИЕ ЛОКАЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ МОРФОГЕНЕЗА В БИОЛОГИИ

В тех очень немногочисленных случаях, когда биологи смогли пролить какой-то свет на морфогенез, они были вынуждены точно устанавливать непосредственную причину конкретного морфогенетического процесса. Так, образование и искривление ствола растения можно объяснить наличием в некоторых участках ткани ауксина, стимулирующего локальный рост; жесткость хорды эмбриона позвоночных можно объяснить гидростатическим давлением жидкости, содержащейся в вакуолях клеток хорды, и так далее. Понятно, что эти знания, сколь бы они ни были точными, в теоретическом плане только отодвигают проблему организации. Почему ауксин вырабатывается и локализуется в точности там, где нужно?; почему давление внутри вакуолей клеток хорды повышено? и т.д. Однако на основании этих знаний можно сделать следующий вывод: при том, что задачи, решаемые биологическим органогенезом, относительно однотипны, используемые средства и получаемые решения чрезвычайно разнообразны. Так, для решения задачи пространственного переноса ткани используются следующие средства:

1. перемещение отдельных клеток при помощи псевдоподий или ресничек (пример: отделение нервных гребней у амфибий);
 2. использование вспомогательных клеток, выбрасывающих буксирующие псевдоподии (гаструляция у морского ежа);
 3. выделение опорных инертных эксудатов (некоторые водоросли и грибы, паутина);
 4. глобальные движения ткани (гаструляция у амфибий);
 5. неравенство митотической активности или роста;
 6. присоединение к животным другого вида (пыльца растений, переносимая пчелами);
- и список можно продолжить.

Удивительно, что несмотря на это почти бесконечное разнообразие средств, функциональная интерпретация морфологии живых существ редко вызывает сложности. Наблюдаемые явления чаще всего удается объяснить с помощью самых простых телеологических соображений. В неживой природе мы сталкиваемся с противоположной ситуацией. Локальные случаи морфогенеза как правило достаточно однотипны и очень малочисленны. Тем не менее, возникающая глобальная структура обычно очень неопределенна, хаотична и не поддается интерпретации (фазовые переходы, рост кристаллов и т.д.) Было бы разумно требовать, чтобы теория морфогенеза явно описывала локальную причину морфогенетического процесса в каждой точке. Предлагаемые нами модели, вообще говоря, не удовлетворяют этим требовани-

¹ Ин. 1:14. — *Прим. ред.*

ям. Чтобы подступиться к подобной задаче, следует располагать *тонкой теорией* метаболических состояний клеток. На начальном этапе выбор локального механизма морфогенеза определяется *масштабом* процесса. Потом важную роль начинает играть *возраст* клеток и их *генетическое строение*. С другой стороны, достаточно очень слабых вариаций внешних условий, чтобы при сохранении начального и конечного состояний эволюция катастрофы полностью изменилась.

Это серьезный недостаток нашей модели, потому что он делает ее трудно проверяемой эмпирически. В настоящее время мы можем предложить только понятийную конструкцию, представляющую преимущественно спекулятивный интерес.

9.2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Мы предлагаем модель, в которой клетка рассматривается в качестве базовой единицы. Можно было бы дать более конкретную интерпретацию, однако это никоим образом не является необходимым. В 11 главе мы в качестве базового пространства примем непосредственно клеточную цитоплазму.

Допустим, что мгновенное биохимическое состояние клетки может быть параметризовано точкой g (локально) евклидова пространства G . Рассмотрим также усредненное биохимическое состояние (на достаточно большом отрезке времени, например, порядка времени митоза), которое параметризуем точкой u другого (локально) евклидова пространства U . Любое мгновенное состояние определяет усредненное состояние посредством канонического отображения $h: G \Rightarrow U$, предполагаемого локальным расслоением. Слой, который является дифференцируемым многообразием M , параметризует мгновенные состояния клетки, совместимые с усредненным состоянием $u \in U$. В заданный момент t множество биохимических состояний клеток живого существа A определяет некоторое множество точек из G и U . Поскольку A это шар B^3 размерности три, можно предположить, что это множество задается в G отображением $F(B^3)$ и в U отображением $hQ F$. Эти отображения задают *волну роста* A . Они предполагаются непрерывными (и даже дифференцируемыми), по крайней мере по частям. По крайней мере локально можно предположить, что пространство G — это топологическое произведение $U \times M$. Клетка, которая исходно находится в точке $g = (u, m)$ порождает при помощи митоза две дочерние клетки, задаваемые парами (u, m_1) , (u, m_2) . Можно допустить — и в этом, очевидно, состоит единственное оправдание для введения пространств G и U , — что точки, представляющие дочерние клетки, топологически близки к точке, представляющей материнскую клетку.

Зафиксируем среднее состояние клетки u и будем варьировать вторую координату m в слое M . Митоз из состояния (u, m) порождает пару (u, m_1) , (u, m_2) . Пренебрегая изменением u , рассмотрим отображение $d(u): M \Rightarrow M \times M$, определяемое как $d(u): m \mapsto (m_1, m_2)$. Пусть p_1 это проекция $M \times M$ на первый сомножитель, а p_2 — на второй. Допустим, что преобразования $p_1 Q d(u): M \Rightarrow M$ и $p_2 Q d(u): M \Rightarrow M$, связывающие клетку с ее потомками в моменты, соответствующие периоду митоза, представляют собой близкие диффеоморфизмы многообразия M . Если диффеоморфизм $p_1 Q d(u)$ имеет неподвижную притягивающую точку k , то говорят, что k задает *локальный стационарный режим*, совместимый с усредненным биохимическим состоянием u . Если k — аттрактор, то такой режим будет устойчивым. Следует рассматривать только устойчивые режимы, поскольку любой неустойчивый режим разрушается минимальным возмущением. Каждой точке $u \in U$ поставим в соответствие множество устойчивых режимов, совместимых с усредненным состоянием u . Зададим таким образом пространство \hat{U} , которое отображается на U локальным гомеоморфизмом (пространство, построенное над U). Там, где аттрактор k перестает быть устойчивым, происходит катастрофа соответствующего режима.

Множество точек H из U , для которых по крайней мере один из аттракторов k приводит к катастрофе, будем называть множеством катастроф пространства U . При оптимальных условиях пересечение образа $F(B^3, t)$ (волна роста) с множеством H дает множество $H' = F^{-1}(H)$, определяемое с точностью до ϵ -гомеоморфизма. Таким образом, на B^3 Токазывается заданной система креодов, то есть семантическая модель, которая описывает это развитие. В 10 главе мы опишем, как может быть эксплицирована глобальная структура этой модели. Здесь же мы займемся главным образом первичными особенностями эмбрионального развития, имея в виду факты гаструляции. Далее мы дадим картину развития конечности. Затем в качестве дополнения мы подойдем к описанию нейруляции и возникновения позвоночной оси у позвоночных.

В первом приближении можно допустить, что множество катастроф H задается в U статическим полем. Первыми вступают в процесс страты H коразмерности один (страты точек складки) и коразмерности два (страты точек сборки). Как мы видели в главе 6, страты точек складки не дают морфогенетического эффекта за исключением того случая, когда они отделяют устойчивый режим от пустого. Это страты края. Они соответствуют в этом случае краю углубления (или внешней эпидермы). Углубления играют важную роль в эмбриологии, которая остается загадочной. Какова роль этих углублений, которые часто возникают на промежуточных стадиях и которые у взрослых не выполняют никакой ясной функции? Таковы нейроны, которые, очевидно, являются существенными элементами нервного креода. При искусственной стимуляции взрослой эктодермы происходит образование нервных труб со своими нейронами, однако эти трубы не открываются наружу. Возможно, ответ состоит в следующем. Допустим, что механические свойства ткани полностью определяются ее усредненным биохимическим состоянием (образом которого в U является волна роста F). Если гибкость, рост, скорость и направление митоза определяются этим усредненным локальным состоянием, то интегрирование всех этих локальных состояний по трехмерной массе ткани может привести к «переопределенной» задаче. Обозначим через V вектор скорости ткани в точке m и через ρ — ее плотность. Тогда V удовлетворяет уравнению в частных производных, аналогичному уравнению Лиувилля:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \Delta V = 0$$

так что задание V и ρ ведут к переопределенности. Чтобы избежать этой переопределенности, проще всего ограничить область задания V поверхностью F размерности два, и допустить, что вне F ткань более или менее пассивно зависит от того, что происходит на этой поверхности. Как представляется, можно сформулировать (почти) общее правило: *основа морфогенетического поля в эмбриологии это поверхность* (толщина которой не превосходит нескольких клеточных слоев — двух или трех). Таким образом, даже если конечный орган является трехмерным, как, например, глазной хрусталик, его развитие определяется поверхностным ростом, который начинается с экваториальной линии хрусталикового пузырька. Если мы примем этот «постулат» для нашей модели, то основа морфогенетического поля, то есть прообраз по F страты множества бифуркации H коразмерности один, может быть только двух типов. Или это *страта складки*, отделяющая устойчивый режим от пустого, или же это *страта конфликта*, то есть ударная волна, разделяющая два конкурирующих режима. В примитивном морфогенезе трудно добиться жесткого контроля ударных фронтов, потому что этот контроль основывается на сравнительном термодинамическом равновесии двух конкурирующих режимов. Для достижения такого контроля приходится модулировать метаболические циклы характеристических реакций каждого режима при помощи ферментов, которые их катализируют, что требует весьма дифференцированных устройств (цитоплазмических органелл — рибосом, митохондрий и т.п.) и строгой поляризации ткани. Считается, что конфликтные поля конфликта появляются

только после «краевых» полей, требующих контроля только одного режима. А краевое поле требует углубления, которое оно бы ограничивало.

Исходя из этого, заметим, что любая гистологическая дифференциация геометрически проявляется тремя способами: а) неравномерностью роста: некоторые клетки делятся быстрее других; б) относительными движениями тканей: некоторые ткани перемещаются относительно других; поверхность разрыва скоростей (касательных к этой поверхности) это фронт ударной волны, разграничивающий две ткани; в) при помощи гистологической модификации предшествующей ткани, как, например, в случае трансформации эктодермы в нервную ткань под действием индуцирующего агента.

В последнем случае трансформация тоже имеет геометрические эффекты, касающиеся либо расположения клеток («шпалерное» (palissadique) образование тканей), либо последующих движений новой ткани. Я оставляю здесь в стороне важный для эмбриологии вопрос о том, в какой мере биохимическая специализация клеток предшествует этим геометрическим проявлениям. Кажется априори ясным, что всякий пространственный морфогенез предполагает фазу биохимической подготовки, даже если эта подготовка вплоть до достаточно поздней стадии остается относительно гибкой и обратимой.

Наконец допустим, что эмбриональное развитие управляется «направляющими слоями», связанными с волновыми фронтами. Эти слои представляют устойчивые особенности волновых фронтов волн, которые исходно являются катастрофами, вызывающими последующие дифференциации. Только в случае особо компактной и толстой ткани (например, вителлина) качественные характеристики движения поверхностных ударных волн задаются правилами типа условия Максвелла.

Попробуем теперь сопоставить особенности морфогенеза в эмбриологии и элементарные катастрофы, описанные в главе 5. Я понимаю, что это сопоставление может показаться произвольным. Я думаю, что это сравнение более обоснованно в тех случаях, когда мы имеем дело с крупными животными, для которых статистические приближения, определяемые дифференцируемыми отображениями, лучше описывают соответствующие биохимические механизмы эпигенеза. В случае мелких животных типа морского ежа мы, напротив, сталкиваемся с очень плохо контролируемыми морфогенетическими движениями (как, например, при образовании первичной мезенхимы путем иммиграции в полость бластоцеля отдельных клеток вегетативного полюса зародыша). Было бы, очевидно, неразумно подчинять эту миграцию отдельных клеток структурно устойчивому плану, который бы предписывал все детали. Скорее, такую миграцию следует рассматривать как обобщенную катастрофу, для которой относительно точно определенным является только конечный результат, тогда как индивидуальные пути каждой клетки зависят от локальных случайных факторов и остаются более или менее неопределенными.

Нужно заметить, что даже у млекопитающих некоторые морфогенетические сдвиги, среди которых есть и существенные, включают миграцию отдельных клеток. Вспомним первичную деламинацию гипобласта и эпибласта, рассасывание нервных гребней, миграцию первичных гоноцитов. Нет ничего противоречивого в предположении о том, что некоторые трансформации, имеющие первоначально жестко фиксированную морфологию, могут эволюционировать в направлении таких текучих форм (мы имеем в виду наши модели гастрюляции позвоночных), особенно с увеличением регулятивных возможностей яиц.

Наконец, если проследивать развитие до гастрюляции, то помимо возможного появления обобщенных катастроф появляется и другая трудность. В нашей модели мы назвали *стабилизацией порогов* общий феномен структурно устойчивого появления необразующих особен-

ностей. Это явление накладывает новые ограничения, связанные с усилением гомеостатических механизмов. Математически это выражается так: после первого дифференцирования, которому соответствует пространство универсальной развертки U , конечная ситуация характеризуется устойчивой волной роста $F: B \Rightarrow U$. Второе дифференцирование определяется потенциалом V , который задается с помощью действительной функции $G: U \Rightarrow \mathbf{R}$ как $V(x) = G(F(x))$.

Такая функция может иметь в точке x необразающую особенность, и можно предположить, что всякая деформация V допускает факторизацию вида $V = G' \circ F'$, где G' и F' это деформации G и F соответственно. Только предположив такую двустороннюю симметрию можно получить разумную модель нейруляции (и формирования позвоночного столба). Таким образом, по ходу развития происходит прогрессирующее заражение внутренних переменных, участвующих в катастрофах дифференцирования, внешними переменными, координатами развития, которые как эпигенетические градиенты имеют пространственный смысл. Эта эволюция достигает предела в креодах метрического характера, как в случае глаза или конечности. В этих случаях почти достигается изоморфизм между внутренним пространством и галилеевым пространством механики внешнего мира.

Мы считаем это преобразование внешних переменных во внутренние проявлением свойства самовоспроизводящихся особенностей, описанного в 10-2-Е. Здесь также переход от одного поколения к следующему формально выражается в том, что система внешних переменных превращается в систему внутренних переменных.

Прежде чем приступить к явному описанию гастрюляции мы обсудим известные в биологии классические схемы эмбрионального развития: мозаичную схему и теорию градиента.

9.3. ОБСУЖДЕНИЕ ИЗВЕСТНЫХ ТЕОРИЙ

А. Развитие мозаичного типа

Простейшая модель эпигенеза это, очевидно, *мозаичная* модель, в которой судьба каждой части яйца предопределена *ab initio* (с самого начала). В нашей геометрической модели траектория волны роста $F(x, t)$ в U задается векторным полем U , которое можно считать постоянным и проектируемым положительно на ось времени в U T . Дифференциальное уравнение, управляющее развитием, запишется как

$$\frac{dF}{dt} = a \quad (9-1)$$

где постоянная a может, впрочем, зависеть от x , если часть зародыша рассматривается отдельно. Волна F встречает в U страты катастроф или конфликтов, прообразы которых по F являются поверхностями дифференциации клеток зародыша.

Известно, что в эмбриологии строго мозаичная ситуация практически не встречается. В той или иной степени всегда, как кажется, возникают явления регуляции. Можно улучшить предыдущую модель, если принять в расчет следующие экспериментальные данные:

1. Известно, что яйцо с самого начала поляризовано по крайней мере по одному направлению, а именно по направлению от анимального полюса к вегетативному полюсу. Обозначим через y функцию, которая принимает значение $-$ на вегетативном полюсе, $+$ — на анимальном. Тогда можно допустить, что это координата нашего пространства U , которая играет роль эпигенетического ландшафта (epigenetic landscape) по Уоддингтону. Добавление в окружающую среду вещества с анимализирующим (или вегетализирующим) эффектом описывается в уравнении (9-1) корректирующим членом вида

$$dy = c$$

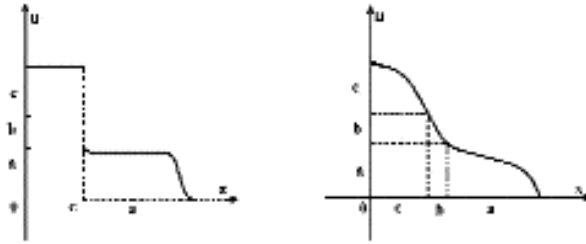


Рис. 9-1. Регуляризация при диффузии.

dt

где c положительно для анимализирующего вещества отрицательно для вегетализирующего и где u является составляющей отображения F .

Наконец, всегда предполагая U (локально) евклидовым, можно учитывать некоторые явления регуляции с помощью уравнения эволюции F типа уравнения диффузии:

$$\frac{dF}{dt} = a + m\Delta F$$

где Δ — Лапласиан, a — скалярный коэффициент, который тем больше, чем более лабильна ткань.

Если отрезать кусок яйца, начальные значения $F(x, 0)$ на оставшейся части шара перестанут быть непрерывными. Однако из-за диффузионного члена $m\Delta F$ решение останется непрерывным (и даже дифференцируемым). Поэтому некоторые органы могут появиться, даже если удалить их будущие ткани (см. рис. 9-1 при U размерности один).

Я не буду настаивать на этой упрощенной схеме. Тем не менее, ее можно считать локально истинной в окрестности центра любого креода, любого морфогенетического поля статического типа.

Б. Теория градиентов

Теория, которую называют теорией градиентов (Бовери, Чайлд и др.), может быть сформулирована несколькими способами:

А) наиболее общая формулировка. Любой морфогенез локально управляется системой локальных координат, локально выражаемых через биохимические величины (вообще говоря, неизвестной природы).

Б) менее общая формулировка. В эмбрионе (и во взрослом животном?) имеются биохимические величины, позволяющие локализовать любую точку внутри организма.

С) формулировка Чайлда. Эпигенезом управляет действительная функция, определяемая глобальной интенсивностью метаболизма, градиент которой вдоль цефало-каудальной оси (оси «голова-хвост») нигде не обращается в ноль.

Что касается утверждения А), то можно сказать, что его истинность является почти методологически необходимой. Когда допускается — что представляется практически неизбежным — что морфогенез (локально) осуществляется в соответствии с локальной картой (что выражается в терминах креодов Уоддингтона и морфогенетических полей вообще), мы вынуждены считать, что локальные координаты этой карты имеют биохимические значения.

Относительно формулировки Б), имеющей глобальный смысл, следует быть более осмотрительным. Тогда как все авторы допускают у эмбриона (и может быть, у взрослого, в области развитых регенеративных способностей) существование цефало-каудального градиента, существование двух других градиентов — дорсо-вентрального (спина-живот) и билатерально-

го (двустороннего), представляется гораздо более сомнительным.

В) Метаболическая формулировка Чайльда происходит очевидным образом из похвального желания привязать эпигенетический градиент к экспериментально измеряемой величине. В той степени, в которой эпигенетические градиенты существуют и задаются биохимически, глобальная интенсивность метаболизма является функцией этих величин и иногда может быть определена по локальной координате. Однако поскольку речь здесь идет о размытой величине, несущей очень мало информации, было бы явно несерьезно связывать ее с эпигенезом в целом. (Не следует забывать, что любой локальный морфогенез требует трех градиентов, а не одного...)

Несмотря на свои недостатки, старая теория градиента имеет огромные достоинства, которых лишены более современные теории, основанные на идее избирательной активации генов. Старая теория имеет геометрический характер и с математической точки зрения свидетельствует о принципиально правильной интуиции авторов.

9.4. МОДЕЛИ ПЕРВИЧНОГО ЭПИГЕНЕЗА

А. Гастрюляция у амфибий

Займемся сначала случаем амфибий, который относительно хорошо описан в учебниках. Предположим, что пространство U нашей модели, в которой возникает волна роста $F(B, t)$ и которое параметризует средние биохимические состояния каждой клетки, это четырехмерное пространство \mathbf{R}^4 , которое можно отождествить с пространством-временем. Эта гипотеза на первый взгляд кажется слишком ограничительной, но на самом деле она таковой не является, потому что если пространство имеет в действительности намного большую размерность, то волну роста $F(B^3, t)$, описывающую эволюцию эмбриона в U , можно считать погружением. Так что единственная полезная часть U (при нормальном эпигенезе) это четырехмерная область. Возьмем яйцо на стадии бластулы. Практически это утолщенная сфера $S^2 I$. Можно допустить, что внешний край бластулы соответствует страте-складке множества H , а именно той, которая отделяет режим динамики яйца от пустого режима. По направлению внутрь углубление blastocele в эпигенезе практически не контролируется. Оно не соответствует никакой страте из H . Ситуация остается такой вплоть до момента T_1 начала гастрюляции. В течении промежутка времени между T_1 и T_2 поверхность H представляет собой круг C ласточкина хвоста. При $t = T_1 +$ волна роста $F(B^3, t)$ встречает C в двух точках a_1, a_2 , которые являются концами двойной линии d на сфере $F(B^3, t)$. Поверхность H имеет на $F(B^3, t)$ ребро возврата, образуемое двумя дугами g, g' , соединяющими a_1 с a_2 внутри бластулы. Как видно из теории ласточкина хвоста (глава 5), одна из дуг, например g , является множеством Римана-Пугонио для конфликта между двумя аттракторами. Вторая играет только виртуальную роль. Имеется фронт ударной волны F , ограниченный g и d , которые разделяют бассейны двух аттракторов. Таким образом, двойная линия d (которая образует дно борозды blastospore), продолженная по поверхности внутрь, отделяет эндодерму от эктомезодермы (рис. 9-2). Двойная линия d имеет вид ручки корзины и снаружи образует особенность типа губы (рис 9-2-2).

В начале короткого отрезка времени ($T_2 - T_1$ равно примерно десяти секундам) a_1 и a_2 соединяются снова в самой низкой точке blastosporeического круга, и d образует круг blastospore. Ударная волна F , ограниченная с одной стороны blastospore, а с другой внутренним кругом Риманна-Пугонио c , топологически является цилиндром $S^1 I$. Однако при $t > T_2$ круг c быстро погружается внутрь, и поверхность F тоже стягивается внутрь, отделяя желточную эндодерму от мезодермической мантии. По этому описанию создается представление, что мезо-

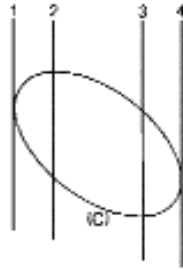
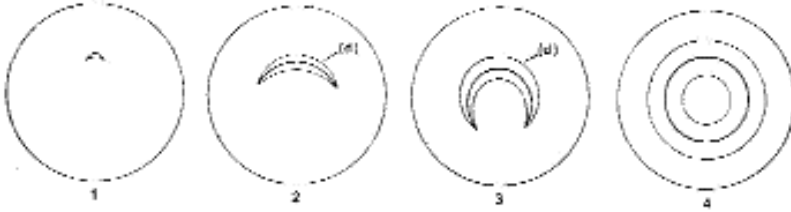


Рис. 9-2 Гастрuliaция у амфибий.



дермическая мантия выделяется путем деламинации желточной энтодермы (или точнее ткани еще не определенной этиологии, расположенной по внутреннему краю бластулы, почти вплотную с бластоцелью).

Данный вопрос подробно обсуждается в классической статье Фогта [1]. Этот автор отмечает, что многочисленность сечений обеспечивает топологическую непрерывность между мезодермической мантией и энтодермой (на внутреннем краю мезодермической мантии). Тем не менее он отбрасывает эту интерпретацию, замечая, что если не считать двух областей, расположенных в плоскости симметрии зародыша (прехордальная пластинка сверху и вентральная губа снизу), между двумя листками всегда имеется очень четкая дифференциация. Впрочем, опыты с красками показали, что материал для мезодермической мантии всегда берется из боковых областей, внешних по отношению к бластопорическому кругу. Похоже, что в образовании мезодермы участвуют два несовместимых механизма: быстрый рост мезодермы за счет инвагинации поверхностной эктодермы и отделение от эктодермы вдоль круга Римманна-Пюгонио c . В начале, очевидно, может действовать только первый механизм. Затем круг c быстро погружается внутрь своими боковыми дугами. Напротив, средние дуги остаются очень близко к самым высоким и самым низким точкам бластопоры. В плоскости симметрии зародыша дифференциация очень медленно идет внутрь. Боковые дуги раздвигаются, а затем соединяются, обогнув зародыш снизу. Таким образом, круг c порождает круги c_1 и c_2 . Верхний круг c_1 определяет (по крайней мере частично) недифференцированную зону, где прехордиальная пластинка только что соединилась с энтодермой. Нижний круг c_2 задает «подковообразную» зону брюшной губы бластопоры, где мезодерма и энтодерма соединяются. Некоторые дуги c_1 могут оказаться не покрытыми $F(B, t)$, так что боковая мезодерма вполне может иметь свободный край. См. рис. 9-4, где показана схема ударной волны F в конце гастрuliaции.

Начало дифференциации эктодерма-мезодерма труднее всего выявить. Это происходит потому, что эта дифференциация связана не с поверхностными явлениями вроде появления *бластопорической борозды*, а с внутренним феноменом, начальная стадия которого очень быстротечна. Кажется правдоподобным, что начальная дифференциация проявляется в виде поверхности S типа Римманна-Пюгонио внутри дорсальной губы бластопоры. Это происходит в начале гастрuliaции и связано с остаточным уплощением бластоцеля, разделяющего два листка.

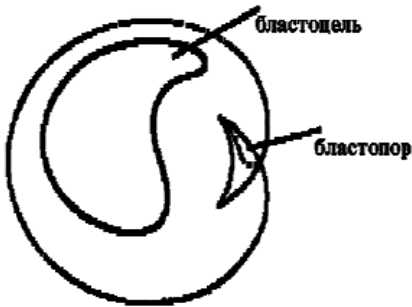


Рис. 9-3. Теоретическая схема гастрюляции, определяемой ласточкиным хвостом.



Рис. 9-4. Поверхность, разделяющая эктодерму и мезодерму в конце гаструляции.

Поверхность S быстро распространяется на боковые зоны, а затем внутрь зародыша за эктодермический слой. Она вскоре становится поверхностью разрыва скоростей. При этом эктодерма прорастает в бластопору, а мезодерма распространяется в противоположном направлении (внутрь). Ребро возврата, ограничивающее эту поверхность, является геометрическим местом точек, в котором направление скорости меняется на противоположное. Затем поверхность S полностью ограничивает эктодермический листок мезодермы помимо брюшной области бластопоры, в которой окончательная дифференциация происходит только в конце гаструляции.

Тогда как у амфибий дифференциация между энтодермой и мезодермой несколько затемнена кинетическими явлениями, у рыб ситуация гораздо более четкая. В последнем случае набор неспециализированных клеток развивается путем продольного деления. В этой области появляется поверхность со свободным краем (Риманна-Пюгонно), которая отделяет эктодерму от мезодермы (см. рис. 9.5 по Л. Галльену [2]). Дифференциация мезодерма-энтодерма представляется тесно связанной с линией ласточкина хвоста на краю углубления, называемого *пузырьком Кунфера*.

Даже в первичном морфогенезе (гастрюляция, нейруляция) у различных видов животных наблюдается весьма значительное разнообразие эпигенетических движений. Но эти различия могут оказаться кажущимися, поскольку различные движения могут быть преобразованы одно в другое с помощью очень простых деформаций. Если определить динамические особенности эпигенеза в каждом частном случае, то путем сравнения различных эпигенетических карт (пространство U нашей модели и многообразие бифуркации H) можно было бы восстановить последовательное складкообразование динамики, порождающей данный морфогенез. Упорядочив эти карты по возрастанию топологической сложности можно было бы восстановить обычное направление эволюции. Какой био-тополог мог бы осуществить эту программу?

В качестве первой попытки мы сравним гастрюляцию у амфибий и птиц.

9.5. МОДЕЛИ ПЕРВИЧНОЙ ПОЛОСКИ

Как известно, первичный эпигенез у высших позвоночных (птиц и млекопитающих) существенно отличается от эпигенеза амфибий. В первом случае эмбрион относится к бласто-

дермическому типу. После расслоения он имеет форму плоского диска, покоящегося на предзародышевом углублении. Начальная дифференциация отделяет энтодерму (снизу) от эктодермы (сверху). Кажется сомнительным, чтобы эта дифференциация, определяемая в книгах как деламинация, описывалась геометрически точно. Представляется, что в результате квазииндивидуальной миграции больших желточных клеток к низу эпибластические клетки остаются на месте. Несомненно, что бытротечный характер этого разделения, которое можно рассматривать как обобщенную катастрофу, связан с широкими регулятивными возможностями эмбрионов птиц и млекопитающих. Действительно для запаздывающей регуляции нужно, чтобы клетки различного типа, необходимые для развития, оставались смешанными, и чтобы их разделение происходило как можно позже. А достаточно точные геометрические явления получаются только при формировании мезодермы из *первичной полоски*. Можно принять во внимание кинематику, которая на первый взгляд выглядит весьма странно: допустим, что на каждом из двух дисков, эпибласте и энтодерме, появляется полярность различной природы. На эпибласте имеется тангенциальный градиент Y , задаваемый в полярных координатах r, θ орторадиальной составляющей $r\theta'$. Такой градиент Y симметричен относительно вращения диска. На энтодерме имеется выделенное направление d , задаваемое лучом Op, p , где p обозначает точку диска, которая впоследствии становится границей зародыша. Пусть q это точка из Op (соседняя с нижней границей p), в которой возникает первичная полоска, и пусть $u(s)$ — «функция милицейской фуражки», равная единице в окрестности W точки q и нулю вне этой окрестности (рис. 9-6). Пусть Oxy — это такая система координат, что луч Op задается как $x=0, 0 < y < -1$. Допустим, что благодаря диффузии или резонансу между эктодермой и энтодермой каждая клетка эпибласта в окрестности W подвергается действию градиента вида $Y' = u(m) \cdot xY$. Допустим также, что каждая клетка, на которую действует градиент Y' , остается под этим воздействием на протяжении всего времени своего движения. Тогда каждая клетка эпибласта, расположенная в окрестности W , стремится к оси Ox и, оставаясь под воздействием градиента того же знака, продолжает движение в том же направлении к внутреннему слою, то есть к мезодерме. Из этого следует, что первичная полоска возникает как место столкновения двух противоположных движений. В дифференциальной геометрической модели, которую мы будем рассматривать, первичная полоска — это отрезок самопересечения диска, погруженного в пространство \mathbf{R}^3 , концы которого представляют собой *точки острия*. Такая динамическая схема объясняет явление введения энтодермы в эпибластический диск, наблюдаемое именно тогда, когда происходит отделение одного диска от другого и когда диски возвращаются к прежнему положению после вращения.

Полностью развитие мезодермы можно описать с помощью более сложной и точной модели. В трехмерном пространстве \mathbf{R}^3 с координатами u, v, w рассмотрим поверхность S , заданную следующим образом. Пусть даны два круга $C: w = +1; u^2 + v^2 = 1$ и $C': w = -1; u^2 + v^2 = 1$. Каждой точке m из C с координатами $u, v, +1$ соответствует точка m' из C' с координатами $u, -v, -1$. Поверхность S это множество сегментов вида mm' . Эта поверхность описывается уравнением $w^2(1 - u^2) = v^2$ при $w^2 \leq 1$ и ограничивается кругами C и C' . Отрезок $-1 \leq u \leq 1, v=w=0$ является двойной линией этой поверхности, а концы этого отрезка и $'$ с координатами $-1, 0, 0$ и $+1, 0, 0$ представляют собой острия. В этом пространстве координаты u, v, w представляют собой биохимические градиенты: u представляет собой цефало-каудальный градиент, растущий от хвоста $u = -1$ к голове $u = +1$; v — билатеральную координату, то есть градиент лево-право; w — остаточный анимально-вегетативный градиент, который при $w > 0$ соответствует эктодерме и хорде, а при $w < -1$ — энтодерме. Интервал $-1 \leq w \leq 0$ соответствует неосевой мезодерме (рис. 9-7).

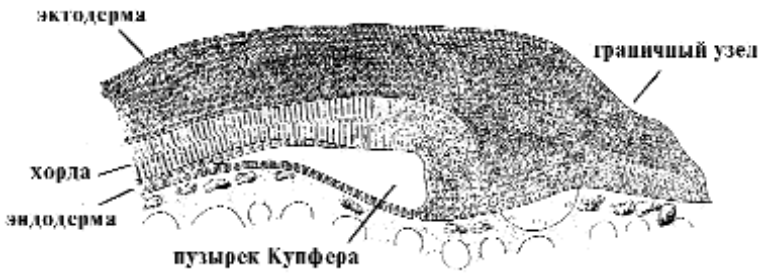


Рис. 9-5.

Формирование мезодермы можно качественно представить как эволюцию волны роста $F(R^2, t)$ в нашем пространстве. Сначала поверхность $F(R^2, t)$, погруженная в R^3 , расположена горизонтально в полупространстве $w > 0$ и имеет минимум w на оси симметрии $v = 0$. При возрастании t эта поверхность параллельно переносится вниз вдоль оси Ow . Например, при $t = 0$ она касается двойного отрезка поверхности S в начале первичной полоски q . На поверхности прообраза S по F двойная линия, ограниченная двумя острями, дает сечение двух эктодермических слоев и двух мезодермических, ограниченное снизу замкнутой кривой ct . Затем эта ситуация сохраняется, но правое острие перемещается до $u = +1$ (и даже дальше), а левое перемещается до $u = -1$ (но медленнее). В момент $t = \hbar h$ часть поверхности F , расположенная в $1 - a < u < 1$ (при малом положительном a) снова притягивается к положительным w , то есть к эктодерме. Когда поверхность F снова проходит через точку $\alpha' (u = +1)$, на линии пересечения поверхностей S и F ограничивающей листок мезодермы возникает точка возврата, называемая *гензеновским узелком*. Затем поверхность F продолжает подниматься, и кривая пересечения превращается в завиток. Внутренняя часть этого завитка, расположенная в области $w > 0$, представляет собой мезодермический осевой язык, который порождает *головной процесс* (head process) (рис 9-8).

Первичную полоску как и бластопор у амфибий можно также рассматривать как двойную линию эпибластического листка, ограниченного двумя ласточкиными хвостами. Точнее говоря, в плоскости эпибласта имеется особенность типа *губы*, ограниченная двумя *остриями* Риманна-Югонии. Однако тут условие Максвелла неприменимо. Хотя режим, связанный с мезодермой, потенциально сильнее режима эпидермы, мы считаем, что корректирующего скачка не происходит, и что имеет место *полная задержка*. (Рис. 9-9). Для этого достаточно допустить, что скачок в нижнем листке стабилизирует мезодермический процесс. Основание ласточкина хвоста, соответствующее точке горловины, существует только виртуально. Кинематику процесса задают *средние поля взаимодействия* векторов Y_1, Y_2 , сходящиеся к оси симметрии. В начале катастрофы захваченные полем клетки сходятся и создают локальное утолщение. Затем циркуляция организуется более экономным способом при помощи двух противоположно направленных потоков, которые создают снизу маленькую борозду. Позднее в Приложении мы покажем, как интерпретировать гензеновский узелок и образование конечностей.

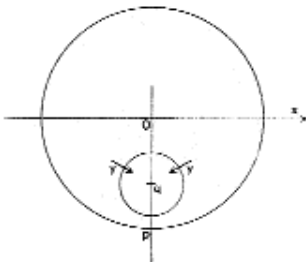


Рис. 9-6. Схема клеточной кинетики, порождающей первичную полоску.

Ясно, что на рассматриваемой поверхности S можно разместить два мезодермических полулистка, где роль

точек острия будут играть ласточкины хвосты. Я думаю, что введение этой поверхности можно также оправдать при помощи сравнительного изучения гаструляции у позвоночных.

**А. Сопоставительная топология
гаструляции у позвоночных**

Вернемся к стадии бластулы у амфибий. Мы имеем 2-сферу S^2 , области применения которой хорошо известны: эктодермический шар у животных, мезодермическая корона (ограниченная двумя параллельными кругами c_1, c_2) и эндодермический желточный шар. Схематизируя гаструляцию, можно сказать, что круг c_2 погружается внутрь сферы (рис. 9-11). После гаструляции мезодермы образуется цилиндр, соединяющий два круга — c_1 , расположенный на эктодерме, и c_2 , расположенный на эндодерме. Однако заметим, что топологическая непрерывность вдоль круга c_1 очень быстро нарушается. Учитывая это, рассмотрим яйцо типа *бластодиска* у птиц и млекопитающих. Согласно многим авторам, (ср. [3]) после отделения эндодермы от эпибласта очень неправильное углубление, разделяющее два листка, должно распространиться на бластоцель, как если бы вся бластула была расколота по желтку. Наша модель дает этой ситуации несколько иное объяснение. Вернемся к типичному случаю амфибий. Состояние после гаструляции можно геометрически схематизировать следующим образом. Пусть в трехмерном пространстве $Ouvw$ даны две концентрические сферы с радиусами r и R ($0 < r < R$). Внешняя сфера, на которой расположена эктодерма, продырявлена по окружности c_1 , расположенной на плоскости $w = R-h$, где h мало. Внутренняя сфера, на которой расположена эндодерма продырявлена вдоль окружности c_2 , расположенной в плоскости $w = -r+h$. Мезодерма представлена цилиндром C , с основаниями c_1 и c_2 , расположенным между двумя сферами. Гаструляция моделируется вращением эндодермической сферы вокруг оси Ouv . Цилиндр C следует за вращающейся сферой непрерывным образом (постепенно проникая во внутреннюю сферу). После поворота на 90° по отношению к полуоси $u > 0$, мы получаем ситуацию типа изображенной на рисунке 9-11. Мы получаем, таким образом, мо-

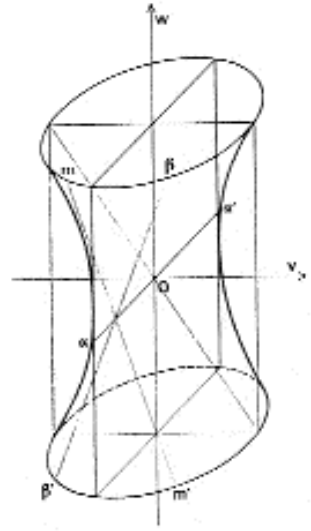
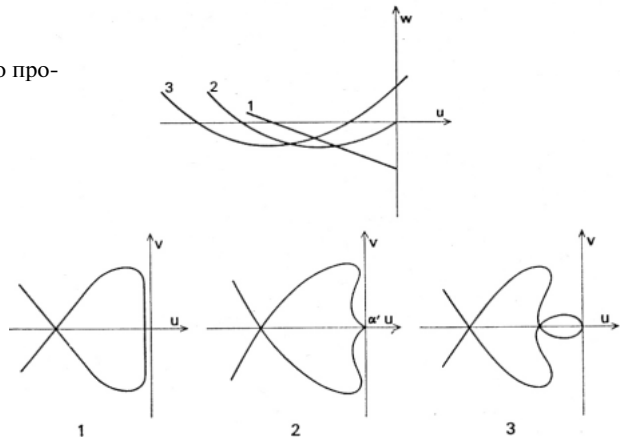


Рис. 9-7. Поверхность с двумя остриями.

Рис. 9-8. Диаграмма головного процесса (head-process).



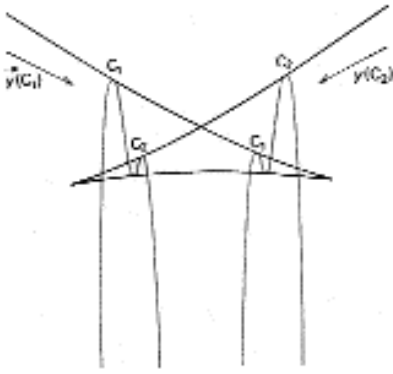


Рис. 9-9.

виях это минимальная поверхность).

По крайней мере один из двух градиентов, соответствующих эпи- и гипобластическому листкам (градиент голова-хвост и градиент левый-правый), нужно обратить. Вполне естественно считать, что цефало-каудальный коэффициент гораздо устойчивее градиента левый-правый (который на самом деле проявляется только после формирования сердца, нарушающего билатеральную симметрию). Окружности c_1 и c_2 также возникают при закреплении цефало-каудального градиента. Двойная линия поверхности S , которая является первичной, оказывается параллельной этому градиенту (рис. 9-12).

Наша схема бластодиска яйца птицы отличается от той, которая предложена в большинстве учебников. Мы предполагаем, что желточная пробка сначала покрыта пленкой, которая имеет задатки (virtualites) всех трех листков (трофобласт у млекопитающих). И только на бластодиске (*area pellucida*) непосредственно осуществляется расслоение на эктодерму и эндодерму, как если бы была непосредственно достигнута конечная стадия гастрюляции у амфибий.

Таким образом, в эпигенезе птиц и млекопитающих геометрически безупречная гастрюляция амфибий сменяется обобщенной катастрофой, которая в каком-то смысле сокращает дистанцию между индифферентным состоянием с большими регулятивными возможностями и состоянием постгастрюлы посредством перескока через этап бластула-гастрюла. Этот пример показывает, что закон, согласно которому эпигенез воспроизводит филогенез (*la loi de recapitulation*), является только относительно точным. Как и при изучении какой-либо науки обязательно воспроизводить весь исторический процесс ее становления (а достаточно взять только ключевые пункты), так и в эпигенезе происходят сокращения и упрощения, когда какие-либо унаследованные из прошлого механизмы перестают быть нужными.

Можно также спросить, почему в предложенной выше схеме эктодерма и эндодерма связаны с относительно жесткими сферами, тогда как мезодерма следует за их изменениями. Если придавать координатам значения биохимических градиентов, это означает, что на стадии протогаструлы эктодерма и эндодерма уже относительно сильно поляризованы, тогда как мезодерма, которая находится только в стадии организующего центра, еще сохраняет значительную лабильность. В любом случае эта схема задается только с точностью до гомеоморфизма. Известно, что контакт мезодермы с эндодермой (кривая c_2) под первичной полоской является очень кратковременным. Несомненно, что для понимания окончательной дифференциации

дель гастрюляции у рептилий (черепах), имеющих мезодермический хордиальный канал, направленный к отрицательным u вплоть до впадения в предзародышевое углубление. Координата u представляет собой цефально-каудальный градиент, возрастающий от головы к хвосту. Продолжим вращение эндодермической сферы вокруг Ov . Вращение на 180° начиная с положения, характерного для амфибий, переводит круг c_2 в круг c_2' , расположенный напротив c_1 (рис 9-12) и лежащий в плоскости $w=r-h$. Однако круги c_2 и c_2' имеют противоположную ориентацию. Цилиндр C , который всегда имеет край $c_2 - c_1$ или $c_1 + c_2'$, принимает форму поверхности S с двойным отрезком, ограниченным двумя точками острия (при данных усло-

(появление хорды, сомита и т.д.) было бы очень интересно проследить возникновение этого эпигенетического полиэдра, хотя, возможно, таксономическое сопоставление этих дифференциаций, не будет столь плодотворным, как в случае гастрюляции. В Приложении мы приводим модель нейруляции и возникновения позвоночной оси.

Теперь опишем несколько ситуаций, типичных для средней стадии эпигенеза.

9.6. МОДЕЛИ СРЕДНЕЙ СТАДИИ ЭПИГЕНЕЗА

А. Резонансное усиление индукции: glandулярная модель

Как мы видели, первичные дифференциации при морфогенезе заставляют обращаться к элементарным катастрофам в пространстве-времени типа особенности Риманна-Пюгонии и ласточкиного хвоста. На самом деле, другие варианты невозможны, поскольку в данном случае возможен только один «родительский» режим, единственный материнский креод. Поэтому происходит разложение на листки, в котором проявляется эффект ударной волны. Но помимо расщепления на листки эпигенез требует многих других геометрических схем. Кроме того, катастрофы статического типа, упомянутые выше, в принципе не могут быть катаболическими (с уменьшением размерности аттрактора). Вот почему после нейруляции происходят обобщенные катаболические катастрофы, вызываемые резонансом. Почти все железы, то есть органы секреции, возникают в результате взаимной индукции между эпителием и мезэнхимой, которую много изучали в последнее время. Мы будем интерпретировать ее следующим образом.

Предположим, что мезэнхима характеризуется аттрактором градиента статического поля $V: M_1 \Rightarrow R$. Пусть u – локальные координаты на M_1 . Аналогичным образом, эпителий характеризуется аттрактором поля $\text{grad}W$, где $W: M_2 \Rightarrow R$ и где v – некоторая точка из M_2 . В области, где индукция отсутствует, эти две ткани не действуют одна на другую, что динамически выражается тем, что ни на одной из тканей нет потенциала взаимодействия $H(u, v)$. Напротив, в зоне индуктивного контакта появляется (возможно, в результате резонанса между двумя аттракторами метаболического типа) значительный по отношению к V и W потенциал взаимодействия $H(u, v)$. Иначе говоря, мезэнхима M и эпителий e претерпевают обобщенную катастрофу, вызванную появлением новой фазы m аттрактора $(V+H)=0$ в мезэнхиме, и новой фазы e' аттрактора $\text{grad}(W-H)=0$ в эпителии. Появление и последующее расширение области взаимодействия (резонанса), как известно из опыта, управляется следующим механизмом: новая фаза

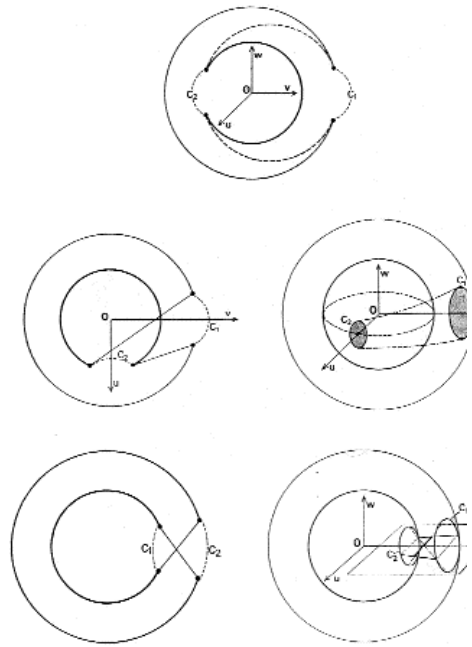


Рис. 9-10, 9-11, 9-12. Последовательные этапы гастрюляции у позвоночных, моделируемые с помощью вращения эндодермической сферы.

за m в мезэнхиме подчиняется градиенту, который увлекает ее к эпителию. В этих условиях (см. главу 6) происходит обобщенная катастрофа с пространственным параметром. Новая фаза m растекается к эпителию, образуя струйки, которые затем соединяются и заканчиваются на относительно малых участках эпителия p , (являющихся будущими эмонкториями будущей железы). Но на новую фазу эпителия e' этот градиент действует в обратном направлении (поскольку H в этом случае имеет знак минус). Поэтому эпителий проникает в мезэнхиму, отталкивая струи этой катастрофы от резонансных участков p . Эта обратная катастрофа сталкивается с катастрофой мезэнхимы, так что последняя сгущается вокруг струек. В общем случае процесс стабилизируется на середине посредством устойчивого переходного режима между m и e' , который в результате взаимодействия с сосудистой системой мезэнхимы приводит к образованию органов секреции различной физиологии (альвеолы легкого, гломерулы почек, ацинус)

Если между двумя тканями расположить тонкий фильтр, не препятствующий диффузии, но препятствующий контакту, каждая из тканей входит в катастрофу самостоятельно, и между возникающими органами не наблюдается никакого пространственного соответствия.

Относительно предложенной выше модели можно задать вопрос: происходит ли катастрофа новой мезэнхимы m в действительности? Я думаю, что эту катастрофу следует считать виртуальной: действительные движения мезэнхимы ограничиваются сгущением в трубки вокруг эпителиальных струек. Это ставит интересный вопрос: в какой степени топология ветвления отростков железы задается генетически? Правдоподобно считать, что только в слабой степени. Малейшие изменения в идущей мезэнхиме могут привести к очень различным расположениям, однако окончательные органы не будут от этого менее функциональными. Неисправимые поклонники биологической целесообразности часто ссылаются на сосудистую систему или на древовидное строение бронхов как на пример очень сложной структуры, которая наилучшим образом приспособлена для выполнения своей функции. Речь в данном случае идет о формах, порождаемых катастрофами с пространственными параметрами. Несмотря на то, что они имеют большую топологическую сложность, порождающий их механизм относительно тривиален, и они сами несут мало информации. В статье С.Улама [4] приводятся примеры древовидных форм (вроде снежинок), порождаемых относительно простыми рекуррентными процессами. Перед математиками открывается совершенно новая задача изучения форм, возникающих при обобщенных катастрофах в гомогенной среде.

В этом примере индукция была предложена симметричной, и мы не уточняли, что именно производит индукцию, а что подвергается действию индукции. Однако в общем случае индуктором является эпителий. Это значит, что эпителий обычно жестче определен и менее лабилен, чем мезэнхима, которая как правило сохраняет большую восприимчивость.

Б. Пример. Морфогенез конечностей у позвоночных

1. Морфогенетическое поле кости. В противоположность древовидным структурам, связанным с пространственными катастрофами, слабо контролируемым локально, морфогенез *костей* и прикрепленных к ним *мышц* ставит задачи, которые кажутся пугающе сложными даже в чисто концептуальном отношении. В представленной здесь модели заложена идея, которая, на мой взгляд, не может быть существенно упрощена. Кроме того, я оставляю в стороне следующую теоретическую проблему, возникающую в связи с этой моделью: откуда у креода, связанного с костью, берется метрическая структура? Существование локальных метрических координат, связанных с костью, становится очевидным после завершения окостенения, однако данная модель требует введения этих координат задолго до окостенения, самое позднее на предхрящевой стадии. Что же является биохимической основой этих координат,

этой поляризации? Мы вернемся к этому вопросу в 10 главе (см. 10.5.3).

Упомянув проблему ригидности креодов в морфогенезе костей, обратимся к другому проблематичному аспекту эпигенеза скелета. Нужно объяснить, каким образом могут сформироваться поверхности сустава между двумя последовательными костями, при условии, что сустав ранее не функционировал, и кости никогда не двигались одна относительно другой. Предлагаемая нами модель основывается на следующей интуитивной идее. Морфогенетическое поле, будучи геометрической сущностью биохимической кинетики органа O , содержит информацию, необходимую не только для геометрической реализации O , но также и для виртуального выражения всех физиологических возможностей органа O . В этом смысле морфогенетическое поле кости O_i задает не только пространственную форму O_i , но также совокупность возможных положений O_i по отношению к организму. Действительно для кости конечности, например, плечевой или берцовой связанное морфогенетическое поле *содержит не только форму данной кости, но и множество возможных перемещений этой кости по отношению к смежным* (по отношению к лопатке для плечевой кости или по отношению к тазобедренной кости для берцовой). Множество положений кости по отношению к смежной задается областью определения G группы вращений $SO(3)$, полностью характеризующей геометрию сустава.

В начале образования зародыша кости, на эктодерме появляется характерный выступ, апикальный бугорок. Известно, что полное или частичное удаление этого бугра полностью или частично останавливает развитие костей в дистальных отделах зародыша. Роль этого бугорка в развитии организма многократно обсуждалась. В предлагаемой здесь модели апикальный бугорок играет только вспомогательную роль, которая в некотором смысле является чисто геометрической. Он создает в мезенхиме «поляризацию», что способствует чисто формальному разделению костных полей. Вся информация необходимая для образования скелета и суставов содержится в мезэнхиме. Но эта информация может быть использована только при взаимодействии с бугром.

Пусть многообразие M — это внутреннее пространство, параметризующее локальные метаболические состояния мезэнхимы, а многообразие Q , предполагаемое изоморфным группе евклидовых движений — внутреннее пространство бугра. Упорядочим кости, начиная с ближних и переходя к дальним, помечая каждую кость номером, зависящим от ее удаленности. Две кости, помеченные одним и тем же номером, назовем гомологичными (например, большую и малую берцовые кости, фаланги пальцев и т.д.). Допустим, что аттрактор, связанный с костью ранга k , находится в многообразии M Q вида $M q_k$, где q_k это точка из Q , соответствующая целому числу k . Две кости одинакового ранга k имеют в $M q_k$ разные аттракторы. Можно допустить, что разделение зачатков гомологичных костей происходит в результате взаимодействия метаболического режима, задаваемого аттрактором в M , с цефало-каудальным градиентом всего организма. При этом можно считать, что первоначально аттрактор костного режима имеет вид $c Q$, где второй множитель Q , отвечающий за взаимодействие с бугром, допускает эргодическую вариацию представляющей точки. Однако в течении короткого времени эта ситуация вырождается посредством катаболической катастрофы. Вариация на Q превращается (под воздействием гипотетического градиента близкий — далекий) в переменное градиентное поле с аттракторами q_1, q_2, \dots, q_k , которые соответствуют более или менее отдаленным положениям кости в конечности. Зачаток кости ранга k возникает под действием режима c, q_k вызывающего сгущение мезэнхимы в данной области. Рассмотрим подробнее связь между костями ранга k и ранга $k+1$, т.е. образование соответствующего сустава. Пусть A — ближняя кость ранга k , а B — смежная с ней кость ранга $k+1$. Поверхность сустава нужно рассматривать как фронт ударной волны, то есть поверхность конфликта между режимами c, q_k и c, q_{k+1} . Однако в зоне конфликта между режимами очень часто возникают колебания между двумя конкуриру-

ющими режимами (далее мы объясним, почему). Более того, можно допустить, что стабилизация режима в Q осуществляется в направлении ближний \Rightarrow дальний. Режим c, q_k , как мы предположили, стабилизируется на зачатке A , тогда как аттрактор зачатка B , напротив, меняется в области W из Q , которая содержит q_{k+1} . Эта область W задает все возможные положения B по отношению к A при помощи следующего механизма: предполагается, что кость A задается жестким креодом с координатами x, y, z , где x, y, z — это биохимические параметры неизвестной природы. В этом креоде кость B , согласно предположению, задается уравнением вида $S(x, y, z; q) = 0$, где S — относительный избыток энтропии режима B по сравнению с режимом A . Переменная q обозначает переменный аттрактор режима B . Фундаментальная гипотеза состоит в следующем: в результате соответствующего биохимического взаимодействия, если точка q в Q имеет вид $q = Dq_k$, где D — движение, то

$$S(x, y, z; Dq_{k+1}) = S(Dx, Dy, Dz; q_{k+1})$$

Следовательно, в креоде, соответствующем A , ударная волна, отграничивающая B , меняется в зависимости от положения q в области W . Режим A может быть устойчивым только в той части креода, которая никогда не подвергается действию режима B . Все происходит так, как если бы форма кости A получалась в результате *состругивания* с кости B всех положений из области W . Эти положения, очевидным образом, содержат множество группы вращений, образованное функциональными положениями B по отношению к A . Но можно предположить, что по крайней мере в начале область W является более широкой и также содержит нефункциональные положения, как если бы B была вывихнута из сустава. Это позволяет объяснить образование на поверхности A выступов (как в случае локтевой кости), которые ограничивают перемещения B . Позднее область W ограничивается той частью группы вращений, которая соответствует нормальной работе сустава.

Этот механизм позволяет объяснить адаптацию поверхностей сустава. Возможно, что механизм образования других ограничивающих поверхностей, а именно боковых поверхностей длинных костей, менее сложен. Он напоминает стабилизацию страты конфликта, связанного с альтернативой сохранения и разрушения.

2. Формирование мышц, присоединенных к суставу. Когда формируется сочленение двух костей A и B , можно допустить, что переходный режим между режимами A и B , характеризуемый областью W группы вращений, распространяется путем диффузии на соседнюю мезенхиму, из которой впоследствии образуются мышцы. Трансформация клетки мезэнхимы в мышечную клетку (миобласт) геометрически характеризуется появлением у этой клетки определенной полярности, которую мы обозначим вектором Y . Миобласты группируются в мышечные волокна, касательные в каждой клетке к вектору Y . Вектор Y также описывает силу, с которой клетка действует на свои концы при сокращении. Известно, что дифференциация эмбриональных клеток мезэнхимы в миобластах наблюдается и в культурах *in vitro* и не требует специфического возбудителя. Естественно предположить, что присутствие в мезэнхиме суставного режима только способствует этой дифференциации.

В рассматриваемый период времени, когда сустав A, B находится в процессе становления, в переходном режиме $A \Leftrightarrow B$ происходит важное явление. Сначала этот режим характеризуется эргодической вариацией представляющей точки в области W группы вращений $SO(3)$, которая представляет множество функциональных положений B по отношению к A . Немного позже эта эргодическая вариация претерпевает катастрофу следующего вида: область W может быть разложена по траекториям подгрупп с одним параметром, число которых (равное размерности W) равно самое большее трем. Пусть X_1, X_2, X_3 — соответствующие векторные поля. Итак, движение представляющей точки m в W получается путем суперпозиции колебаний (маятникового типа) вдоль направлений, задаваемых X_1, X_2, X_3 , и при этом каждое из этих колеба-

ний имеет определенную амплитуду и период (однако соответствующие фазы произвольны). Если это так, то можно допустить, что поляризация клетки в миобласте оси Y на самом деле биохимически взаимодействует с окружающим суставным режимом, который можно описать следующим образом. Пусть O – центр вращения сустава. Допустим, что когда представляющая точка t данного биохимического состояния в жестком креоде с центром O пересекает миобласт, расположенный в точке p в направлении вектора Y , она испытывает в пространстве M Q вариацию, проекция которого на Q задается формулой

$$dm = Y \wedge pO$$

где dm можно рассматривать как бесконечно малое вращение, т.е. как вектор, касательный к $SO(3) \supset Q$. Но я настаиваю, что это линейное отношение между Y и dm должно рассматриваться как *биохимическая связь, которая воспроизводит механическое соотношение*. Таким образом, из факта существования суставного режима следует, что вариация t параллельна одному из векторов X . Из-за резонанса поляризация Y будет в первую очередь такой, что $Y \wedge pO = kX$. Это значит, что мышечные клетки будут возникать в плоскостях, перпендикулярных векторам. Они организуются в мышечные волокна, постепенно соединяя A с B . Каждый вектор порождает пару соперничающих мышечных зачатков, один из которых является растягивающим, а другой стягивающим (в зависимости от знака X). Допустим, что поляризация Y является переходным явлением, которое распространяется вдоль волокна с постоянной скоростью. Тогда среди всех волокон параллельных Y и соединяющих A с B по длине имеется единственное, такое что если один конец A находится в режиме q^a , то другой конец всегда будет находиться в режиме q^b (по крайней мере в проекции на Q). Такое волокно, длина которого пропорциональна периоду колебаний T оси X , представляет собой систему поляризации, синхронизированную с окружающим суставным режимом. Из этого следует, что оно входит в резонанс и притягивает соседние волокна такой же длины. Так формируется зачаток мышцы. В случае простого сустава он состоит самое большее из трех пар мышц.

Разумеется, приведенная выше схема допускает многочисленные уточнения. Возможно, в частности, что образование мышцы в гораздо большей степени предопределено генетически. Возможно, что точки прикрепления связок контролируются лучше, чем показывает эта схема. Кроме того, вышеприведенную модель трудно приспособить к случаю длинных мышц, соединяющих не смежные кости. Однако даже если существующие механизмы лучше контролируются генетически (но каким образом?), модель такого типа сохраняет свое значение для эволюционного объяснения функциональной приспособленности мышц и костей.

Заметим, наконец, что образование и ориентация мышц сустава A ведет к затуханию суставного режима (A, B), занимающего область соединения костей сустава. Если возникает какая-либо помеха эффективному функционированию сустава, например, недостаток иннервации или механическая блокировка, то локальный суставный режим захватывается костным, более вырожденным, и сустав исчезает. Это называется анкилозом.

9.7. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЙ ЭПИГЕНЕЗ

A. Несколько архетипических креодов, связанных с омбилическими точками

1. Креод захвата. Оставив на какое-то время эмбриологию, мы опишем динамическое происхождение креодов, при помощи которых живое существо захватывает пищу извне. Речь будет идти о математическом описании явлений *фагоцитоза*, *пиноцитоза* и т.п. у одноклеточных и их органических эквивалентов у *многоклеточных*.

На рис. 9-13 изображена универсальная развертка параболической омбилики (с добавле-

нием стабилизирующих членов четвертого порядка). Вначале мы рассмотрим ситуацию, к которой приводит образующая деформация эллиптической омбилики. Имеется площадка (7) в форме гипоциклоиды с тремя возвратами. Это вогнутая зона треугольного сечения (аналогичная нервной пластине в эмбриологии позвоночных), которая является поворотным пунктом всего процесса. При приближении добычи эта напряженная эллиптическая ситуация развивается в сторону гиперболической. В O образуется гиперболическая омбилика (рис. 9-14), и в результате сопутствующей катастрофы режим (7) захватывается более простым и менее напряженным режимом (3). Две внешние губы (7) вытягиваются вонне организма и соединяются, захватывая частицу внешней среды. Когда это происходит, добыча p захватывается в вакуоль, которая превращается в пищеварительную вакуоль. Как видно на рис. 9-15, ситуация снова становится эллиптической. Роль режима 7 теперь играет добыча p (поначалу живая). Переваривание и постепенное уничтожение добычи описываются трансформацией гипоциклоиды (7) в круг-точку (эллиптическую омбилику) (рис. 9-16).

Эта общая схема представляется приложимой в общих чертах к одноклеточным типа амёб. Иногда фагоцитозу предшествует выбрасывание псевдоподии. Речь идет о струе эллиптического обрушения. Захват происходит на конце струи путем развития в сторону локально гиперболического состояния. В других случаях фагоцитоз (или пиноцитоз, согласно некоторым авторам) происходит путем совмещения плазматической мембраны с телом клетки. Предыдущая схема применяется здесь с некоторой асимметрией. Имеется третий процесс (называемый *рофеоцитозом*), который происходит на уровне ультраструктуры (300 ангстрем в диаметре). Клеточная мембрана проникает в глубокие провалы (1000 ангстрем) как в пальцы перчатки, которые затем закрываются, образуя вакуоли. Несомненно, в этом последнем явлении следует видеть разновидность обратной (дуального, как говорят в топологии) эллиптической омбилики, «пустой волос» (рис. 9-17).

Это описание показывает, что типичный захват является разновидностью *обратного гиперболического обрушения*. Сначала имеется органически стабилизированное *острие*, которое затем превращается в полостную волну, полость в которой образуется добычей.

Вернемся теперь к ротовому креоду. Данное выше математическое описание можно улучшить, применяя принцип стабилизации порогов. Поскольку время перехода между гиперболической омбиликой и эллиптической ситуацией является критическим, имеет смысл стабилизировать орган в параболическом положении, свободном от локальных вариаций. Рассмотрим чистую параболическую омбилику и вариации этой омбилики, оставляющие ее в параболическом состоянии и не нарушающие симметрию x (Примечание 1). Таким образом, мы приходим к изучению функции

$$V(x, y) = x^2y - kx^2 + W \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} - ux - vy \quad (OP)$$

Обычные вычисления дают:

$$u = 2x(y - k) \quad v = x^2 + Wy + y^3$$

и для критической кривой C

$$\begin{aligned} \frac{D(u, v)}{D(x, y)} &= 0 \\ 4x^2 &= 2(y-k)(W+3y^2) \end{aligned} \quad (\text{Рис. 9-18})$$

Придадим k отрицательное значение и будем изменять W от положительных значений к отрицательным. При $W=0$ C имеет в начале координат двойную точку с различными касательными. При $W<0$ кривая C распадается на две связанные составляющие, одна из которых компактна (и лежит между k и $-W/3$). Образ этой составляющей имеет на плоскости Ouv три

возврата (один из которых лежит на оси симметрии $u=0$). При очень малых положительных W , как мы видим, S связно. Но при W стремящемся к $+0$, два возврата сталкиваются в начале координат на значительном расстоянии от начала координат остаются два других возврата. На плоскости образа Ouv каждая ветвь критической кривой содержит по два завихрения, составляющих ласточкин хвост. При W стремящемся к 0 , эти точки смыкаются *клюв в клюв* на оси симметрии Ov . Таким образом рот закрывается (см. рис 9-19). Возвраты, остающиеся после закрытия рта, обозначают губы. Было бы разумно интерпретировать внутренние возвраты как органы вроде зубов (имея в виду окончательную стабилизацию локальных порогов, возникающих в момент закрытия). У млекопитающих рот закрывается при помощи костей челюсти, при том что изменения в данном креде происходят за счет мышц лица. Тут не встает вопрос об описании всего многообразия морфологии захватывания добычи у животных. Но можно полагать, что в основе всех ее проявлений у различных видов животных лежит одна и та же особенность локального потенциала V . Таким образом объясняется образование химер, как в хорошо известном эксперименте Спеманна, где эктодерма тритона способствует в силу своих генетических свойств аномальному развитию рта у головастиков.

Возможно, что закрытие нервной пластинки у позвоночных допускает аналогичную модель. Однако в этом случае внешние возвраты (это нервные хребты) после закрытия становятся неустойчивыми и опускаются под эпидерму. Наиболее интересным представляется детальное изучение динамики образования эмбриональной оси у позвоночных (ср. Приложение).

2. Генитальные креоды. Испускание гамет у взрослого многоклеточного это типичное явление обрушения. Но следует заметить, что биохимическое созревание гамет значительно предшествует (по времени) их пространственному выбросу вовне, которое (по крайней мере, у мужских особей) собственно и является половым актом. Морфология в данном случае относится к подавленному или виртуальному обрушению. Поэтому кажется естественным вновь обратиться к параболической омбилике, то есть особенности, при помощи которой некоторая порожденная структура отделяется от родительского организма, в котором находится ее организующий центр. Возьмем снова уравнение (OP) и положим $W=0$, а k — отрицательным. Мы получим рисунок 9-20 (где ось Ov перевернута), соответствующий гермафродитной ситуации. Область (5) представляет собой гонаду, а возвраты (7) — гаметы, обрушивающиеся на гонаду.

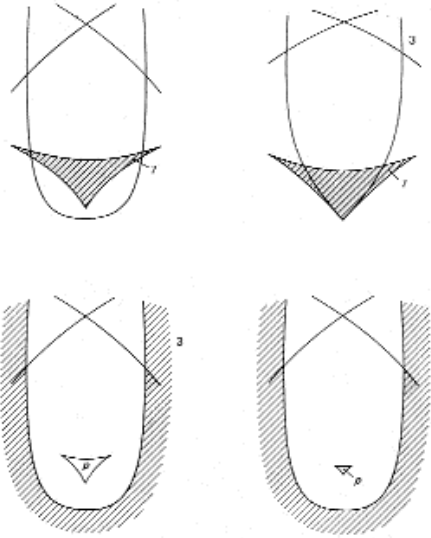


Рис. 9-13, 9-14, 9-15, 9-16.

Схема захвата (точную конфигурацию режима 3 см. на рис. 5-23).



Рис.9-17.Пофеоцитоз.

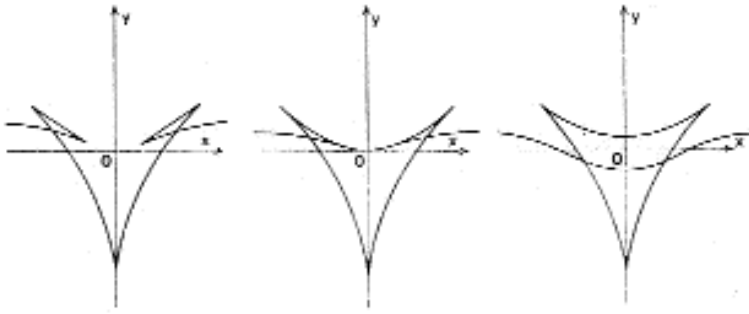


Рис. 9-19.

к деформации, изображенной рис. 9-25 (излишне напоминать, что один известный гриб называется *Phalus impudicus*, т.е. бесстыжий фаллос). Аналогия рисунка 9-24 с внутренней частью фигуры f , то есть фигурой 9-20-с, легко объясняется, если рассматривать спаривание как обратимый захват.

Можно возразить, что все эти аналогии во многом произвольны. Всякий математик мог бы заявить, и не без оснований, что можно построить не менее осмысленные кривые меньшими усилиями. На это я могу ответить только то, что меня привела к этим кривым теория структурно устойчивых особенностей с дополнительным постулатом о двусторонней симметрии x и гипотеза о стабилизации омбилики в параболической ситуации.

Можно ли критиковать эту последнюю гипотезу? Пол человеческого эмбриона долго остается неопределенным, конечно, не потому, что в соответствии с законом воспроизведения филогенеза в онтогенезе наши предки были гермафродитами. Скорее это происходит потому, что эпигенез, создавая мужские и женские особи, считает более экономным сначала установить *пороговую ситуацию*, выбирая затем то или иное направление развития в течении короткого промежутка времени. Не наблюдается ли здесь также эффект стабилизации порогов?

Другая проблема, возникающая в ходе этого исследования, касается появления *вторичных организующих центров* в креоде первичного организующего центра. В вышеприведенном примере вторичный центр появляется в особенности первичного креода (а именно, в возврате a). Очень соблазнительно думать, что на самом деле вторичный организующий центр появляется в результате фокусировки, иногда на достаточно большом расстоянии от первичного центра. Подобным образом *тройной хлопок*, вызываемый прохождением сверхзвукового самолета, может проявляться очень локализованно на большом расстоянии от траектории самолета. Остается объяснить, почему в подобном случае производные особенности получаются очень сложными, иногда даже более сложными, чем первичные, что в принципе исключено в глобальных статических моделях. Соблазнительно также считать, что ограничения, накладываемые на голономию $V_{xy} = V_{yx}$ (или более тонкие ограничения на стабилизацию порогов), которые, как известно, приводят к тому, что критические значения и внешние контуры приобретают более сложные особенности, чем обычные образующие особенности, проявляются на значительных расстояниях от центра первичного креода.

В том же ряду идей, вероятно, можно допустить следующую мысль: если A — центр, производный от первичного организующего центра O , то морфогенез, связанный с A , разворачивается преимущественно в плоскости, перпендикулярной радиус-вектору OA . В противоположность этому, вдоль радиус-вектора OA обычно возникает периодическая структура, извест-

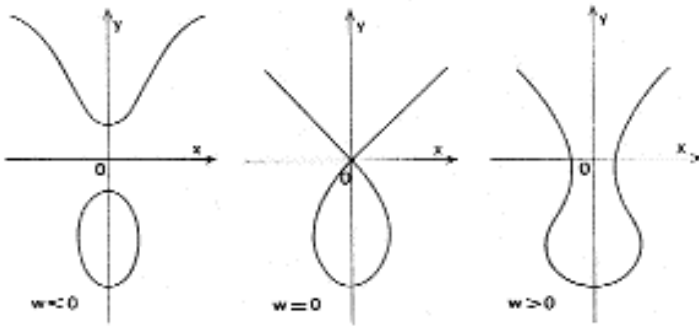


Рис. 9-18.

При отрицательных W получается мужская деформация, изображенная на рис. 9-21. Критическая кривая C распадается на две связанные составляющие. Гаметы (7) отделяются топологически от стенки гонады и принимают режим (5), который разрезает эту стенку. Это означает, что эти гаметы начинают стремиться выйти из гонады (так образуется спинномозговая составляющая). При положительных W мы имеем кривую 9-22. На этот раз гаметы (7) остаются вместе со стенкой (кортикальной), однако яйцевод распространяется к положительным v вплоть до верхнего возврата a . Если отбросить этот возврат, предполагая, что кривая C перемещается в Oxy параллельно себе (знак перемещения задается вариацией в окрестности O), мы получим кривые m и f — соответственно, мужскую и женскую. Было бы наивно настаивать на подобии кривой f конфигурации пестика.

На самом деле по очевидным физиологическим причинам возврат a , которым заканчивается выводящий канал, должен открываться наружу. Это свойство не может быть получено в алгебраической модели OP , которая является для этого слишком локальной. Связь выводящего канала гонады с внешним миром должна осуществляться посредством другой особенности, другого организующего центра. Любопытно, что здесь мы снова сталкиваемся с кривой OP , разворачиваемой в двух ортогональных направлениях дополнительным образом. У мужских особей (например, у людей) кривая OP разворачивается в направлении ближний-дальний, однако m при этом эволюционирует. Появляется зачаток яйцевода (канал Мюллера) который впоследствии атрофируется, когда закрывается и утолщается перегородка D , что соответствует закрытию мочепоолового синуса в углублении мошонки. Эволюция f происходит в перпендикулярном направлении, параллельном телу и касательном к коже: пенис образуется путем вытягивания генитального бугорка при свободном сообщении этого нового органа с новым углублением мошонки (5) (см. примечание 2). У женщин происходит комплиментарное развитие: f эволюционирует в направлении дальний-ближний с образованием канала Мюллера и открытием губ (7). В перпендикулярном направлении происходит эволюция m , при которой половой бугорок деградирует в клитор (6). Образование железы на конце пениса соответствует действию третьего организующего центра, производного от второго. Его можно представить с помощью *гиперболической омбилики*, задаваемой формулой

$$V = x^2 y - kx - \frac{3}{2}y^2 + y^4 - ix - yv$$

при $k=1$ (РОН).

Кривая C имеет двойную точку с координатами $x=0, y=1$. В плоскости Ouv имеется типичная грибовидная конфигурация (рис. 9-24). Изменение коэффициента k при x^2 ($k>1$) ведет

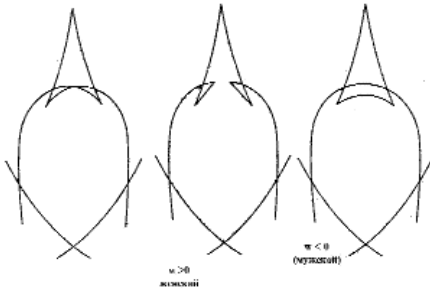


Рис. 9-20. Рис. 9-21. Рис. 9-22.

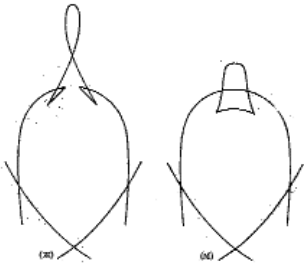


Рис. 9-23

ная в биологии под названием *метамерной*.

Возможные примеры: в ультраструктуре, ось центриоля-потомка перпендикулярна оси центриоли-родителя. Следует ли считать центриоль короткофокусным устройством, чем-то вроде собирающей линзы локального метаболизма?

Если первичный организующий центр локализован на дорсальной губе бластопора, то вторичный центр локализован на переднем конце хорды. Соответствующий морфогенез – морфогенез нервной пластинки – проявляется преимущественно в перпендикулярном (билатеральном) направлении в виде сворачивания пластинки. В радиальном направлении имеется метамерическая структура сомитов.

В размножении кишечнополостных, оболочников (Tunicata) и т.п., когда животное размножается делением или почкованием столона, морфогенез проходит в плоскости, перпендикулярной оси столона, тогда как

вдоль этой оси возникает приблизительно периодическая структура.

Добавим, что принцип такого рода применительно к неживой природе может помочь понять древовидный рост кристаллов.

ДОПОЛНЕНИЕ

Нейруляция и образование позвоночной оси. Вернемся к гастрюляции у курицы на стадии первичной полоски. Известно, что развитие головного конца этой полоски через некоторое время останавливается, и возникает гензеновский узелок. Затем этот узел деградирует в направлении хвоста, однако появляется хорда, которая вытягиваясь под эпибластом, вызывает нейрализацию лежащей под ней эпидермы. После этого происходит образование сомитов с обеих сторон хорды, которые разделены боковой мезодермой, которая выворачивается, образуя два листка (соматоплевуру и спланхноплевуру), окружая целому. Однако нейрализованная эпидерма в нервной пластинке разбивается на капли. Нервные складки последовательно продвигаются спереди назад, образуя нервную трубку. В итоге из мезенхимы сомитов (склеротомы) и нервных гребней вокруг нервной трубки формируются периодические кольцевые структуры. Окостенение колец порождает позвонки, а хорда деградирует и исчезает.

Интерпретация столь сложной морфологии, очевидно, является очень трудной. Предлагаемые нами алгебраические модели не могут избежать произвольности, и мы даем их с оговорками, касающимися их применимости.

Исходная качественная идея заключается в том, что хорда из-за своей жесткости должна описываться той же динамической характеристической схемой, что и другие вытянутые органы, например, конусом, ограниченным эллиптической омбиликой, сечение которой представляет собой слой-организатор в виде гипоциклоиды с тремя возвратами. В то же время, можно допустить, что локальная динамика остается приблизительно инвариантной при пере-

носах, параллельных хорде, и кроме того является билатеральной относительно плоскости симметрии этого органа. Это ведет к допущению, что локальная динамика в окрестности оси задается статическим полем, которое является разверткой параболической омбилики, типа рассмотренных выше в главе 6 А. В этой модели удлинение ростка при нейруляции должно рассматриваться как контролируемое обрушение, ослабленное параболической ситуацией.

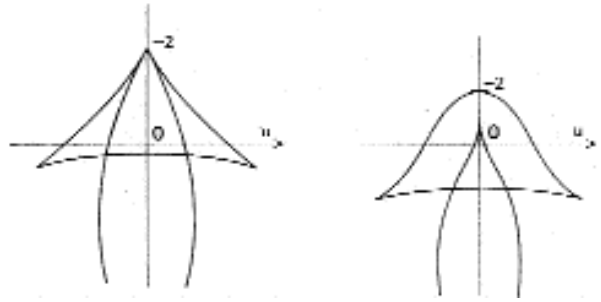


Рис.9-24 и 9-25. Деформация универсальной развертки гиперболической омбилики.

Начало образования гензеновского узелка представляет собой загадку. Несмотря на гибкость наших методов, этому явлению трудно найти удовлетворительную модель. Наиболее правдоподобная гипотеза состоит в том, что ласточкин хвост в головном конце первичной плоскости вырождается в уплощение, и при этом кривые, определяющие эктодерму и мезодерму, оказываются касательными, а ласточкин хвост рассасывается. После катастрофы неясной природы, которая, несомненно, порождает виртуальный листок, действующий на эктодерму (и имеющий возврат, соответствующий эндодерме) мы получаем рис. 9-26. Заштрихованная зона, обозначающая хорду, покрывает только часть криволинейного треугольника. Точка, проникающая в эктодерму, указывает на нервное возбуждение. Перемещаясь вперед, эта точка погружается под эктодерму, где хорда заканчивается эллиптическим омбиликом (рис. 9-26-5). Когда гензеновский узелок начинает отодвигаться в сторону хвоста, картина усложняется. Ласточкин хвост развивается в направлении точки, в которой дуга пересекает ось симметрии. Этот ласточкин хвост протыкает дуги 1-4 и 1-10, ограничивающие хорду (рис. 9-27). В итоге получается нечто вроде пятиконечной звезды, пересеченной горизонталью, которую можно с большой долей правдоподобия считать управляющей плоскостью мезодермы. Четырехугольники подобные 23/1т задают сомиты. Точки подобные *mlg*, которые погружаются в эктодерму, символизируют появление нервных гребней. Треугольники подобные 345 представляют боковую мезодерму, внутренность которой это целома. В точке 3 середине медианного слоя развертывается промежуточный элемент, основа будущей железы (На самом деле точка 5 имеет два симметричных представителя).

Рассмотрим теперь эктодерму. Под действием нейрогенного влияния мезодермы она приобретает локальную динамику, задаваемую потенциалом I_1 , которая связана с потенциалом мезодермы V соотношением вида $V + I_1 = \text{const}$. Допустим также, что координаты развертки u, v для V совпадают с координатами развертки I_1 , но с переменной знака координаты u , которая задает дорсовентральный (спина-живот) градиент. Тогда организующий слой нервной ткани будет располагаться симметрично по отношению к тому, который получается для развертки V в мезодерме. Однако поскольку эктодерма дает некоторое запаздывание, эта фигура возникает только после последовательного прохождения схем, заданных на рис. 9-28, а-б-с. Таким образом моделируется закрытие нервного желобка. В конце концов получается ласточкин хвост 5'7'9', симметричный 579. Он символизирует образование передних (моторных) выступов спинного мозга. После того, как точка 1' оказывается поверх дуги 8'7', получается схема H , моделирующая серое вещество спинного мозга. Двойные точки 4' и 10' оболочки

нервных складок становятся задними сенсорными выступами. Периодичность сомитов может быть проинтерпретирована следующим образом: пусть x — координата, задающая цефало-каудальный (голова-хвост) градиент. Вообще говоря, локальная динамика (эктодерма и мезодерма) инвариантна относительно переносов, параллельных x . Однако можно допустить, что в конце катастрофы эта симметрия разрушается. Возникает возмущение вида $V + \cos x$, $V_1 - \cos x$, которое действует на развертку симметричных ласточкиных хвостов 578 и 5'7'8'. Эти ласточкины хвосты конкурируют в одной и той же околоосевой области. Там, где доминирует V , образуется сомит, а где доминирует V_1 , образуется межсомитный интервал.

Когда горизонтальная линия $mpqr$ перемещается вниз, хорда отмирает, и часть сомитов разлагаются на мезенхиму (склеротом). Здесь наша модель перестает работать. Оценки градиента, заданного на схеме регуляции (гл. 10, §2 Г) позволяют понять, почему мезенхима окружает нервную трубку (в сомитической зоне). Обозначим через r функцию, которая возрастает от состояний r к состояниям s ; таким образом имеет максимум на границе невроцели. В действительности невроцель обеспечивает у животных представление внешнего мира. Поскольку эпидерма принимает нижнее значение в костной мезенхиме, последняя инфильтруется между нервной трубкой и эпидермом. Можно допустить, что когда нервная трубка занимает центральный многоугольник 23568, в этой ткани происходит восстановление организующего центра мезодермы в соответствии с рис. 9-27. Общая схема позвоночника напоминает своими отрезками пятиконечную звезду типа изображенной на рис 9-27.

Будет несомненно интересно продолжить такого рода интерпретацию анатомии нервной системы. Приведем еще два примера: натяжение ласточкина хвоста 5'7'8' (симметричного 578), который задает двигательные выступы, должно также происходить в спинном мозгу на уровне его связи с головным мозгом. Может быть, в этом следует усматривать причину увеличения чувствительных и двигательных волокон на уровне глазного яблока.

Интерпретация невроцеля как «вместилища бесконечного» внешнего мира находит странное подтверждение в головном конце этого углубления. Известно, что в головном мозгу невроцель делится на два выступа, которые являются покровами внутренних углублений в стебельках зрительных волокон при образовании глаз. Можно сказать, что невроцель заканчивается с головной стороны на *глазной сетчатке*, которая очевидным образом является нервной зоной, специализирующейся на особенно точном воспроизведении отдаленных внешних процессов.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Эти особенности могут рассматриваться как *особенности сложных отображений*. Первая катастрофа ставит в соответствие внутреннюю переменную x внешней переменной u по формуле $u = x^2$. Затем эта переменная u появляется как внутренняя переменная (с другой координатой y) во второй катастрофе, задаваемой квадратичным потенциалом:

$$V = uy + u^2 - hy^2 - y^3 + y^4.$$

При $h > 0$ получается простая точка-горлышко. Но при $h = 0$ в x и y появляется эллиптическая омбилика (порождающая хордовый режим).

[2]. *Ее губы тронула улыбка, потому что он напомнил ей странное сравнение старого Никандра, уподобившего с точки зрения формы пестик лилии детородным органам осла*» (Ж.Пойсманс, Наоборот; Ж.К. Нуysmans, *A rebours*, Fasquelle, Biblioteheque Charpentier, Paris, 1965, p.221)

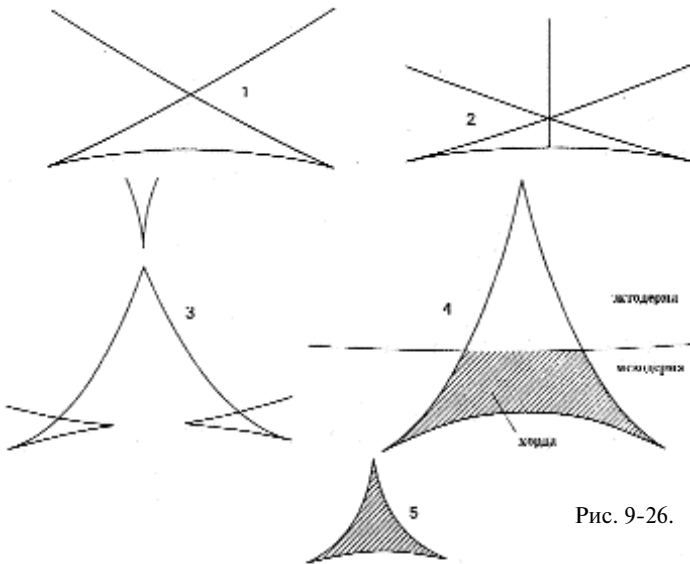


Рис. 9-26.

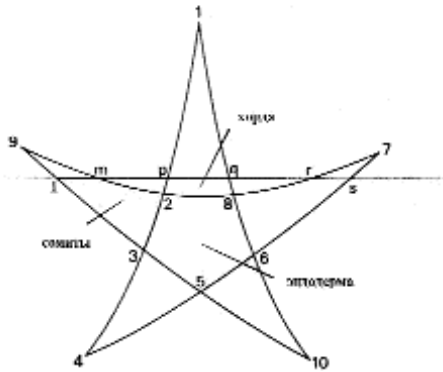


Рис. 9-27.

ГЛАВА 10

ГЛОБАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ЖИВОГО СУЩЕСТВА (МНОГОКЛЕТОЧНОГО)

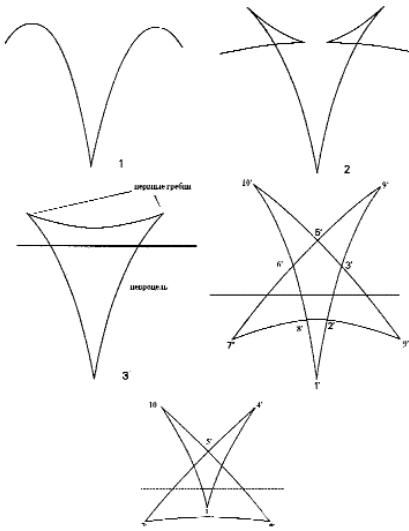


Рис 9-27.

Механизм любой машины, например, часов, всегда строится по центростремительной модели. Это значит, что сначала изготавливают все части часов — стрелки, пружинки, колесики — а затем их монтируют на общую основу.

Напротив, развитие животного, например, тритона, всегда организовано центробежно начиная с зародыша. Сначала возникает гастрюла, в которой появляются зачатки, которые затем развиваются в органы.

План существует в обоих случаях. В случае часов он управляет центростремительным процессом, а в случае тритона — центробежным. Части собираются по совершенно противоположным принципам, но в согласии с одним и тем же планом

Й. В. Икскюль. Теория обозначения.

10.1. СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

А. Преамбула

Я думаю, что вряд ли можно лучше охарактеризовать существенное различие между живыми динамиками и человеческими конструкциями, с которыми их часто сравнивают, чем это сделал физиолог Икскюль в указанной работе. Это не значит, что сравнения живой механики с техникой, созданной человеком, (автоматами, компьютерами и т.п.) не имеют смысла. Но эти сравнения могут быть уместными только для частичных механизмов, уже собранных и работающих (см. примечание [1]). Они заведомо неприменимы к глобальной структуре живых существ, их эпигенезу и физиологическому созреванию. Я позволю себе привести здесь сравнение (весьма техническое), заимствованное из алгебраической топологии. Для создания заданного пространства топология располагает двумя процедурами радикально различной природы. Центростремительная процедура заключается в создании пространства при помощи *клеточного разбиения*: пространство строится путем последовательного добавления клеток или шаров, для каждого из которых уточняется способ присоединения. Другой метод, гораздо более тонкий, заключается в построении пространства путем последовательного расслоения на *комплексы Эйленберга — Маклейна*, причем природа каждого расслоения на каждом шагу уточняется соответствующим инвариантом. Не вызывает сомнения, что эпигенез живого существа, как метаболической формы гораздо больше напоминает второй процесс, чем первый, а эпигенетическая память, локализованная (в частности) в генах, соответствует инвариантам последовательных расслоений. Но, конечно, на развитие по-прежнему налагаются пространственные и биохимические ограничения и к нему применимо предварительное требование структурной устойчивости. Мы намерены предложить модель, которая, честно говоря, неадекватна, но я считаю, она имеет то преимущество, что дает относительно правильное пред-

ставление о жизнедеятельности многоклеточных.

Б. Статическая глобальная модель

Для начала допустим, что генотип вида животного A геометрически характеризуется ростком W дифференцируемого многообразия, исходящего из начала координат O евклидова пространства E , и многообразием Q линейных проекций p вида $E \Rightarrow E'$. Основная интуитивная идея состоит в следующем: в каждый момент t в каждой точке m животного используется только часть (в общем случае небольшая) всей генетической информации вида. Тот факт, что локально используемая информация является только частью глобальной информации, выражается при помощи геометрической операции *проекции*. В каждой точке (m, t) животного локальное биохимическое состояние представлено проекцией pm , а используемая генетическая информация задается топологическим типом проекции отображения $pm: W \Rightarrow E'$. В пространстве проекций Q существует замкнутое подпространство бифуркации K , такое что на всякой связанной составляющей множества $Q-K$ топологический тип проекции не меняется (на самом деле, когда мы имеем дело с настоящим статическим полем типа описанного в главе 4, роль играет только стратифицированное подмножество K). Среди всех проекций pm мы допускаем, что имеется одна наиболее вырожденная, наиболее сложная с топологической точки зрения, которая соответствует динамике яйца перед оплодотворением. Пусть a — точка, соответствующая пространству Q . Она соответствует наиболее «угнетенной» локальной динамике (говоря по-модному). Другие проекции Q менее сложны, чем $p(a)$. Можно считать, что Q представляет всю или часть универсальной развертки особенности организующего центра $p(a)$. Можно также считать, что топологическая сложность проекции $p(m)$ это непрерывная функция точки m , достигающая максимума в a .

Немедленно после оплодотворения яйцо поляризуется. Состояние после оплодотворения характеризуется отображением (не играя словами, можно сказать — *ростком отображения*) F трехмерного шара B^3 из Q в окрестности точки a , которое предполагается дифференцируемым и имеющим максимальный ранг (при том, что перед оплодотворением отображение в точке a постоянно). В ходе развития отображение F меняется как функция времени в соответствии с законом, выражаемым дифференциальным соотношением вида

$$\frac{dF(m, t)}{dt} = X(m, t)$$

где вектор $X(m, t)$ зависит одновременно от точки (m, t) из Q и от локальных биохимических условий. Поскольку наша модель не является точной, мы не пытаемся дать $X(m, t)$ количественное выражение, ограничиваясь описанием качественной эволюции образа $F(B, t)$ в Q — волны роста особи в нормальных условиях. Интуитивно можно рассматривать волну роста F как гиперповерхность в Q размерности три, чья локальная эволюция управляется метаболическим ветром, задаваемым вектором X . Грубо можно различать два типа локальных режимов: катаболические режимы, характеризующиеся потерей энергии (поглощение резервов) и информации (топологическая сложность), и анаболические режимы, при которых энергия и информация, напротив, возрастают. В начале развития эмбрион живет за счет своих резервов, и эволюция $F(B, t)$ является катаболической в смысле уменьшающейся сложности. При этом $F(B, t)$ трансверсально пересекает некоторые страты бифуркации. Происходит гистологическое разделение между различными тканями вдоль прообразов этих страт по F . Таким образом формируются органы. Наступает время, когда эти органы начинают функционировать. Баланс энергии и сложности приходит к состоянию равновесия. X обращается в нуль везде кроме области особи, то есть гонады, где ветер X в некотором смысле касателен к волне F . Он заставляет ее в каком-то смысле обрушиваться. Изолированные клетки топологически отделяются от роди-

тельского организма. Потом они увлекаются чем-то вроде циклона к начальной зародышевой точке a . Это гаметогенез, режим исключительно анаболический. Термодинамическая структура анаболических режимов поднимает с этой точки зрения очень интересные вопросы (см. примечание [2]). Кажется, что анаболический режим является вызовом всей естественной термодинамике, которая всегда развивается в сторону уменьшения сложности. Это развитие можно объяснить с помощью аналогии: известно, что парусник может спокойно двигаться против ветра, последовательно подставляя борта так, чтобы парус был направлен по биссектрисе. В этой аналогии роль несущих морских элементов в случае клетки играет ДНК хромосом, которая является единственным относительно неизменным элементом метаболизма среди других молекул, которые постоянно переносятся клеточным ветром метаболизма. В ходе такого движения против ветра корабль, следуя указаниям рулевого, ликвидирует составляющую отклонения, вызываемого давлением ветра на парус, что создает существенную струю в кильватере. Эта аналогия, возможно, позволяет объяснить странные хромосомные образования (ламповые щетки), наблюдаемые в оогенезе. В них можно усмотреть если не кильватерные струи, то по крайней мере признаки предельного напряжения, в котором в это время находится хромосомный материал. Ниже мы будем говорить о разделении полов и о мейозе, что нельзя объяснить в более огрубленной модели.

Какова в этой модели размерность пространства Q , в котором развивается волна роста животного? Если бы мы хотели иметь ситуацию строгой структурной устойчивости, нам бы пришлось сказать, что размерность пространства Q не может быть больше четырех, то есть больше размерности пространства-времени. Но это ограничение действует только локально. Можно допустить, что Q имеет конечную размерность N , но что развитие волны роста достаточно жестко управляется механизмами эпигенетической и физиологической регуляции в трубчатой окрестности многообразия F , которое трансверсально (то есть структурно устойчивым образом) пересекает различные страты множества бифуркаций, определяющие дифференциацию. Заметим, что это многообразие не только является связным, но и обладает не гомотопной нулю петлей, которая, начиная с зародышевой точки a , может быть материализована посредством эволюции зародышевой линии. Эта петля после гаметогенеза возвращается в a и совершает полный оборот т.е. проходит от яйца до яйца следующего поколения (см. рис. 10-1, где изображена модель F в трехмерном пространстве). Наконец, в рамках нашей модели любое животное рассматривается как часть универсальной развертки его яйца, при этом гаметогенез представляется обратным процессом, который приводит локальную динамику в наиболее вырожденную, наиболее свернутую форму.

Несмотря на недостатки модели, которые мы отметим далее, она соответствует общей интуиции развития животного. Более того, она позволяет достаточно удовлетворительно интерпретировать явления регенерации для видов, которые, как планарии, имеют широкие регенеративные способности. Рассмотрим этот вопрос немного более детально.

В. Геометрия регенерации у планарий

Можно допустить, что у планарий волна роста $F(B)$ принимает свои значения в двумерном пространстве Q , которое содержит карту взрослого животного. Координаты x, y соответствуют цефало-каудальному и медиолатеральному градиентам. Можно предположить, что $x=+1$ соответствует пустому режиму, который задает границу особи со стороны головы, а $x=-1$ пустому режиму со стороны хвоста. Если отрезать планарии голову по шее (обычно отображаемой с помощью F на правую полуплоскость $x=0$), то волна F совершит скачок от режима шеи к пустому (головному) режиму. Однако такой разрыв не может долго существовать в нашей

модели. В результате диффузии волна F саморегулируется: по креоду головы, расположенному в $0 < x < 1$ в Q , заново пробежит волна F . Голова восстановится (рис. 10-2). Если скрепить вдоль шеи двух обезглавленных планарий, то волна роста F такой двойной особи не будет иметь разрыва, и следовательно, регенерации не произойдет (рис. 10-3).

Однако эта модель еще очень груба. Выбор пустого режима в точке ампутации, очевидно, зависит от положения этой точки на теле животного, и при подходящем разрезе будет более или менее безразлично, регенерирует ли голова или же хвост. Наконец, если входить в детали регенерации, мы будем иметь дело с цепями индукции между органами (например, мозг будет индуцировать глаза и гонады), описываемыми более сложной генетической моделью типа той, которая будет представлена позднее и которая в любом случае не может описываться распространением продольной волны на плоскости.

Г. Отступление: преформация и эпигенез

Самое главное в генетическом обеспечении животного заключается не в его морфологии — большинство анатомических деталей второстепенны — но скорее в механизме гомеостаза, физиологической регуляции. Именно благодаря этим механизмам животное может противостоять неизбежным изменениям среды и в конце концов формировать гаметы своего вида, обеспечивая таким образом выживание и размножение. Мы придерживаемся здесь ламарковского взгляда. Мы допускаем, *grosso modo* (вообще), что *функция создает орган* или, точнее, что образование органа является результатом конфликта между элементарным функциональным полем и первичной органической материей, которая ему противостоит и навязывает ему генетически предопределенные способы осуществления (креоды). Этот способ видения поднимает метафизическую проблему. Является ли окончательное функциональное поле взрослой особи в конечном счете более богатым, более сложным, чем первичный фактор, передаваемый яйцом, или напротив, конечная реализация это всего только небольшая часть возможностей зародыша? Одним из парадоксов нашей геометрической модели является то, что оба приведенные выше утверждения, с виду противоречащие друг другу, являются правильными. Геометрическая модель статического типа (вроде представленной в 10-1) требует, чтобы окончательная структура была только незначительной частью универсальной развертки зародышевой динамики. Однако если обратиться к примеру человеческой психики, то предположение о том, что чувства и мысли особи могли содержаться в зародышевых клетках родителей, вызовет отвращение. Другую форму того же парадокса можно найти в старинных преформистских теориях. Согласно этим теориям, в человеческом яйце на предварительной стадии формирования уже находятся все дети будущей особи. А в них — их дети и так далее. Впечатляющий образ этой сходящейся череды *гомункулов* хотя и не базируется на каких-то экспериментальных данных, имеет, по крайней мере, то достоинство, что поднимает во всей полноте теоретическую проблему, которую ставит процесс самовоспроизводства. Геометрическая модель преодолевает эту трудность следующим образом. Строится пространство G , которое параметризует все состояния (конечной) популяции особей рассматриваемого вида. Существует каноническое погружение $G \rightarrow G$, поскольку задание популяции из p особей и популяции из q особей задает (упорядоченную) популяцию из $p \cdot q$ особей. Если пространство G это многообразие, то оно с необходимостью имеет бесконечную размерность. Выбрав в G точку a , соответствующую одному яйцу рассматриваемого вида, через время T (период поколения) мы получим систему, представленную в G точкой $g(a)$ вида $(S) + k(a)$, где S обозначает взрослый организм, развившийся из начального яйца, $k(a)$ — k гамет, произведенных этим организмом. Это преобразование задает в G путь c . (Мы очевидным образом игнорируем в этой упрощенной модели сложности, связанные с половой дифференциацией). Если окружающая среда поддерживается

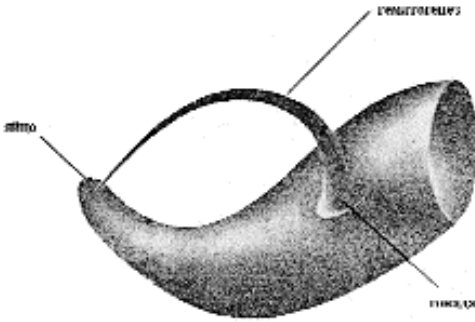


Рис. 10-1. Траектория волны роста= поверхность F .

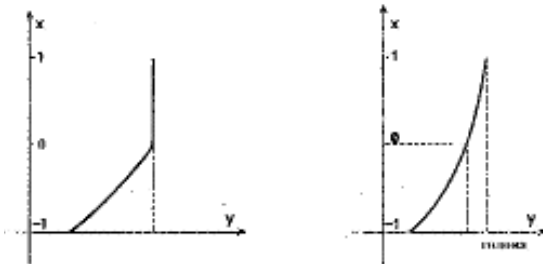


Рис. 10-2. Диффузионная регуляция.

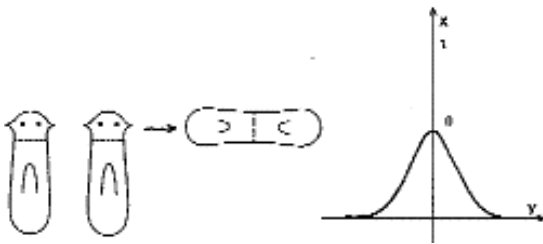


Рис. 10-3. Блокирование регенерации при симметричном скреплении.

приблизительно постоянной, множество возможных путей, которые описывают развитие особи вплоть до созревания гамет формирует в открытом множестве U из G что-то вроде трубчатой окрестности идеального пути c_0 , соответствующего оптимальному развитию. Стенки открытого множества U это (в общем случае) пороговые гиперповерхности, где как в дифференциальных обрушивающихся системах поле эволюции имеет разрыв, который стремится вернуть представляющую точку в множество U . Этот набор регулирующих механизмов всегда одинаков для всех особей данного вида, и его можно с полным правом рассматривать в качестве генетического наследия этого вида, которое передается яйцом. Отмеченный выше кажущийся парадокс можно объяснить тем, что наследуются на самом деле *верхние ограничения вариаций физиологической активности взрослой особи*. Действительно для каждой функциональной активности имеются пороги (минимумы и максимумы), при переходе которых происходят необратимые катастрофы в функционировании самих регуляторных механизмов. Однако внутри этих порогов различные поля могут меняться относительно

произвольно. Таким образом, возникновение и поддержание физиологически устойчивой пространственной формы не является несовместимым с изменчивостью локальных полей живого организма. Можно даже считать, что многообразие благоприятно для общей устойчивости, поскольку оно позволяет приспособиться к некоторым видам агрессии. Канализирование этого многообразия в систему функциональных креодов, наследуемых генетически или приобретаемых в процессе воспитания, выпадает на долю нервной системы. Таким образом объясняется большее богатство и сложность физиологической структуры взрослого по сравнению с изначальным зародышевым полем, которое ее порождает. Но в некотором смысле верно и то, что эта сложность виртуально существовала уже в яйце. Чтобы вернуться к огрубленной, но полезной математической аналогии, наложим на дифференцируемую функцию, определенную в области D из R^n , ограничение, что не мешает этой функции иметь топологические типы сколь угодно большой сложности. Таким же самым образом генетические ограниче-

ния, которые в основном носят пороговый характер, не мешают полю взрослой особи развиваться в пространстве бесконечной размерности и демонстрировать бесконечное разнообразие форм.

10.2. МЕТАБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

А. Границы статической модели

Описанная выше статическая модель имеет очевидный недостаток: если допустить, что волна роста разворачивается в пространстве универсальной развертки зародышевой динамики трансверсально универсальному множеству катастроф, мы будем вынуждены допустить, что все окончательные структуры организма должны проявляться с самого начала развития. Таким образом, мы имеем типичную мозаичную ситуацию, не допускающую вторичных катастроф в ходе развития. Более тонкая теория должна непременно учитывать природу динамики подавления яйца в зародышевой точке в ходе гаметогенеза и последующего поэтапного *раскрепощения*, которое видимым образом происходит в течение эпигенеза. Все в действительности происходит так, как если бы волна роста была сначала сжата в страты максимальной коразмерности множества бифуркации, а затем скачкообразно распространялась в стратах все меньшей коразмерности. Таким образом, мы приходим к уточнению модели, вводя в динамику метаболический (рекуррентный) момент, который ведет к понятию *эпигенетического полиэдра* [1].

Та же самая трудность проявляется уже в понятии эпигенетического ландшафта, предложенного Уоддингтоном (epigenetic landscape). Долины, которые спускаются с гор, сливаются, тогда как развитие демонстрирует в основном разделение, бифуркации. Разделение может быть представлено только в виде падения с плато, разрезанного боковыми долинами, и трудно понять как эта ситуация обобщается в ходе развития.

Б. Эпигенетический полиэдр

Мы предлагаем описывать формализм эмбриологического развития с помощью геометрического объекта, полиэдра E , задаваемого следующим образом.

На E имеется действительная положительная функция времени t . Время $t=0$ соответствует единственной вершине, соответствующей зародышевой точке. Любой клеточной или структурно устойчивой дифференциации эмбриональной ткани соответствует ребро A , на котором t строго возрастает. Любому морфогенетическому полю соответствует симплекс размерности 0, один или два, в зависимости от того, один, два или три различных вида ткани участвуют во взаимодействии, порождающем поле. Предположим (для простоты), что на этих симплексах s время t постоянно. Наконец, каждый из симплексов s , связанных с полем, порождает новые ребра, начинающиеся в барицентре и характеризующие новые ткани, создаваемые морфогенетическими полями, связанными с s . Допустим, что полиэдр E погружен в евклидово пространство, координаты которого имеют биохимические значения (они огрубленно соответствуют основным градиентам развития, таким как анимало-вегетативный или цефало-каудальный, дорсо-вентральный и т.п.)

Интерпретация симплексов, связанных с морфогенетическими полями, требует использования метаболической модели и заставляет вспомнить понятие резонанса. Если вершинами s являются, например, p и q , то можно допустить, что соответствующие ткани имеют локальные биохимические режимы, описываемые аттракторами G , H соответствующих локальных динамик. Когда эти ткани соприкасаются, происходит резонанс, в результате которого топо-

логическое произведение $G \times H$ вырождается в один или несколько аттракторов размерности меньшей, чем размерность K . Пусть Q это пространство всех погружений K в $G \times H$. По отношению к локальным морфогенетическим полям, связанным с s , Q может быть рассмотрено как направляющее пространство (универсальная развертка), и креод, задаваемый с помощью s , описывается отображением базы поля в пространство Q t , как и в случае статической модели. Новые ткани, создаваемые полем s и связанные с новыми ребрами, исходящими из барицентра s , будут соответствовать новым аттракторам K , порождаемым катастрофой $G \times H \Rightarrow K$.

Следует заметить, что полиэдр E не является симплицальным комплексом в строгом смысле, потому что некоторые грани симплексов s размерности два могут отсутствовать и, кроме того, барицентр этих симплексов это тоже вершина.

Для примера на рис. 10-4 изображен эпигенетический полиэдр эмбриона лягушки вплоть до стадии нейрулы. Этот полиэдр можно считать определяющим *детерминистическую семантическую модель*, нормальное развитие которой может рассматриваться как глобальный креод, в то время как каждый из симплексов E задает подкреод.

Ясно, что задать эпигенетический полиэдр — значит схематично описать последовательные этапы развития, что не содержит в себе ничего нового по сравнению с обычными описаниями из учебников эмбриологии. Мы попытаемся внести в него динамическое обоснование.

Для этого полезно мысленно представить себе геометрический образ множества регулирующих устройств живого существа. С этой целью мы вводим такое понятие как:

В. Фигура регуляции

Любое живое существо характеризуется глобальной устойчивостью. Подвергаясь шоку, стимулу s , оно отвечает рефлексом $r(s)$, который должен ликвидировать возмущение, вызванное стимулом s . Под *стимулом* я здесь понимаю не физико-химический процесс, внешний по отношению к причине возмущения, но его непосредственное восприятие организмом. В этих условиях мы имеем право допустить, что все моментальные состояния изучаемого организма могут быть локально параметризованы точками евклидова пространства W . Начало координат O этого пространства соответствует состоянию покоя (нормального) не возбужденного организма. Включим заданный внешний стимул. Представляющая точка состояния организма переместится в точку s , соответствующую стимулу (т.е. его непосредственному воздействию на организм), а затем вернется в O , захватив при этом характеристическую кривую рефлекса $r(s)$ (см. рис. 10-5). Итак, в то время как стимулы геометрически представляются многомерным континуумом (поскольку они происходят из окружающего мира), число корректирующих рефлексов остается конечным (по крайней мере, в первом приближении). Каждый корректирующий рефлекс l задается притягивающей кривой, заканчивающейся в O . Пространство стимулов W разделяется на *бассейны аттракции*, каждый из которых связан со своим корректирующим рефлексом l . Эту глобальную конфигурацию мы называем *фигурой регуляции* данного организма.

Эта модель поднимает многочисленные вопросы, наиболее важный из которых следующий: какие именно состояния могут быть скорректированы рефлексами l ? Не будем пока рассматривать возмущения слишком большой амплитуды, которые травмируют организм до такой степени, что парализуют все регулятивные рефлексы. Тогда можно предположить, что грубо говоря, существует два типа стимулов: *обычные* стимулы, предусмотренные генетически, для которых связь $s \Rightarrow r(s)$ возникает практически автоматически, и *странные* или необычные стимулы, для которых эта связь является нестрогой или вовсе неопределенной. Мы вернемся к этому вопросу в связи с эволюцией в главе 12.

Рассмотрим динамическую систему (P, X) . Мы утверждаем, что эта динамическая систе-

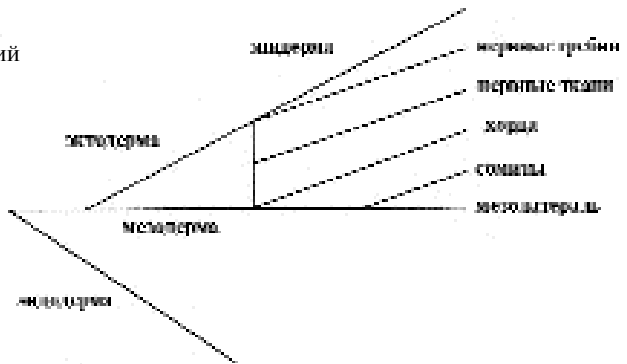
ма *имитирует* фигуру регуляции T организма O с пространством состояний W , если выполняются следующие условия. На локально евклидовом пространстве W' изоморфном W существует расслоение $p: P \Rightarrow W'$, которое задает систему *приближенных первых интегралов* (P, X) . Путем интегрирования на слое W' задается среднее поле взаимодействия Z . Существует гомеоморфизм из W' в W , который преобразует траектории поля Z в кривые $s \Rightarrow r(s)$, задаваемые корректирующими рефлексам r . В большинстве случаев типичный рефлекс имитируется аттрактором динамики-слоя $P \Rightarrow W'$.

Г. Глобальная модель. Предварительное описание

Пусть A это вид животного. Основная идея модели следующая: локальный метаболизм зародышевой клетки (оогонии или сперматогонии) перед мейозом может описываться дифференциальной системой (M, X) , которая *имитирует глобальную фигуру регуляции* T вида A . Понятно, что такое утверждение может быть уточнено только предъявления изоморфизма $W' \cong W$ связывающего пространство параметров клеточного метаболизма W' с пространством глобальных состояний организма. Как бы то ни было, глобальная интенсивность организма резко уменьшается в этих клетках сразу после мейоза. Это ведет к стягиванию топологической структуры, задаваемой системой (M, X) . Важнейшая часть этой структуры кристаллизуется в макромолекулярные структуры (ядерные и цитоплазмные). Информация, связанная, как говорят, с формой T , находится в коде этих структур.

После оплодотворения яйца происходит обратное явление. Посредством разблокирования многих биохимических степеней свободы и запуска многочисленных циклов реакций, динамика (M, X) восстанавливается приблизительно в первоначальном состоянии. Она в некотором смысле имитирует фигуру регуляции T . Но эта фигура слишком сложна для того, чтобы быть устойчивой в многоклеточном организме. Поэтому некоторые клетки специализируются только на сохранении состояний r : поначалу энтодерма сохраняет только относительные аттракторы питательных рефлексов, затем мезодерма сохраняет только состояния r , относящиеся к движениям (внутренним и внешним) и рефлексам биохимической регуляции (кровообращение, выделение). Другие клетки, напротив, теряют состояния r и сохраняют только состояния s . Это нервные клетки. Эти клетки, утратив возможности регуляции своего метаболизма, *сохраняют следы всего, что с ними происходит*. Единственная регуляция, к которой они способны, это грубая и недифференцированная разрядка нервных импульсов. Некоторые клетки эпидермы развиваются в процессе старения в сторону аттрактора, если он находится между r и s . Первичные функциональные поля $s \Rightarrow r(s)$ в какой-то момент разрушены катастрофой органогенеза, затем восстанавливаются как функциональные поля, управляемые

Рис. 10-4. Эпигенетический полиэдр.



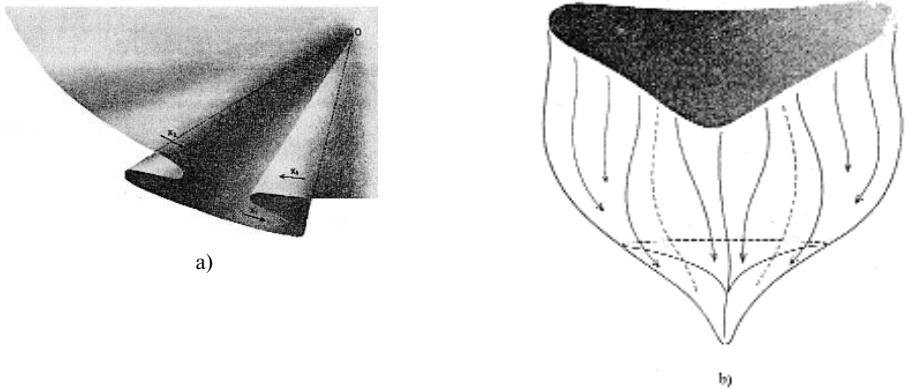


Рис. 10-5. а) Изометрическая проекция фигуры регуляции, заданной двумя сборками; б) Общая диаграмма фигуры регуляции.

нервной деятельностью, канализованной в креоды. Например, типичное питательное поле представлено на клетке бластулы избирательной вибрацией метаболизма $s \Leftrightarrow r(s)$. У взрослого животного это поле разлагается на: а) сенсорный стимул (например, увидеть добычу), б) внешнее двигательное поле (схватить добычу, поднести ко рту), в) съесть, и г) висцеральное поле, управляющее двигательной и секреторной активностью пищеварительного тракта. Это поле затухает только после полного переваривания добычи. Для процесса полного восстановления поля к концу развития, который на первый взгляд представляется загадочным, мы ниже предлагаем динамическую модель (см. Приложение 3).

Д. Самовоспроизводящиеся особенности

Пусть U – векторное пространство бесконечной размерности, а V – потенциальная функция $V: bR$, имеющая в начале координат особенность коразмерности три. Обозначим через $Ouvw$ пространство универсальной развертки этой особенности. Пусть, к примеру,

$$V = V(x) + ug(x) + vg(x) + wg(x) -$$

универсальная развертка V . В общем случае существует направление, например, Ou , вдоль которого развертка особенности имеет максимальную сложность. Вдоль этого направления все критические точки V , сконцентрированные первоначально в O , будут действительными, и концентрация критических значений будет максимальной. Пусть a точка $u=1, v=w=0$, которая дает такую развертку. Добавляя к V член $v^2 + w^2$ (потенциал остановки) и применяя к каждой точке плоскости $u=1$ условие Максвелла, мы получаем потенциал V_2 , заданный непрерывно на этой плоскости. Этот потенциал дифференцируем везде кроме направления вдоль ударных волн конфликта, в которых имеются разрывы первых производных (угловые точки). Будем говорить, что особенность $V(x)$ является самовоспроизводящейся, если потенциал V имеет на пространстве внутренних переменных x (размерности два) тот же топологический тип, что и потенциал V_2 на плоскости $u=1$. Пример: в случае катастрофы Риманна-Югонио при $V = x^4/4$, универсальная развертка имеет вид

$$V = \frac{x^4}{4} - \frac{ux^2}{2} + vx + v^2$$

Рис. 10-6а.

Кривая $x^4/4 - x^2/2$ является парной и имеет два симметричных минимума. Кривая, задаваемая при помощи $V_2(v)$ при $u=1$, согласно условию Максвелла, имеет тот же топологический

тип, что и V_i (рис. 10-6 а, b, с, d, e), однако с угловым максимумом при $v=0$. Я не знаю, является ли такое явление общим для случая статических особенностей, возможно, что нет. Это как раз тот случай, когда статическая модель оказывается слишком жесткой, чтобы быть правильной. В биологических приложениях имеют дело не с единственной особенностью V , но с целой цепочкой особенностей, которые развертываются последовательно. Мы будем, однако, ради удобства рассуждать так, как если бы мы имели дело только с одной особенностью, изолированной в начале координат.

Учитывая это, вернемся к нашей модели. Локальная метаболическая динамика первичной зародышевой клетки, которую мы обозначим (P, X) воспроизводит фигуру регуляции данного вида, задаваемую в пространстве состояний W векторным полем Z (мы здесь отождествляем пространство W и W'). Пусть (M, X) это динамика-слой. Рассмотрим следующую гипотезу: динамика-слой (M, X) это гамильтонова динамика, задаваемая на \mathbf{R}^3 градиентом (V, m) , а V получается путем развертки самовоспроизводящейся особенности (V, x) коразмерности три.

Основание для этой гипотезы, которая на первый взгляд выглядит весьма произвольной, заключается в том, что всякий корректирующий рефлекс имеет винтообразный характер. Так, *ходьба* это *периодический* процесс по отношению к реперу, связанному с телом, и *винтообразный* процесс по отношению к реперу, привязанному к земле. Такой винтообразный характер рефлексов позволяет утверждать, что всякий корректирующий рефлекс связан с аттрактором-циклом пространственно-временной активности организма, связь которого с внешними параметрами порождает фиксированный ненулевой перенос для каждого периода в пространстве этих параметров. (В случае ходьбы такой перенос это *шаг*. Впрочем, разве мы не говорим о «шаге винта»?) Против постулата, утверждающего, что любой рефлекс связан с пространственно-временным полем организма, можно возразить, указав на иммунные реакции организма на вторжение антигенов. В этом случае реакция остается на клеточном уровне и не влияет заметным образом на крупные структуры. Но заметим, что здесь идет речь собственно не о рефлексе, а о *болезни*. Сомнительно, чтобы болезни эксплицитно содержались в фигуре регуляции живого организма. Многообразие белковых структур антител, создаваемых в этих конфликтных ситуациях (что ставит перед современной догмой о генетическом коде сложную проблему) предполагает, что здесь речь идет о нестабильном и неопределенном процессе типа процессов, связанных со странными и необычными стимулами.

Уточним еще одно обстоятельство: когда мы характеризуем некоторый рефлекс его пространственно-временной морфологией, мы также принимаем во внимание физиологические вариации органов. Таким образом, разрядка нервных импульсов или перенос с кровью секрета желез должны рассматриваться как пространственно-временные рефлексы специального типа.

Винтообразный характер рефлекса проявляется и в нашей модели фигуры регуляции $(P, X) \Rightarrow W$. Любой рефлекс связан с притягивающим циклом динамики-слоя (M, X) , что обеспечивает ему периодический аспект, и со средним полем взаимодействия Z , что обеспечивает ему корректирующий аспект, т.е. перенос рефлекса. На самом деле, ситуация в общем случае является более сложной. Винтообразное описание правомерно только для простых рефлексов, нередуцируемых функциональных полей. В общем случае фундаментальные рефлексы состоят из периодических цепей простых рефлексов. Кроме того в самом пространстве W , содержащем, как мы увидим, образ тела, глобальное корректирующее поле часто разрывно и также имеет воронкообразный аспект, как и средние поля, описанные в 6.1А.

Е. Смешанная модель

Поскольку дело обстоит таким образом, мы будем считать, что динамика-слой (M, X) яв-

ляется гамильтоновой и заданной на евклидовом пространстве конечной размерности с координатами x при помощи гамильтониана $H=x^2/2+V_1(x)$. $V_1(x)$ — это наиболее сложная развертка самовоспроизводящейся особенности $V(x)$ при $x=0$. Можно представить эту динамику в виде тяжелого шарика, катящегося без трения по гористой местности, где высота задается функцией $V_1(x)$. Можно допустить, что на гиперповерхности энергии $H=c$ свойства эргодичности динамики следующие: имеется большая эргодическая составляющая, соответствующая состоянию покоя невозбужденного организма, у которой составляющая Z взаимосвязи на W нулевая, и имеются *странные аттракторы*, соответствующие простым рефлексам, поля взаимодействия Z которых дают корректирующий перенос в W . В географической интерпретации, рассмотренной выше, эти аттракторы можно представить себе чем-то вроде автодорог, пересекающих эти горы по перевалам, вытянутым в линии, на которых наш шар неопределенно колеблется. Следует заметить, что глобальная конфигурация, задаваемая $V_1(x)$, представляет собой потенциальную яму с внутренним рельефом. Наши автодороги быстро заканчиваются, упираясь перпендикулярно в стенки этой ямы, чтобы обеспечить отражение на ту же дорогу, имеющую два экстремума. Поскольку мы находимся в максимально вырожденной ситуации,

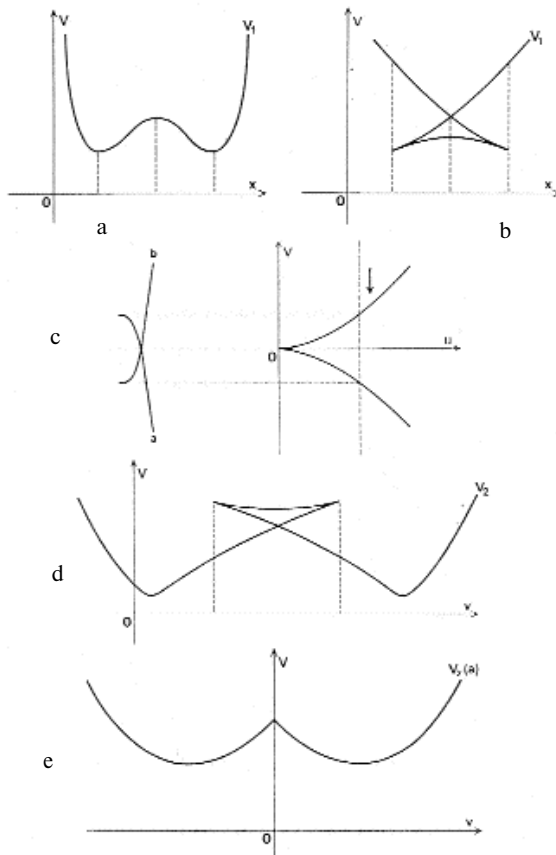


Рис. 10-6 а) Кривая $V_1(x)$; б) критические значения $V_1(x)$; в), д), е) применения условия Максвелла к кривой $V_2(x)$, которые дают $V_1(x)$.

все углубления, перевалы и вершины находятся на одинаковой высоте. Такая ситуация наиболее благоприятна для эргодической составляющей. Поскольку система зависит от параметров, образующих пространство W' , если удалиться в W' от начала координат и направиться к удаленным точкам s , высоты вершин и перевалов будут меняться. В принципе, при этом корректирующий путь находится в благоприятном положении, и его бассейн аттракции растет. Для этого достаточно понизить высоту перевалов, через которые проходит данный путь, увеличивая высоту гор и соседних перевалов так, чтобы образовался желоб.

Похожая ситуация возникает при развертке динамики, задаваемой потенциалом $V_2(v)$ на пространстве универсальной развертки параметра v . Потенциальная яма, задаваемая при помощи V_2 , изоморфна аналогичной яме, заданной при помощи V_1 на пространстве x . Следовательно, гамильтонова динамика $H=v^2+V_2(v)=R$ имеет свойства, изоморфные свойствам ландшафта, определяе-

мого при помощи $V_i(x)$, а ее деформации, зависящие от точек из W , гомологичны тем, которые наблюдаются для соответствующих точек из W' . Поскольку это так, мы предполагаем, что в ходе гаметогенеза параметры c и u стремятся к нулю так, что на созревшей гамете локальная динамика представлена особой динамикой $V(x)$. Это *росток потенциала*, который представляет весь генотип вида, всю информацию, закодированную в генах. После оплодотворения организм разворачивается в универсальную развертку $Ouvw$ самовоспроизводящейся динамики $V(x)$. Предположительно, развитие останавливается в плоскости $u=1$, а добавление потенциала вида v^2+w^2 останавливает пространственное развитие. В то же самое время гамильтониан H растет таким способом, что пространственно-временная развертка задаваемая V_2 , имитирует фигуру регуляции данного вида. Все это может быть описано моделью, более точно отвечающей интуиции.

10.3. ГИДРАВЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

А. Описание модели (Рис. 10-7)

Предположим, что ландшафт, задаваемый функцией высоты $V(x)$, затоплен водой до уровня c . Ландшафт представляет собой извилистый архипелаг с большими прямолинейными проходами, маршрутами, проходящими из конца в конец линиями навигации, которые соответствуют основным рефлексам. Заставим уровень воды понижаться. Все эти проходы будут один за другим перегораживаться перевалами, последовательно выступающими из воды. Вода отступит в долины, где она образует извилистые фьорды. При уменьшении c в конце концов останется водное зеркало круглой формы, покрывающее источник (зародышевую точку) с наиболее низкой стороны. Что касается развертки, то здесь процесс идет в обратном направлении. Постоянное многообразие энергии $H^2=b$ проецируется на базовое пространство $Ouvw$. Его контуром, очевидно, является пространство $V_2=b$, представляющее собой берег нашего океана. Поскольку плотность (по мере Лиувилля) выше окрестности этого контура очень велика, можно считать, что при возрастании b поверхность $V_2=b$ определяет пространственно-временное развитие эмбриона. Поскольку функция V_2 задается статической моделью (по крайней мере, постольку, поскольку потенциалом остановки v^2+w^2 можно пренебречь), неудивительно, что на этой поверхности мы находим особенности ударных фронтов волны, рассмотренные в предыдущей главе. Топологический тип эмбриона меняется в каждой особой точке гамильтониана H' (т.е. в каждой особой точке V_2). В нашем ландшафте этим изменениям соответствуют седловые точки. Следует, впрочем, заметить, что в случае размерности три имеется два типа седловых точек: с индексом один и с индексом два. Первые характеризуют взаимодействие двух тканей, вторые взаимодействие трех тканей. Практически каждая седловая точка связана с образованием некоторого органа. Эти точки затем выстраиваются вдоль больших прямолинейных трасс, характеризующих большие функциональные рефлексы, заставляющие эти органы работать.

Б. Соответствие между гидравлической и метаболической моделями (энергетический полиэдр)

Рассмотрим две связанные составляющие многообразия $H^2=b_1$, которые при $b_1=s$ соединяются в седловой точке с индексом один. Предположим для простоты, что пространство имеет размерность один. На каждой из этих связанных составляющих представляющая точка описывает по циклу с периодами T_1 и T_2 соответственно. Как только устанавливается связь, представляющая точка описывает последовательные циклы. Если отношение T_1/T_2 является

рациональным, то на торе, образованном двумя циклами возникает резонанс, который имеет то же асимптотическое поведение (число вращения), что и рассматриваемое движение. На самом деле более разумно считать, что порог открывается только для таких значений амплитуды s , при которых отношение T_1/T_2 является простым рациональным числом. С этой точки зрения можно сказать, что статические и гидравлические модели игнорируют кинетический аспект участвующих в ходе развития реакций, который на самом деле является важным.

Такие явления как индукция и старение также требуют метаболических моделей.

В строго статической модели любую необратимую клеточную специализацию (с модификацией функциональной специализации рассматриваемой клеточной ткани) можно интерпретировать как переход от страты коразмерности r к страте коразмерности $r-1$. Поскольку зародышевая динамика имеет коразмерность три, из этого следует, что любая ткань, начиная со стадии бластулы, может подвергаться самое большее трем клеточным специализациям необратимого характера, вызывающим различную функциональную ориентацию. Последовательность может быть, например, такой: эктодерма \Rightarrow мезодерма \Rightarrow мезэнхима \Rightarrow склера. В том же ряду идей стоит и вопрос о том, удовлетворяют ли ткани организма правилу фаз Гиббса; k различных тканей встречаются только вдоль многообразий размерности $4-k$. Наблюдения д'Арси Томпсона над клеточными перегородками дают основание полагать, что положительный ответ на этот вопрос очень правдоподобен.

В. Динамика гаметогенеза

В гидравлической модели образование гамет представляется в виде последовательного осушения эпигенетического ландшафта. Перевалы (седловые точки), соответствующие различным индивидуальным органам, последовательно появляются на поверхности воды, разбивая таким образом прямолинейные пути, определяющие важнейшие физиологические функции. С уменьшением уровня s возникают извилистые фьорды, разделенные на многочисленные ветви, соответствующие зародышевым листкам, которые в процессе высыхания превращаются в цепочки изолированных озер. При приближении к нулю у нас остается только круглая лужа вокруг зародышевого центра. География ландшафта выражает по сути физико-химические ограничения, которые накладываются на реализацию различных катастроф органогенеза, так же как, впрочем, и груз эволюционного прошлого, что выражается в законе восприимчивости филогенеза в онтогенезе. Из этого следует, что функциональное значение различных ветвей фьорда становится все более и более абстрактным. Так, катастрофы усвоения пищи и кислорода поручаются эндодерме. Катастрофы выделения обеспечиваются ветвью мезодермического потока. Рефлексы движения и перемещения концентрируются в другой ветви мезодермического потока, который впоследствии сливается с предыдущим. Наконец, представление стимулов задается нейральным озером, чем-то вроде большого и очень плоского болота, имеющего только один неопределенный сток в эктодермический поток. Если придерживаться строгой метаболической интерпретации, осушение перевала нужно интерпретировать как расширение резонанса между циклами реакций, а осушение изолированного озера — как расширение независимого цикла реакций. Когда не остается ни одного перевала, локальная динамика практически непосредственно определяется независимыми осцилляторами, которые почти линейны. Этот факт объясняет ту легкость, с которой эмбриональные ткани различных видов срастаются и взаимодействуют друг с другом при возникновении химерических органов, как это просиходит в классическом эксперименте Шпеманна с химерой головастик — тритон. Ткани различного происхождения, исходно принадлежащие весьма отдаленным видам в филогенезе, могут совместно развиваться столь гармонично только потому, что фигуры регуляции и эпигенетические ландшафты различных видов в своих основных чертах изоморф-

ны. В той мере, в какой эмбриологическая индукция является явлением резонанса, понятно почему она не имеет зоологической специфики. Тем не менее, ткани сохраняют эту гибкость очень недолго. При старении локальные аттракторы посредством резонанса вырождаются в очень сильные нелинейные аттракторы, неспособные взаимодействовать друг с другом таким образом. Однако от этого общий изоморфизм развития животных на первичных стадиях не становится менее очевидным и известным фактом.

Г. Размножение в гидравлической модели

Чтобы включить в модель факты размножения, мы исходим из того простого замечания, что процесс размножения является морфологически периодическим. Поток изоморфен родителю. Пренебрежем сложностями, связанными с разнополюстью, и обратимся к простой модели типа вегетативного размножения. Символизируем периодический характер с помощью линейного осциллятора со связанными переменными U и v . Предположим, что колебания обеспечиваются периодическими ударами, как в случае маятника часов. Например, при $U=0$ координата $v=v_0$ претерпевает разрыв (скачок), который придает ей значение $v_0+\Delta v$. Остаток траектории представляет собой стягивающуюся под воздействием трения спираль, которая соединяет точки $U=0, v+\Delta v$ и $U=0, v$. Можно предположить, что скачок Δv происходит в результате проникновения фронта ударной волны функции G в сборку угла $\theta = OU, Ov$. Такая функция G играет роль потенциала для обеспечения колебаний, которые являются здесь колебаниями релаксации (рис. 10-8).

Идея этой модели следующая: переменная v при $U<0$ должна совпадать с переменной c из гидравлической модели. Эта величина в каком-то смысле выражает расстояние от зародышевой ситуации, соответствующей $c=0$. При отрицательных U единственные стабильные состояния это одноклеточные состояния (яйца). Перед генетическим прыжком $U=1, v=v_0$ координата v совпадает с k ; после генетического прыжка и соответствующего отделения зародышевой клетки от родительского организма v совпадает с c . В этом цикле только первый квадрант (положительные U и v) соответствует многоклеточному состоянию. Это стадия эмбриологического развития. Второй квадрант соответствует оогенезу, полуцикл при отрицательных значениях переменных — пространственному переносу гамет на большое расстояние от родителя.

Это значит, что когда организм приближается к точке $U=0, v=v_0$, потенциал G входит в нестабильную ситуацию под действием ветви нижнего потенциала. Как часто бывает в подобных случаях, этот утес, нависающий над потенциалом, имеет тенденцию осыпаться. И наиболее чувствительной к этому притяжению оказывается наименее стабильная часть организма. Если продолжить приведенную выше геологическую аналогию, эрозия оставляет нетронутыми большие плотные блоки, определяемые простыми аттракторами, но захватывает по преимуществу промежуточные зоны, где она создает трещины. В этой центральной зоне в конце концов возникает нечто вроде воронки, ведущей к нижнему листку. Это будущая гонада. Математически можно допустить, что координата v нашего генетического маятника связана с по-

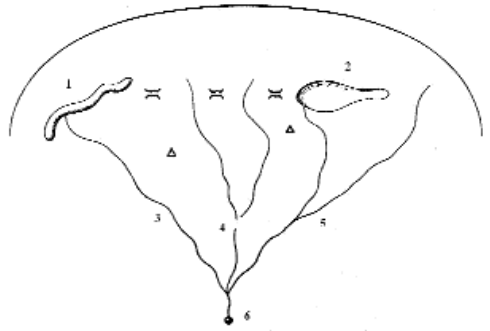


Рис. 10-7 Гидравлическая модель.

1. Пищеварительная трубка
2. Нейральное озеро
3. Эндодерма
4. Мезодерма
5. Эктодерма
6. Зародышевая точка

тенциалом V гидравлической модели соотношением вида $V+v=\text{const}$. Таким образом, резкое увеличение v на Δv зависит от потенциала V . Гонада появляется на этой стадии как дыра в потенциале. В эпигенетическом ландшафте, задаваемом функцией V , ее можно рассматривать как что-то вроде возвышающегося над местностью вулкана, который в гидравлической модели играет роль предохранительного стока ванной. Как только уровень жидкости достигает края кратера вулкана, жидкость перетекает по этому пути к нижнему слою (изоморфному верхнему) и попадает в зародышевую точку, порождая развитие размножающегося животного (рис. 10-9). Если максимальные значения c и k нормализованы единицей, переменную u можно интерпретировать как разность $c=1+u$ или $k=1-u$ при $v < 0$ и $v > 0$ соответственно. (см. фото 10-a-b-c).

В нормальных условиях этот генетический цикл используется только для воспроизведения. Если в результате разнообразных возмущений некоторые ткани, вовлеченные притяжением низшего слоя, свалятся с утеса и совершат скачок, можно ожидать, что точка их приземления будет удалена от зародышевой точки в долине нижнего слоя, соответствующего их клеточной специализации. Генетический цикл может затем вновь начаться, но с укороченным радиусом и гораздо более коротким периодом. Ничто не мешает нам представить таким образом факты опухолообразования (рис. 10-9).

Д. Интерпретация анимально-вегетативного градиента

Радиус генетического цикла $\sqrt{U^2+v^2}$ можно интерпретировать как анимально-вегетативный. В момент генетического скачка яйцо претерпевает разрыв с положительным Δv . Пока яйцо остается прикрепленным к материнскому организму, который не подвергается этому разрыву, естественно допустить, что верхушка яйца, расположенная со стороны стенки яйцевода, соответствует минимальному значению v , а противоположный конец, наоборот, максимальному v (анимальный полюс). Такая поляризация яйца может сохраняться на протяжении генетического цикла. Координата u в момент оплодотворения играет роль анимально-вегетативного градиента развития. В этой модели существует только один градиент, поляризующий яйцо, а именно градиент голова-хвост. Можно усложнить модель, превратив генетический цикл в замкнутую кривую, расположенную (к примеру), в универсальной развертке параболической омбилики. На этой петле в некоторой точке можно получить конкуренцию через бифуркацию двух аттракторов, которые в конечном счете начинают сливаться. Таким образом мы получаем интерпретацию чередования гаплоид-диплоид, характерного для полового размножения (См. 10-4.C). В этой модели можно также интерпретировать тот факт, что плоскость слияния гамет всегда задает плоскость двусторонней симметрии будущего зародыша.

Е. Интерпретация внутренних переменных

Если интерпретировать координаты M , т.е. многообразие динамики (M, X) исключительно как концентрации метаболитов, то может показаться затруднительным допустить, что аттракторы биохимической кинетики могут содержать достаточно топологии для объяснения всех органических катастроф, в особенности таких, как образование костей, мышц или глаза, которые требуют достаточно строгого метрического контроля. В этом последнем случае необходимо допустить, что группа перемещений имитируется в аттракторах, иначе говоря, *что в метаболизме существует подсистема, имитирующая метрическую конфигурацию окружающего пространства*. Если подумать, эта гипотеза не покажется такой уж нелепой. Действительно, поведение простейших живых существ типа инфузорий или амёб демонстрирует пространственную адаптацию, которую никак нельзя объяснить без

такой гипотезы. Говоря антропоморфно, *жизнь это осознание пространства (и времени)*. Способность представлять пространство является общим свойством всех живых существ, а борьба за пространство это одна из первичных форм биологического взаимодействия. С биохимической точки зрения достаточно допустить, что кроме мелких молекул в цитоплазме существуют макромолекулярные популяции, имеющие локально некоторую симметрию, определенную однородность, так что их относительные положения в среде можно описать группой Ли G . Если эти положения, эта относительная ориентация макромолекул оказывает на метаболизм мелких молекул ферментативный эффект, зависящий от G (впрочем, эта связь может быть взаимной, поскольку метаболизм мелких молекул влияет на положение крупных), то мы получим геометрическую структуру, достаточно богатую для того, чтобы учесть все группы, необходимые для органогенеза. Более того, тогда можно объяснить, каким образом некоторые катастрофы, такие как удвоение хромосом или стяжение мышечных волокон, реализуются уже на макромолекулярном уровне. Я не скрываю здесь, что эти рассуждения рискованы. Но существование механизмов такого рода логически необходимо.

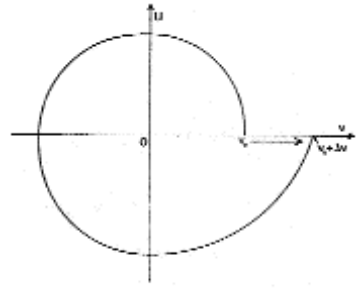


Рис. 10-8. Скачок релаксации.

10.4. ФОРМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОРГАНОГЕНЕЗА

А. Происхождение органогенеза

Чтобы понять органогенез, необходимо изменить масштабы живых существ и обратиться к одноклеточным таким как амeba. Тут фундаментальные функции питания, дыхания и выделения обеспечиваются не определенными органами, а обратимыми креодами в течение ограниченного промежутка времени и гибким внедрением типа пиноцитоза, фагоцитоза и действия выделительных вакуолей. У более развитых одноклеточных типа трубоча некоторые из этих функций имеют уже необратимо зафиксированную цитоплазменную локализацию, тогда как другие части организма теряют способность выполнять эти функции. Каким образом изначально гибкие креоды, расположенные на ткани, которая могла выполнять любые функции, затем локализовались в определенных органах в передаваемой по наследству структуре? Мы затрагиваем здесь одну из важнейших проблем биологии, поскольку это также и проблема преобразования термодинамической регуляции, которая в основном поддается дифференцировке, в генетическую регуляцию, которая дискретным образом включает биохимические механизмы контроля, передаваемые по наследству специализированными молекулярными структурами. Мы предложим здесь формальную схему такой трансформации, биохимическая реализация которой, очевидным образом, остается спекулятивной.

Прежде всего необходимо понять, что всякая функция соответствует *неравновесному метаболическому состоянию, которое корректируется посредством некоторой катастрофы*. Возьмем в качестве примера функцию выделения у одноклеточных типа амeba. Если размер клетки не является избыточным, то есть если отношение поверхности к объему достаточно велико, то выведение отходов метаболизма через мембрану может осуществляться непрерывно посредством простой диффузии. Но если размер клетки превосходит некоторый критический порог, может начаться аккумуляция отходов внутри клетки в точке, где локально возникает

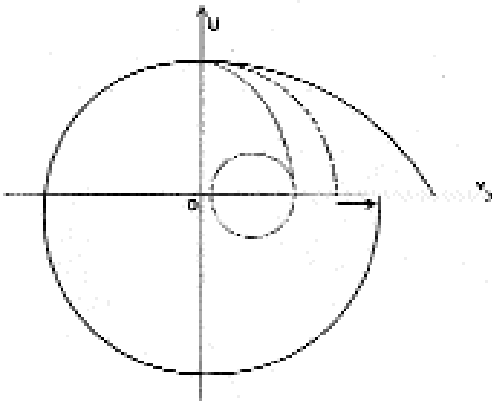


Рис. 10-9. Периодические колебания фигуры регуляции. γ —круг, представляющий злокачественные состояния.

фаза редуцированного метаболизма. Эта фаза создает выделительную вакуоль, которая продвигается наружу. Таким образом, дефицит поверхности по отношению к объему локально корректируется. Общую морфологию всего процесса можно описать как управляемую организующим центром, который находится вне задаваемого им креода (кразмерность такой особенности >4). Реализация всей функции, таким образом, управляется специфическим организующим центром локального метаболизма, который входит в критическое состояние, и развертка соответствующей особенности порождает корректирующую катастрофу. Пусть Y —

критическое множество (страта бифуркации), которое задает организующий центр функции в локальном метаболизме, представленном полем (M, X) . В случае функций с гибкой имплантацией, таких как выделение у амёб, любая точка цитоплазмы может с некоторой вероятностью войти в критическое состояние и вызвать затем корректирующую катастрофу. Как объяснить тот факт, что в ходе эволюции большинство функций оказалось локализовано в фиксированных органах, положение которых передается по наследству? Вот предлагаемая нами схема такого объяснения.

Б. Локализация функций

Заметим сначала, что формально локализация функции соответствует феномену *обобщенной катастрофы*. Исходная однородная ситуация превращается в ситуацию, когда функция может осуществляться только в узко специализированной зоне ткани. Следует также ожидать появления характерных для обобщенных катастроф явлений конкуренции. Нередко встречаются функции, осуществляемые органами, расположенными в организме в периодическом порядке. Факты *метамеризма* и *псевдометамеризма* хорошо известны. Но именно у позвоночных большинство функций оказывается локализовано в единственном органе (не считая таких функций как двигательная, для осуществления которых по механическим и физиологическим причинам требуется совместная работа целой совокупности органов). Впрочем, необходимо иметь в виду, что локализация функции далеко не всегда выгодна. Поскольку фагоцитоз у амёбы не локализован, это избавляет ее от необходимости создавать хватательный орган для поднесения добычи ко рту, то есть венчик, необходимый для действия пищеварительной трубы. Концентрация функций в одном органе у позвоночных это, возможно, следствие усовершенствования функции кровообращения, которое, несомненно, усилило конкурентоспособность каждого отдельного органа.

Можно допустить, что локализация функции в одной точке организма это результат явления содействия. Каждая корректирующая катастрофа организующего центра Y высвобождает в цитоплазме вещества, которые способствуют возвращению особенности Y . Если по той или иной причине некоторое место оказывается подходящим для порождения катастрофы Y , это преимущество часто усиливается за счет запрета появления Y в другом месте организма. Как может возникнуть такое состояние монополии? Мы дадим здесь идеализированную мо-

дель.

Предположим для простоты, что страта бифуркации Y связана с катастрофой Риманна-Гюгонио для статической модели локальных динамик. Пусть Ouv это плоскость универсальной развертки катастрофы, а P – полукубическая парабола точек-складок, описываемая уравнением

$$u^3 - v^2 = 0$$

Как и в 6.2A2 мы предполагаем, что внутри P имеет место конкуренция между двумя стабильными режимами: безразличным режимом a , заданным на всей полуоси $v < 0$, и корректирующим режимом b , заданным на положительных v . При этом корректирующий эффект режима b определяется векторным полем с составляющими $U=0$, $V=-A^2$ (отрицательное значение). Если под влиянием внешнего возмущения представляющая точка u, v локального состояния выходит из области $v < 0$, $u > 0$ (то есть, режима a) и продвигается в область $v > 0$, режим a сначала сохраняется (демонстрируя эффект запаздывания); затем, когда точка достигает высшей ветви параболы P (или немного раньше) режим a уступает место режиму b посредством захвата. Возникает корректирующее поле $V = -A^2$, которое заставляет представляющую точку опуститься к отрицательным v вплоть до окрестности нижней ветви P . В результате режим b снова захватывается безразличным режимом a . Таким образом происходит полная коррекция данного возмущения катастрофой, связанной с особенностью Y .

Пусть M – пространство локальных биохимических состояний, а s – вещество, оказывающее каталитическое воздействие на окружающую среду. Это означает, что молекулы s связываются транзитивно с молекулами окружающей среды, вызывая между этими молекулами последовательность реакций, которую можно представить как путь c в пространстве M . Таким образом, каталитическое действие вещества s можно охарактеризовать функцией, которая каждой точке m из M ставит в соответствие путь $c(m)$ из m в $m' = s(m)$, при том, что само вещество s остается незадействованным в цикле реакций, представленных путем $c(m)$. Теперь предположим, что среди всех веществ, которые может синтезировать окружающая среда в точке $m \in M$ имеется вещество s' , обладающее следующим свойством: цикл реакций, ведущий к синтезу s' , представляется в M путем c' , обратным $c(m)$. При этих условиях вещество s' оказывается автокатализатором, поскольку в окружающей среде оно вызывает реакции, которые ведут к его собственному синтезу. Если в точке m из M существует только одно такое вещество s' , то равновесие в m недостижимо, поскольку s' будет массивно формироваться. Однако если несколько таких веществ как s' находятся в состоянии конкуренции, то в m может наступить равновесие. Можно представить себе, что каждое вещество типа s' создает в m напряжение в направлении, касательном к пути $c(m)$, и что равновесие достигается за счет взаимной компенсации этих различных напряжений. У Уоддингтона имеется образ генов как канатов, стягивающих эпигенетический ландшафт. [4].

Пусть p это точка верхней ветви параболы P . Предположим, что среди веществ, которые управляют точкой p (или, точнее говоря, точкой p^\wedge из M , расположенной на складке, проецируемой на p по P), есть такое вещество s' , что проекция пути $cs'(p^\wedge)$ на Ouv обходит вокруг начала координат O и затем превращает режим a в режим b с более низким потенциалом. Поскольку точка p^\wedge находится на фронте ударной волны, которая ведет к захвату режима a режимом b , цикл реакций, ведущий к синтезу s' , имеет преимущества по отношению к другим конкурирующим циклам, потому что он производит в M преобразование, вызванное падением локального потенциала, определяющим катастрофу Y . Следовательно, вещество s' будет массивно формироваться в p . По аналогии можно допустить, что в точке q нижней ветви па-

¹ То есть допускает «перенастройку» – прим. ред.

раболы, в которой происходит захват $b \Rightarrow a$, формируется другое вещество S , характеристический путь которого c_s обходит точку O в обратном направлении. Таким образом, в этой ситуации появляются два вещества, связанные с катастрофой Y : *сенсibiliзирующее* вещество s' , включающее корректирующий механизм, и подавляющее вещество S , приостанавливающее действие этого механизма, когда оно больше не является необходимым. Общий результат действия веществ s' и S в этой среде оказывается следующим:

1. Они *сглаживают ударные волны*, задаваемые P , способствуя переходам $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow a$. Синтез этих веществ является, таким образом, результатом *вязкости* окружающего метаболизма. С этой точки зрения цикл синтеза s' можно рассматривать как аналог механического винта, увлекаемого потоком обрушения энергии вдоль ударной волны $a \Rightarrow b$, которая создает нечто вроде каскада потенциала.

2. Предположим, что режим a , вместо того, чтобы оставаться безразличным, имеет среднее поле взаимодействия вида $u=0, v=a^2$ (положительное значение). Тогда представляющая точка состояния оказывается замурованной между двумя ветвями параболы P . После сглаживания ударной волны веществами s' и S , можно считать, что представляющая точка передвигается под действием локального потенциала W , представляющего собой гребень, вытянутый вдоль параболы P , который задерживает представляющую точку в бассейне внутри P . Простейшее уравнение для такого потенциала задается при помощи условий

$$\frac{dW}{dv} = v(u^3 - v^2),$$

и при $W(u, 0) = 0$

$$W = \frac{-v^4}{4} + \frac{u^3 v^2}{2}$$

Преобразование $(u, v) \Rightarrow (U, v)$, где $U = u^3$ превращает особую точку в начале координат W в параболическую омбилику. Легко видеть, что все траектории градиента W в полуплоскости отрицательных u сходятся к началу координат (рис. 10-10). Мы имеем, таким образом, резко выраженный эффект *стабилизации порогов*. Любое поле вида $\text{grad } W + u_0$, где u_0 положительно, со стороны отрицательных u представляет собой воронку с центром в начале координат O . Это означает, что креод Y притягивает всю окрестность начала координат O со стороны отрицательных u . Следовательно, вещества s' и S способствуют появлению катастрофы Y . Пара веществ s' и S , очевидно, *играет роль ростка катастрофы* Y .

Впрочем, если в рассматриваемой зоне произошла катастрофа, коррекция физиологического неравновесия осуществляется как локально, так и глобально посредством диффузии. Таким образом вероятность появления катастрофы Y на других участках ткани уменьшается, и область, содержащая s' и S , приобретает монополию на Y . Одновременно появление потенциала W может создавать на полуплоскости $u < 0$ вторичную притягивающую морфологию.

Очевидно, что это объяснение может быть полезным только в том случае, если вещества s' и S устойчивы в организме и относительно фиксированы. Впрочем, в случае одноклеточных известно, что большинство, если не все органоиды, связаны с организующими центрами, свойства которых передаются по наследству. При размножении они делятся таким образом, что каждый потомок получает собственный набор органоидов. Мы подходим, таким образом, к центральной проблеме генетического материала.

В. Формализм воспроизводства.

Генетический материал

Пусть имеется градиентная динамика, задаваемая потенциалом $V: U \Rightarrow \mathbf{R}$. Предположим, что проекция $p: U \Rightarrow \mathbf{R}^4$ это система ее первых приближенных интегралов. Тогда из-за эффекта

связи (couplage), на базовом пространстве \mathbf{R}^4 сформируется среднее векторное поле X . Назовем динамику V самовоспроизводящейся, если поле X имеет в \mathbf{R}^4 (рассматриваемом как пространство-время) замкнутую притягивающую траекторию g , такую что если описывать g в направлении, задаваемом X , то наблюдается бифуркация аттрактора, связанного с V , на два или большее число аттракторов, которые в рамках такого описания можно считать начальными. Говоря точнее, g может быть не только замкнутой траекторией типа цикла, но и системой дуг, имеющей в заданной точке бифуркацию. Пути этого типа можно построить в универсальной развертке особенности типа кармана (вывернутая ударная волна) (рис. 10-11) и в универсальной развертке параболической омбилики.

Мы предполагаем, что глобальная динамика живого существа представляет собой структуру такого типа. Это вновь заставляет сказать, что *воспроизводство живого существа нужно рассматривать как катастрофу, структура которой во всем аналогична структуре катастроф физиологической регуляции*, которые мы рассматривали выше. Катастрофа деления имеет в \mathbf{R}^4 организующий центр O , который можно рассматривать как центр цикла g . Случаю митотического цикла, который мы рассмотрим подробнее в следующей главе, соответствует фигура с петлей строгого удвоения. В случае многоклеточных предпочтительнее считать, что g задана в универсальной развертке параболической омбилики, что ведет к явлению обрушения в гонаде и позволяет интерпретировать чередование гаплоид-диплоид, характерное для полового размножения. Этот подход позволяет решить старую проблему курицы и яйца. Курица и яйцо это временные сечения глобальной конфигурации, имеющей скрытый организующий центр O , вокруг которого неограниченно обращается волна роста.

Если это допустить, то естественно утверждать, что катастрофа деления клетки тоже может иметь зародышевые структуры. Такое вещество s должно оказывать ферментативное воздействие cs , задаваемое путем, который обходит организующий центр O катастрофы дубликации. Это означает, что вещество s перед катастрофой деления будет предварительно раздваиваться. Это вещество s будет содержать хромосому в интерфазе.

Теперь остается объяснить, как зародышевая структура метаболической катастрофы может иметь генетические свойства. Приблизительно можно сказать так: организующие центры метаболической катастрофы и катастрофы деления расположены в пространстве U локальных состояний таким образом, что если один из путей $c(x)$ обходит один из этих центров, то он обходит и другой. В следующей главе мы предложим интерпретацию взаимодействия между метаболизмом и генетической передачей структуры.

Вернемся к нашей катастрофе Риманна-Югионо, описанной выше. Допустим, что кроме веществ s' и S , способствующих переходам $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, существуют также вещества a и b , ферментативный эффект которых в локальной среде описывается векторными полями $U=0$, $V= a^2$, характеризующими, соответственно, режимы A и B . Допустим также, что система из четырех веществ $as'bS$ может образовывать комплекс, ферментативный эффект которого заключается в содействии внутренним колебаниям в параболе P . Если наступает момент, когда колебания затухают под воздействием глобального понижения уровня окружающего метаболизма, то можно наблюдать, как в результате взаимодействия этот комплекс удваивается (случай хромосом) или размножается. В гаметогенезе исчезновение этих колебаний вызывает возбуждение соответствующих хромосом, ферментативная петля которых входит в резонанс с циклом малых колебаний. Таким образом происходит массивированное образование зародышевого вещества, которое распространяется в цитоплазме, начиная с петель хромосомных ламповых шеток. С этой точки зрения разумно допустить, что решающую роль в развитии играют цитоплазматические структуры ооплазмы, а не клеточный материал. ДНК, напротив, играет господствующую роль в фазе подавления, то есть в гаметогенезе.

Г. Формальные эффекты локализации: обратимость переходов и стабилизация порогов

Рассмотрим функциональную катастрофу, например, образование пищеварительной вакуоли у амебы. Ее можно представить как вариацию волны роста $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow T$ в универсальной развертке катастрофы U . Локальный организующий центр O соответствует страте S множества бифуркации. $F^1(O)$ дает критическую точку p , где закрывается пищеварительная вакуоль. Локализация функции формально выражается следующим образом: волна роста F может проникнуть во множество бифуркации S только в точке O строго определяемой при помощи S . Естественно допустить, что эта локализация локально распространяется на область J , трансверсальную к S в O (чему, впрочем, предшествует описанное выше явление содействия притягивающих положений, формирующих воронку), которая захватывает волну F и направляет ее в нужном направлении. Когда функция не находится в активном состоянии, связанная с ней постоянная органическая структура соответствует в \mathbf{R}^3 прообразу площадки J по F , который содержит критическое сечение $F(\mathbf{R}^3, O)$ по страте S . Это значит, что в таких случаях всегда имеется *пороговая ситуация* (в рассматриваемом случае — поскольку вакуоль закрывается в O), которая реализуется органически. Трансверсальный путь J может быть естественно описан как обратимый периодический цикл, ликвидирующий особенность в O (клацканье зубами!). Здесь мы на самом деле имеем пространственно-временную реализацию конкурентного цикла, аналогичного циклу в параболе катастрофы Риманна-Пюгоннио, рассмотренному выше. Впрочем, следует заметить, что такая обратимость переходов имеет место только для самой органической структуры, а не для всего поля, которое, как правило, ориентированно и необратимо. Рот поглощает пищу, а сердце перекачивает кровь всегда в одном и том же направлении.

Подводя итог, можно так описать множество преобразований, ведущих к органогенезу (рис. 10-12): первичная функциональная катастрофа соответствует пути c в универсальной развертке U организующего центра. Заметим, впрочем, что важны только начало и конец пути, а середина относительно произвольна. Путь c встречается со стратами S_1, S_2, \dots, S_n , соответствующими критическим топологическим ситуациям, то есть порогам. Эти пороги стабилизируются в точках C_i , определяемых стратами бифуркации, и порождают устойчивые переходы J_i . Используя словарь эмбриологии, можно сказать, что каждый переход J_i создается специа-

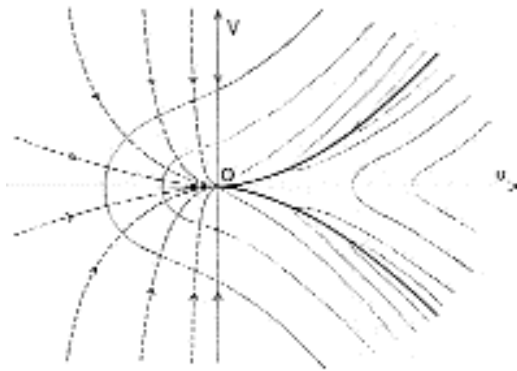


Рис. 10-10. Стабилизация порогов.

лизированным морфологическим полем, которое формирует соответствующую ситуацию-порог и подвижные органы, которые обеспечивают петлю перехода J_i . Между первичными полями коразмерности один функциональный переход обеспечивается органами, создаваемыми вторичными полями при стабилизации первичных полей посредством их резонансного взаимодействия (как в случае с пищеварительной трубкой, соединяющей рот и кишечник). Ясно, что можно определить формальную структуру эпигенетического полиэдра, ответственную за возникновение органов, связанных с

основными физиологическими функциями: питанием, дыханием и т.п.

Д. Органы эмбриона

Возникает естественный вопрос: если органы необходимы для жизни, как эмбрион обходится без них на ранних фазах своего развития? Можно ответить, что условия жизни эмбриона не естественны. Даже не касаясь крайнего случая млекопитающих, когда эмбрион паразитически живет в материнском организме, он располагает ресурсами яйца (вителлины и т.п.), которые позволяют ему отсрочить потребность в пище. Что касается функций дыхания, выделения и циркуляции, то пока соотношение поверхности к объему не падает ниже определенного предела, то есть пока организм невелик, они могут осуществляться через кожу. Но при достижении определенного размера создание органов становится необходимым. Поразительно, что окончательное установление некоторой функции может вызывать последовательность катастроф, последняя из которых отменяет все предыдущие. Хорошо известен пример последовательности почек (*пронефрос*, *мезонефрос*, *метанефрос*). Хорду у позвоночных также можно рассматривать как протоскелет, обреченный на исчезновение с момента образования позвоночника. Это в чем-то напоминает малоизученное, но тем не менее несомненное геологическое явление: когда очень плоское плато изрезается эрозией, то ложбины, спускающиеся на равнину, как правило, начинаются в области, образованной рвами, расположенными вдоль ложбин, глубина которых увеличивается в направлении равнины. Это, конечно, является результатом действия подземных вод, бассейн которых более широк, чем ручьи на поверхности. В случае с тремя почками эмбриона позвоночного топологическая непрерывность между этими тремя органами обеспечивается эпителием, образующим выделительный канал. В приведенной выше геологической аналогии эпителиальной катастрофе соответствует подземная циркуляция. Ее следует считать более устойчивой, чем катастрофу мезенхимы, к которой она приводит (явление, называемое *виртуальной катастрофой*).

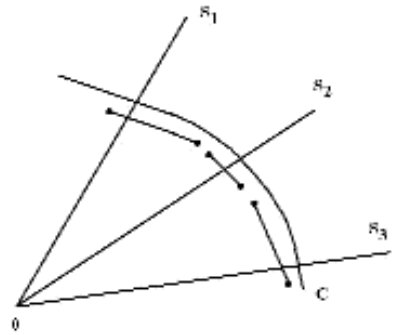


Рис. 10-11.

10.5. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СХЕМА КАТАСТРОФЫ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ

Пусть H – морфогенетическое поле, заданное креодом C с базой U . Предположим, что поле H возникает в результате взаимодействия двух «родительских» тканей E_1 , E_2 и порождает две новые ткани h_1 , h_2 (см. рис. 10-13, на котором изображен симплекс эпигенетического полиэдра размерности один). В нашей метаболической модели ткани E_1 , E_2 задаются соответственно аттракторами h_1 , h_2 локальной биохимической кинетики. Когда эти два вибратора входят в резонанс, происходит катастрофа. Посредством диффузии на U формируется структурно неустойчивая динамика-произведение h_1 h_2 . Аттрактор-произведение h_1 h_2 вырождается в аттрактор H меньшей размерности. Удобно допустить, что существует расслоение вида $H \Rightarrow h_1$ $h_2 \Rightarrow Q$, где фактор-пространство Q параметризует все возможные положения окончательного резонанса. Это пространство Q – управляющее пространство катастрофы, связанной с C . Действительно, окончательная морфология после катастрофы задается вспомогательным статическим или метаболическим полем внутреннего пространства Q , которое характеризует конкуренцию между резонансами. Это поле U может быть определено как среднее поле взаимодействия

вия. Вначале поле X в h_1 h_2 касательно к слоям расслоения h_1 $h_2 \Rightarrow Q$. После легкого возмущения оно изменяется, и интегрирование горизонтальной составляющей вдоль слоя порождает на Q посредством проекции поле Y . Поздние стадии этой катастрофы описываются вспомогательным метаболическим полем (Q, Y) . Аттракторы этого поля задают устойчивые резонансы c_1, c_2 , которые в нашем случае порождают новые ткани t_1, t_2 . Закономерно допустить, что поле (Q, Y) само зависит от статической модели, имеющей в центре O из U универсальную развертку W конечной размерности. Морфология этого креода будет описываться отображением F из U на W , локальной волной роста, трансверсальной к универсальному множеству катастроф K из W . Все катастрофы, рассмотренные в предыдущей главе, укладываются в эту схему.

Какой механизм контролирует среднее поле Y ? Можно допустить, что в начале катастрофы имеется зародышевая структура G со следующими свойствами. G оказывает на метаболизм среды ферментативный эффект, описываемый средним полем Y с аттрактором H_1 , но в режиме H_1 , который катализирует G , G становится неустойчивой. Зародышевая структура G развивается, образуя комплексы GA и GB , которые катализируют соответственно образование режимов c_1 и c_2 в (Q, Y) , по отношению к которым эти комплексы устойчивы. В этих условиях режимы c_1, c_2 конкурируют. Хотя фазы t_1, t_2 имеют мало различных свойств по сравнению с основными градиентами организма, окончательная конфигурация распределения между этими фазами хорошо определена. Представляется сомнительным, чтобы такой простой процесс мог отвечать за выработку очень сложной локальной структуры в органогенезе глаза или конечности. В этих случаях естественно предположить существование других механизмов, возможно, вызывающих анизотропию макромолекулярного комплекса, образованного G . (См. далее о поляризации.) Эта модель ставит следующие вопросы:

1. Происхождение зародышевой структуры G . В случае, когда исходная ткань креода единственна, зародышевая структура G начиная со стадии оогенеза располагается в цитоплазме яйца. Она имеет в основном белковую природу, но не исключено присутствие нуклеиновых кислот ДНК и РНК. В случае, когда креод возникает в результате взаимодействия различных тканей h_1, h_2, \dots , можно ожидать, что структура G возникает путем комбинаций структур G , связанных с режимами h_1, h_2, \dots и возможно, с другими компонентами ооплазмы. Геометрия и химия этой комбинаторики, как и окончательное развитие G , дают молекулярную модель метаболической катастрофы, которая является организующим центром креода. Мне кажется сомнительным, чтобы в процессах, приводящих к возникновению структуры G , активно участвовала хромосомная ДНК эмбриона. Неправильности развития, которые связывают с мутациями, по крайней мере на первичной стадии вызываются дефектами ооплазмической структуры. Таким образом, значительное расширение эмбриона на стадии гастрюляции, как кажется, не должно вызывать серьезных нарушений окончательных морфогенетических полей. Это значит, что результаты предшествующих генетических нарушений в различных клетках могут быть компенсированы. Иное дело внедрение в среду химических веществ, и известные тератогенные (повреждающие зародыш) эффекты многочисленных лекарств и наркотиков.

2. Частое исчезновение организующих центров в эмбриологии. Мы видели, что зародышевое вещество G в принципе нестабильно. Кроме того, если база G не исчезнет в результате некроза, разве она не будет подвергаться дифференциации,? Примеры этого типа эволюции хорошо известны в эмбриологии (хорды).

3. Поляризация. Предположим, что задано морфогенетическое поле, определяемое вырождением $H_{i-1} \Rightarrow H_i$ аттракторов локальной биохимической кинетики. Мы видели, что соответствующий креод задается отображением F базы U креода в пространство универсальной развертки W особенности метаболизма, заданного полем взаимодействия (Q, Y) . Итак, если мы

хотим, чтобы морфогенез был хорошо задан, нужно, чтобы отображение F было погружением в W (трансверсальным к универсальному множеству катастроф развертки W). Иначе говоря, необходимо, чтобы была возможность различить точки ткани при помощи локальных биохимических свойств. Как такая полярность может возникнуть, а затем поддерживаться?

Является классической истиной, что в каждой ткани существуют устойчивые градиенты. Например, анимально-вегетативный градиент яйца, грубо говоря, порождает цефало-каудальный градиент животного. Несомненно, существуют также и другие градиенты (дорсовентральный и билатеральный) более гибкие, чем предшествующие. Используя геометрическую терминологию, можно сказать, что любая ткань A допускает псевдогруппу локальных эквивалентностей G_A . Когда псевдогруппа G_A является множеством локальных перемещений, говорят, что ткань гомогенна. Если напротив, G_A сводится к единице, то говорят, что ткань A *всюду поляризована*. Снова нужно подчеркнуть, что на A существуют локальные координаты биохимической природы, позволяющая различать все точки. Как мы видели в главе 6, любое метаболическое поле H , допускает псевдогруппу локальных эквивалентностей $G(H)$, и катастрофа $H_{-1} \Rightarrow H$ возможна только если $G(H)$ является псевдоподгруппой псевдогруппы $G(H_{-1})$. Поэтому всюду поляризованная ткань может в результате катаболической катастрофы снова породить всюду поляризованную ткань. Тут проявляется одно из динамических оправданий явления индукции. При нейрализации эктодермы гомогенной гастролы посредством хорды мезодерма вызывает не только появление нейрального режима, но также его поляризацию (вдоль цефало-каудальной оси), которая продолжает исходную поляризацию мезодермы. Для того, чтобы изначально однородная ткань стала поляризованной (хотя бы частично), необходимо, чтобы эта ткань подверглась воздействию ранее поляризованной индуцирующей ткани (понятно, что утверждение о том, что эктодерма гастролы гомогенна, должно быть уточнено). В катастрофах, в которых $G(H)$ это на самом деле псевдоподгруппа $G(H_{-1})$, то есть в которых асимметрия возникает *ex nihilo* (в нарушение принципа Кюри), следует ожидать эффекта критической массы. Катастрофа происходит только когда скапливается достаточно большая масса ткани. Так в жидкости, находящейся в состоянии переохлаждения, твердый кристалл вызывает отверждение только если его объем превосходит определенный порог (определяемый по отношению поверхность/объем). Одна из формальных причин этого явления может быть выражена следующим образом: реализация катастрофы $H_{-1} \Rightarrow H$ требует поляризации локальных сечений $G(H_{-1})/G(H)$. Чтобы эта поляризация создавала градиент концентрации координатных веществ, необходимо чтобы этот градиент мог образовываться и поддерживаться, несмотря на диффузию через ограничивающую поверхность. Отсюда и условие о соотношении поверхности к объему.

Допустим, что поляризация тканей это предварительное условие всякого морфогенеза. Но какова ее биохимическая основа? Часто говорят о *palisading of cells*, т.е. об образовании из клеток периодических структур, которое предшествует эпигенезу органа. Действительно, можно допустить, что в ткани, образованной кубическими клетками ребер, параллельных осям Ox , любой клеточный барьер асимметричен по отношению к некоторым координатным веществам. Так, перегородки, перпендикулярные Ox , способствуют прохождению моле-

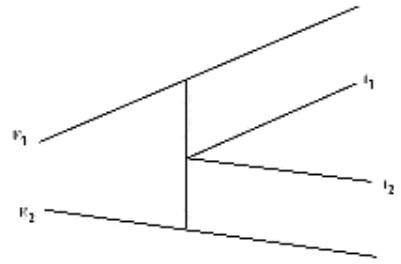


Рис. 10-12.

кул вещества q_k в направлении возрастания x , и замедляют перенос этого вещества в противоположном направлении. Известны явления этого типа в случае перегородки нейрона и ионов калия. Но эта схема требует, чтобы физиологические свойства клеточной перегородки зависели от пространственного направления, что кажется достаточно смелой гипотезой для современного состояния физиологии. Если это тем не менее так, то три вещества q_1, q_2, q_3 могут образовывать градиенты концентрации, позволяющие различать точки.

Тем не менее, эта схема, очевидным образом, недостаточна. Часто морфогенез часто имеет внутриклеточную, то есть чисто цитоплазменную основу. Например, иглы голотурии с очень тонкой структурой образуются в синцитии. О биохимической природе этих поляриностей можно только строить предположения. Я только настаивал бы на том, что некоторые биохимические параметры могут иметь чисто кинетическую природу и следовательно, быть совершенно ненаблюдаемыми при химическом анализе. Впрочем, нельзя исключить и гипотезу цитоплазматической периодической структуры вроде разложения потока при наличии двух противодействующих градиентов на конвекционные ячейки (явление Бенара). Можно также предположить, как мы это сделали выше, что всякий локальный режим связан с периодической макромолекулярной конфигурацией, которая является настолько гибкой, что любая попытка наблюдения и фиксации ее разрушает. Взаимодействие двух тканей описывается посредством интерпретации конфигураций, которые предшествуют перекомбинации и геометрия которых имитирует катастрофу $H_{-1} \Rightarrow H$, характеризующую морфогенетическое поле. Когда мы имеем дело с созидательной катастрофой порядка ($G(H)$ строго меньше, чем $G(H_{-1})$), не следует сомневаться, что такой катастрофе предшествует поляризация ткани. Следует, видимо, допустить, что до установления нового режима H ткань входит в состояние *виртуальной катастрофы*. Многочисленные участки нового режима возникают в ткани случайным образом, но, будучи очень маленькими, они оказываются неустойчивыми и исчезают. Эта текущая ситуация может продолжаться до тех пор, пока будет достигнут новый устойчивый режим роста. Таким образом этой катастрофе предшествует поляризация виртуальной катастрофы. Математическая теория явлений этого рода еще не создана. Я хочу только указать на причину, почему при такой катастрофе, *создающей порядок* (точнее, асимметрию), следует ожидать, что базовое пространство будет поляризовано. Предположим, что исходный аттрактор H_{-1} расслаивается на фактор-пространстве Q , и что некоторый слой становится новым аттрактором H . Предполагается, что старый режим является гомогенным на своей базе U и эргодическим на многообразии H_{-1} . Это значит, что вероятность появления представляющей точки системы в элементе объема dH_{-1} многообразия H_{-1} над элементом объема dU базы U пропорциональна произведению объемов $dH_{-1} \wedge dU$. Такая ситуация имеет все шансы оказаться структурно устойчивой, по крайней мере, если рассматривать большие объемы U и если усреднять по U . Это означает, что вероятность появления проекции представляющей точки на фактор-множестве Q также пропорциональна объему dQ пространства Q , по крайней мере, для больших объемов U . Окончательная катастрофа будет задаваться отображением $h: U \Rightarrow Q$ (где Q это управляющее пространство катастрофы), которое должно быть сюръективным и иметь однородную меру на U . Объем $h^{-1}(dQ)$ должен быть независимым от положения элемента dQ . Поэтому отображение h должно быть сюръективным и периодическим, что дает поляризацию U . Действительно, в большинстве случаев тип функции h хорошо определен. Только для функции этого типа новый режим может представлять термодинамические преимущества перед прежним и вытеснять его.

Эта необходимость перенести поляриность, чтобы освободить («дерепрессировать», если употреблять соответствующий жаргон) потенциальный режим на данном участке ткани, отме-

чалась многими биологами, но я не думаю, что этому обстоятельству придавалась та важность, которую оно заслуживает. Типичным примером является оплодотворение яйцеклетки, когда, как известно, точка проникновения сперматозоида часто определяет будущую плоскость симметрии зародыша. Конечно, это не является необходимым для запуска катастрофы. Путем искусственного оплодотворения химическим агентом (особенно при оплодотворении культуры ткани экзогенным индуктором), можно запустить новый режим и установить морфогенетическое поле, которое будет почти таким же контролируемым, как поле, которое возникает в результате действия естественного индуктора. Но таким образом полярность устанавливается в ходе плохо определенного и структурно неустойчивого процесса. Незначительные вариации начальных условий могут полностью изменить ориентацию морфогенеза и его качественное выражение. Живая динамика не может мириться с такой неустойчивостью. Таким образом, в любом индуцирующем действии нужно различать два различных термодинамически связанных аспекта:

1. Запуск нового режима за счет предыдущего,
2. Поляризация индуцируемой ткани.

Когда катастрофа приводит к асимметрии, второй аспект становится необходимым для связанного развития, и это способствует включению первого.

При естественной индукции поляризация индуцируемой ткани осуществляется параллельно (при непрерывном продолжении) поляризации индуцирующей. Ориентация индуцируемых органов продолжает ориентацию индуцирующих. Распространение поляризации индуктора на индуцируемую ткань легко объясняется термодинамической диффузией поляризованного режима. Динамическая схема будет следующей: пусть A это режим индуктора, предполагаемый однородным, $A \rightarrow B \rightarrow C$ — это катаболическая катастрофа, определяющая индукцию. После контакта с индуктором индуцируемая ткань принимает режим-произведение $A \cdot B$ и проходит через катастрофу, которая переводит ее в C . Естественно допустить, что базовая ткань $A \rightarrow B \rightarrow C$ поляризуется именно режимом A .

4. Эмбриологическая индукция. Эти соображения, возможно, объясняют постоянные неудачи экспериментальной биологии обнаружить *специфический агент-индуктор*. Если такой специфический агент не удастся идентифицировать, есть все основания считать, что он не существует. Очевидно, существует множество агентов-индукторов: любое химическое вещество, действующее на соответствующую ткань, может вызвать морфогенетическую катастрофу. Ткань, например, эктодерма гастрюлы подвержена большому числу качественно различных катастроф, и выбор той или иной катастрофы определяется химической природой агента. Впрочем, известно, что для реализации поздних весьма тонких индукций необходимо наличие таких сложных индукторов как белков, извлекаемых из живой ткани. Грубые и слабо специфизированные индукторы (повышение температуры, изменение числа pH, метиленовая синька и т.д.) могут столкнуть эктодерму в самый близкий креод — головной нейтрализации. Но с моей точки зрения, индукция в основном касается биохимической кинетики. Катаболическая катастрофа это биохимический аналог резонанса в динамике вибраций. Несомненно, что некоторые вещества могут благодаря своему ферментативному воздействию, оказывать каталитическое или напротив, ингибирующее действие на некоторые циклы биохимических реакций, а следовательно, и на определенные локальные биохимические режимы. Однако вовсе неочевидно, в какой мере это действие специфично, существуют ли для любого локального режима специфические катализаторы или ингибиторы. Можно в лучшем случае допустить, как это сделано выше, что любой локальный режим связан с метастабильной макромолекулярной

конфигурацией периодического характера, играющей роль зародышевой структуры. Индукция происходит посредством рекомбинации этой конфигурации.

Схема этого рода не противоречит классическим опытам, в которых между индуктором и индуцируемым вставляют миллиметровый фильтр. Диффузия «индуцирующего агента» при нормальном развитии проходит ограниченно, ориентированно и контролируемо, что представляет собой принципиально иное явление, чем простая индукция.

5. Аномальное развитие. Пусть с каждой катастрофой дифференциации $H_i \Rightarrow H_k$ связано управляющее пространство W_k и соответствующий креод. Такой креод будет находиться в зоне влияния креодов, порождающих H_i и H_k . В своей зоне влияния он будет иметь креоды, связанные с катастрофами вида $H_k \Rightarrow H_m$. Было бы сложно заранее уточнить структуру модели, а именно, выбор дочернего креода в омбилической зоне. Вопрос можно поставить так: являются ли случаи нарушения органогенеза результатом тератогенной модификации атласа креодов или только результатом изменений в развитии волны роста. Весьма вероятно, что различие между этими двумя типами уродств только кажущееся. Введя достаточное число параметров, можно построить *атлас креодов*, то есть универсальный эпигенетический полиэдр для рассматриваемого пространства, подходящий для любого генотипа. Любой тератогенный эффект будет в таком случае результатом помех при развитии волны роста в этом универсальном атласе, и он сможет вызывать качественные и количественные модификации встречающихся креодов.

10.6. ПРИМЕРЫ ОРГАНОГЕНЕЗА

А. Дыхание и кровообращение

1. Происхождение кровообращения. Применим рассмотренный выше формализм для гипотетического объяснения происхождения функций кровообращения и дыхания. С этой целью мы сначала исследуем один фундаментальный физиологический процесс, а именно вариацию интенсивности метаболизма j (измеряемую, к примеру, количеством кислорода в единицу времени на кубический сантиметр ткани) как функции локальной концентрации кислорода q . Для больших значений q естественно допустить, что j растет вместе с q приблизительно линейно, а затем стремится к пределу, значение которого задается количеством пищи (горючих метаболитов), доставляемых данной ткани. При уменьшении q , напротив, естественно допустить, что существует пороговое значение a , выше которого происходит катастрофа. Метаболизм резко спадает вплоть до малого значения j_0 , которое стремится к нулю вместе с q . Ткань оказывается в состоянии замедления жизни, виртуальной смерти. Если попытаться оживить ткань, увеличивая давление кислорода q , то для возобновления нормального метаболизма будет необходимо значительно превзойти порог a . Все это поведение можно символизировать при помощи сборки Риманна-Югонио, представляя j как функцию q (рис. 10-13). Если температура и питание горючими метаболитами уменьшается, то эта сборка распрямляется, делая j однозначной возрастающей функцией q .

Обозначим для дальнейшего через j_0 нижнюю ветвь (замедление жизни), а через j_1 — верхнюю ветвь сборки (нормальный метаболизм). Промежуточная ниспадающая ветвь, представляет неустойчивый и, следовательно, несуществующий режим.

Рассмотрим теперь организм O . Пусть x будет расстоянием от центра организма до периферии (эпидермы у многоклеточных или клеточной мембраны у одноклеточных). Величины q и j являются теперь функциями x . Пусть U это скорость диффузии кислорода в направлении возрастания x . Имеют место дифференциальные соотношения вида

$$\frac{dq}{dx} = -ku \frac{du}{dx} = -j$$

Из этого следует, что q как функция x это решение дифференциального уравнения

$$\frac{1}{k} \frac{d^2 q}{dx^2} = j'(q) \quad (E)$$

которое при $x=A$ принимает значение q_0 , равное давлению кислорода внешнего воздуха. Для простоты возьмем организм размерности один, задаваемый сегментом $|x| < A$. Мажорируем второй член уравнения (E) линейной функцией вида $j_1(q) < m \cdot q$. Искомое решение $q=v(x)$ мажорируется решением упрощенного уравнения $1/k \frac{d^2 q}{dx^2} = m \cdot q$

Из соображений симметрии это решение $w = B \exp \alpha x + B \exp -\alpha x$, где $\alpha^2 = mk$. В центре организма $w(0) = 2B$, а отношение $w(0)/w(A)$ равно $2(\exp \alpha A + \exp -\alpha A)^{-1}$. Это отношение стремится к нулю, когда A стремится к бесконечности. Таким образом, когда размер организма превосходит определенный порог, простая диффузия не может обеспечить достаточное снабжение кислородом центра организма: $q(0)$ оказывается ниже порога катастрофы и образует область замедления метаболизма в центре организма. Эту область можно рассматривать как выделительную вакуоль, наполненную CO_2 и другими отходами. Эта область впоследствии стремится выйти наружу.

Очевидно, можно счесть излишним и эти количественные рассуждения и согласиться с очевидным аргументом о соотношении поверхности к объему. Тем не менее, интересно нанести на тот же график не только решение уравнения (E), но и уравнения

$$\frac{1}{k} \frac{d^2 q}{dx^2} = j'(x) \quad (E_0)$$

соответствующего условиям замедления жизни. Если нанести это решение (близкое к прямой, поскольку j' мало), проходящее через точки $x = -A, q_0$ и $x=0, q=a$, получатся две ветви кривых C_0, C_1 , интерпретация которых очевидна. C_0 , которая связывает абсциссу $x=-A$, с точкой $x=0, q=a$, изображает движение наружу выделительной вакуоли. Кривая C_1 , выходящая из точки $x=-A, q=q_0$, изображает поглощение при помощи рифеоцитоза вакуоли из внешней среды, богатой кислородом. Ясно, что одновременное использование кривых C_0 и C_1 вместо начального решения $q=v(x)$ позволяет обеспечивать центр кислородом и устранять избытки углекислого газа на уровне, сильно превосходящем критический порог. Как в конце концов устанавливается это решение?

2. Кровь. Тут встает проблема возникновения гемоглобина. Допустим, что в соответствии с нашей глобальной моделью метаболизм первичной зародышевой клетки (оогонии или сперматогонии) представляет собой образ фигуры глобальной регуляции данного вида. В конфигурационном пространстве, содержащем эту форму, мы имеем гомологические координаты величин q, x, j , которые мы обозначим теми же буквами q, x, j (хотя они необязательно имеют ту же интерпретацию, особенно пространственная переменная x).

Допустим, что представляющая точка локального состояния описывает фигуру, близкую к той, которая задается дифференциальными уравнениями E , а затем E_0 (когда размер организма приближается к критическому). В этих условиях можно получить цикл подобный определяемому с помощью C_0 и C_1 , и ограниченному ординатами $x=-A$ и $x=0$, то есть установить закрытую траекторию спектра локального метаболизма, цикл доставки кислорода и устранения CO_2 . Ординаты $x=-A, x=0$ задают на этом цикле химические катастрофы, которые представляют собой быстрые преобразования фазы богатой CO_2 в фазу богатую кислородом, и наоборот (рис. 10-14). Гемоглобин появляется как *зародышевое вещество* этих двух катастроф. Этот белок, который возникает за счет стабилизации химических порогов, образует комплекс-

сы оксигемоглобина и редуцированного гемоглобина, дает молекулярную модель рассматриваемых катастроф. Я здесь не затрагиваю проблему гемоглобинового гена. Скажем только, что разумно думать, что он образуется путем макромолекулярной комбинации (точнее комбинаторно), начиная с условий, которые стабилизируют режим j_0 замедления жизни, но на метаболическом уровне, достаточно высоком для того, чтобы избежать необратимых деградаций жизненного механизма.

Начиная с момента формирования гемоглобина, непрерывная фаза в организме описывается циклом S_0C_1 , и устанавливается кровообращение. Критический порог размера организма преодолевается. Поначалу течение крови осуществляется за счет простой диффузии, когда молекулы гемоглобина увлекаются уменьшающимся градиентом концентрации O_2 и растущим CO_2 в направлении наружу-внутри.

3. Сердечная функция. Однако в этот момент появляется новый порог. Действительно, согласно уравнению E_0 , которое дает $j_0=0$, скорость u постоянна и положительна, и следовательно, q становится линейной убывающей функцией x : $q=q_0 - u/kx$. Таким образом, при достаточно больших x q становится меньше критического порога a , и центральные ткани снова начинают задыхаться. Вместе с тем, поток крови становится прерывным, периодическим и разорванным на капли. Поэтому ткань, ограничивающая кровяную фазу, в организме, обязательно должна быть гибкой. Почему эта ткань становится мышечной? Здесь следует принять во внимание метаболический образ процесса в фигуре регуляции, реализованной в первичных зародышевых клетках. Можно допустить, что в ходе эволюции этот образ уточняется, включая в себя все больше и больше деталей. Если, в частности, он содержит образ внешнего пространства, он также содержит и образ внутреннего пространства самого организма. Действительно, кривая, такая как дуга C_1 представляет вначале движение вакуоли с кислородом снаружи вовнутрь. Эту кривую можно представить как пространственную катастрофу, заданную петлей волны роста $F(\mathbf{R}^3, T)$ в универсальном пространстве W , которое символизирует пространство органов. После проекции вдоль траекторий вида $F(m, t)$, $m \in \mathbf{R}^3$ универсальная модель данной катастрофы оказывается в \mathbf{R}^3 гибким цилиндром, представляющим собой сосуд, соединяющий крайние точки. Любая гибкая и подвижная ткань одновременно является соединительной, а если от ткани еще требуется работа, то мышечной. В силу формализма стабилизации порогов, петля $F(\mathbf{R}^3, t)$ стабилизируется в W , и ее частота задается корректирующим законом, который может быть интерпретирован следующим образом: поскольку интенсивность метаболизма ткани j является функцией скорости потока крови u , эта интенсивность также имеет сборку с вертикальной касательной, проходящей через точку критической скорости u_0 . Запуск сердечной функции можно интерпретировать как сглаживание этого неудобства, этой физиологической ударной волны. За счет локального уменьшения j (рис. 10-15) можно получить значительный рост скорости u , преобразуя высвободившуюся энергию в сердечную и артериальную мускулатуру. Здесь мы снова встречаем особый случай явления, отмеченного выше в 10.4.В. Сглаживание катастрофы (разрывности) влечет стабилизацию ее организующего центра, что в свою очередь порождает вторичную морфологию. Важность, которая впоследствии придается сердечной функции, позволяет достичь размера самых больших известных животных. Заметим, что принципиальная схема сердца (рис. 10-16) определяется графиком 10-15, при условии, что стрелки становятся параллельными. Сердечная ткань генетически характеризуется изменяемым аттрактором, универсальная развертка которого это стягивающийся цилиндр. Это, кажется, единственный известный случай клеточной дифференциации, конечный элемент которой изменяется во времени строго периодически. Возможно, эти рассуждения прояснят проблему номер один в кардиологии: почему бьется сердце?

4. Дыхание. Теперь мы рассмотрим морфологию легких и капиллярной системы. Эта морфология очевидным образом связана с обобщенной катастрофой с пространственными параметрами. Случай с легкими особенно интересен. Первая катастрофа состоит в образовании пузырьков воздуха посредством инвагинации вакуолей из внешней среды. Эта катастрофа стабилизируется в пороговой ситуации, при которой вакуоли сохраняют связь с внешним воздухом. Обратимый функциональный путь позволяет периодически наполнять и опустошать эти вакуоли. То, что речь идет о катастрофе поглощения, позволяет, может быть, объяснить, почему легочный эпителий имеет эндодермическое происхождение. На поверхности вакуолей (легочных альвеол) происходит капиллярная катастрофа приблизительно периодического характера типа клеточных конфигураций, наблюдаемых в явлении Бенара (легочные пузырьки).

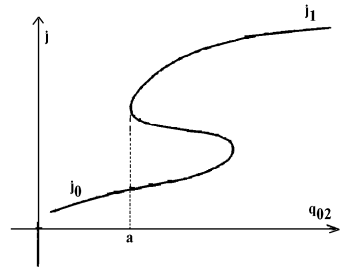


Рис. 10-13. Сборка, определяющая интенсивность метаболизма j как функцию концентрации кислорода q .

Б. Органогенез нервной системы

1. Происхождение нервной функции. Эволюционные корни нервной системы весьма глубоки. Как только возникает орган, практически сразу же происходит и создание специализированной системы для управления его деятельностью. Так у одноклеточных, имеющих закрепленные органоиды, например, у ресничатых инфузорий, нужно со всей очевидностью допустить существование цитоплазмической структуры, играющей роль нервной системы. Как без структуры такого рода можно объяснить тот факт, что биение различных ресничек оказывается синхронизированным, реализуя глобальные функциональные поля удивительной эффективности? Существование такой координирующей функции необходимо, однако неизвестна ни ее основа, ни ее происхождение. В последнем можно для начала считать это происхождение генетическим. В случае ресничек одноклеточного известно, что они происходят из *базального тела*, чего-то вроде организующего центра, который в свою очередь происходит из центриоли. При делении особи, оказывается более экономичным дублировать только организующий центр, а не все зародышевые структуры каждого из органов поля по отдельности. Единство организующего центра, без сомнения, определяется тем, что глобальная структура, которая его порождает, структурирована таким же образом, как и различные порожденные органеллы в рамках единой функциональной структуры. Не лишено основания предположение, что нервы и мышцы имеют общего цитоплазмического предка, представленного микротрубками диаметром 200 А, которые встречаются в инфраструктуре ресничек и первичных нейритов нервных клеток гидры. Будучи поначалу связанной со всеми катастрофами движения, эта структура затем претерпевает окончательную дифференциацию. В точках катастрофы функционального пути, приводящего к изменению топологии системы, имеется механическое сопротивление, которое необходимо преодолеть. В этом случае эволюция будет происходить в сторону развития мышечного волокна. Напротив, в регулярных точках, где нет никакого сопротивления, эволюция происходит в направлении режима, способствующего

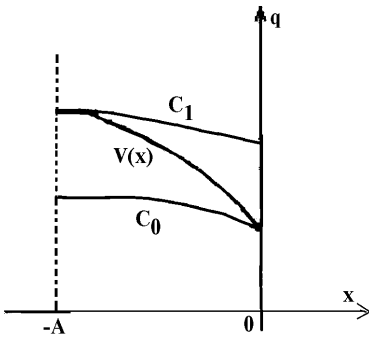


Рис. 10-14. Петля гистерезиса для концентрации кислорода.

нальная специализация связывается с клеточной. У желудочно-кишечных, например, у гидры, этот этап еще целиком не пройден, и поэтому отдельные клетки, например, мышечно-эпителиальные, выполняют смешанную функцию. С другой стороны, некоторые очень сложные поля имеют исключительно одноклеточную основу, как в случае стрекательных клеток (*книдобласт*), имеющих невероятно утонченный цитоплазматический аппарат. В таких случаях еще нельзя полностью переходить на клеточный масштаб, следует сохранить у полей цитоплазматическую основу. Нужно допустить, что дифференциация универсальных интерстициальных клеток у гидры в обобщенной катастрофе управляется нелокализованными функциональными полями, которые закрепляются по окончании плохо детерминированного процесса конкуренции. Таким образом, возникает связь: сенсорная клетка, нервная клетка и книдобласт, образуют функционально автономную группу (впрочем с еще весьма неточной геометрией), которую можно найти в многочисленных примерах эпителия животного.

У более развитых многоклеточных функционально специализированные клетки, как кажется, все происходят из одного эмбрионального листа. Именно абстрактный — геометрический или биохимический характер функциональной катастрофы определяет происхождение клетки. Глобальные физиологические поля образуются только после этого посредством сочетания различных полей образующих органов, точно скоординированного нервной системой. Вот идея динамики этого процесса.

3. Структура и роль нервной системы. Вернемся к главной идее нашей модели, которая состоит в том, что метаболизм зародышевой клетки симулирует глобальную фигуру регуляции данного вида. Такая фигура F представляет собой развертку вырожденной зародышевой динамики G . Если теперь развернуть динамику G по системе пространственно-временных параметров, мы получим описание развития, и при достижении зрелости динамика Z , определяемая средним взаимодействием на этом пространстве, даст другую реализацию F . Это значит, что активизация органа O выражается в присутствии цепочечного аттрактора макроскопической динамики Z . Эта цепь описывает не только пространственно-временное или биохимическое поле, для которого рассматриваемый орган O является базой, но также совокупность видов нервной деятельности, связанных с деятельностью этого органа. Таким образом, определенно можно допустить, что деятельность любого органа полностью описывается, а точнее симулируется нервной деятельностью связанных с ним нейронов. В рамках этой гипотезы мы получим полную симуляцию фигуры F , рассматривая только множество N видов нервной деятельности животного. Предположим (см. главу 13, примечание 7), что множество

большой скорости распространения, т.е. в сторону нервного волокна. В слоях митотического аппарата осуществляющего пространственный перенос биологически значимых веществ (хромосом) можно усмотреть другое воплощение этого гипотетического предка.

При переходе от одноклеточных к многоклеточным развитие координирующего аппарата существенно меняется. Действительно, различные органы, входящие в функциональное поле, имеют гистологическую и биохимическую специализацию, которая слишком разнообразна, чтобы ее можно было поставить под контроль единого организующего центра. Первый шаг состоит в том, что функцио-

видов нервной деятельности задает описание внешнего пространства R^3 , равно как и положение организма B в этом пространстве. Иначе говоря, пара B, R^3 это система первых приближенных интегралов нервной динамики N . Основные корректирующие поля этой фигуры – это двигательные поля (ходьба, бег), обеспечивающие синхронизацию мышечной деятельности конечностей. Образ B тела также содержит регулирующие поля, связанные с главными физиологическими функциями (кровообращение, дыхание, выделение и т.д.) хотя у человека эти поля попадают в сознание только в исключительных случаях.

В первом приближении можно сказать, что кора головного мозга является базой внешнего пространственного поля R^3 , тогда как спинной мозг (с симпатической и связанными системами) представляет собой базу поля B . Отсюда получается, что инициатива конструирования важнейших органов чувств (глаз, ухо) принадлежит мозговой ткани. Нейронный образ кожи должен располагаться в R^3 на границе с B . Но органически кожа должна находиться на границе организма. Следовательно, нужно, чтобы вся нейральная пластина инвагинировала внутрь, а мезодерма осталась неподвижной. В этом и состоит эффект нейруляции. В этом превращении, которое можно символически рассматривать как поглощение животным окружающего пространства, где ему предстоит жить, нервные клетки конечным образом представляют бесконечное пространство.

4. Эпигенез нервных систем. Органогенез нервной системы объясняется следующим образом. Локальный метаболический режим нервной ткани характеризуется почти полным устранением состояний r . Остаются только состояния s , имеющие вид первых приближенных интегралов. Физиология полностью дифференцировавшегося нейрона может быть описана следующим образом. Имеется евклидово пространство S большой размерности, которое играет роль конфигурационного пространства. В этом пространстве имеется гиперплоскость H , порог возбуждения, заданный, например, при помощи $x_n=0$. Как только представляющая точка состояния пересекает эту плоскость со стороны положительных x_n , происходит разрядка нервного импульса, что выражается в грубом переносе, перпендикулярном H , $\Delta x_n = -1$. Всегда, когда нейрон подвергается возбуждению, исходящему из соответствующего нейрона N_i , представляющая точка подвергается переносу U_i , характерному для этого нейрона (и для текущего состояния синапса связи). В определенном смысле нейрон оказывается «глупой» клеткой, стереотипные реакции которой намного грубее по сравнению с реакциями других клеток, особенно таких как лейкоциты, которые заняты борьбой против антигенов. Нейрон это большая калека, завернутая в свою оболочку Шванна, которая его защищает и кормит. Это позволяет нейрону сохранять следы всех прошлых воздействий, то есть свою историю. Но это вырождение метаболизма (которое, впрочем, сопровождается большим ростом топологической

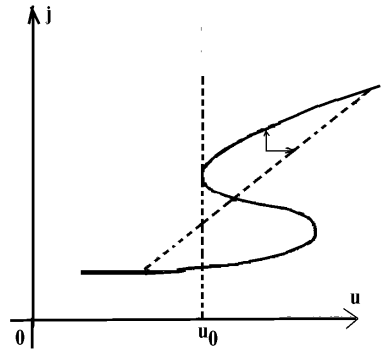


Рис. 10-15.

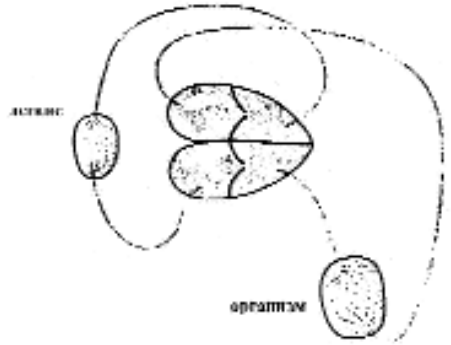


Рис. 10-16.

сложности) может происходить только постепенно. Вначале локальный метаболизм может регулироваться очень по-разному, в соответствии с кривой, ориентация которой зависит от первичных эпигенетических градиентов, с одной стороны, и от природы возбуждений, с другой. Регуляризация этой корректирующей кривой по отношению к конечной x_n сопровождается компенсирующей сенсibiliзацией цитоплазмы по отношению к горизонтальной составляющей Z функционального поля или полей, проходящей через данную клетку. Иначе говоря, качественная специфика функциональных полей, действующих на клетку, постепенно исчезает, но, локализуясь в цитоплазме, она делает ее чувствительной к эпигенетическим градиентам (напомним, что конфигурационное пространство динамики Z определяется координатами универсальной развертки зародышевой динамики G). Таким образом, *биохимическая особенность превращается в пространственную локализацию*. Клетка превращается в длинное волокно, аксон, конец которого разветвляется, когда управляющий градиент ослабевает. Возникающие таким образом связи с иннервированными органами (или с другими нейронами) оказываются устойчивыми, поскольку они позволяют посредством резонанса реализовать глобальные регулирующие поля динамики Z . Окончательная структура связей между нейронами устанавливается только после долгого процесса постепенного приближения к наилучшей возможной реализации регуляторной динамики Z (См. Приложение 3, конец главы).

Даже в чисто теоретическом отношении эта картина содержит немало темных мест. Одним из первых возникает следующий вопрос: в какой степени нервная система способна структурироваться сама собой под действием первичных эпигенетических поляризаций без влияния иннервированных периферийных органов? Учитывая весьма значительную функциональную гибкость нервной ткани (даже у взрослых), можно полагать, что к самостоятельной внутренней структуризации способны только те элементы нервной ткани, которые формируют и иннервируют органы чувств. Основная часть массы мозга является чем-то вроде *возвращающегося организующего центра*, в котором регулирующие поля, источником и базой которых являются периферические органы, моделируют основные определяющие структурные особенности.

С этой точки зрения существует определенная гомология между мозгом и гонадой. Все происходит так, как если бы начальная гибкость эпигенетических полей концентрировалась в двух органах: с одной стороны, это гонада, в которой образуются всемогущие гаметы, а с другой стороны, мозг, функциональное поле которого обладает почти неограниченной вариативностью (по крайней мере, у человека). Нервную деятельность нужно рассматривать как управление потоком информации. Функциональные поля эпигенеза, разложенные катастрофами органогенеза, восстанавливаются как поля постоянной нейронной активности в соответствующих нервных узлах. Функциональные взаимодействия между полями материализуются в соединениях между нейронами соответствующих узлов. Таким образом можно объяснить тот факт, что при рождении эмбрион лишен всех необходимых для выживания рефлексов. Но помимо управляемых соединений имеется множество соединений, установившихся без веской причины, т.е. без вмешательства сильного управляющего градиента. Это особенно верно для коры головного мозга, где градиенты-аттракторы органов чувств и движений наименее чувствительны. Постоянная деятельность нейронов, основой которой являются цепи, образованные более или менее произвольно, образует большое многообразие-аттрактор W , которое они заполняют эргодически, и их деятельность определяется слабыми взаимодействиями с потоком сенсомоторной информации, обеспечивающей физиологическое регулирование. Посредством воздействия на эту *tabula rasa* осуществляется обучение. Представляя молодому индивиду систему заранее установленных форм, действующих в качестве стимулов, обучение по-

средством индукции (резонанса) производит аналогичные формы в W , и оно может вызывать исключительно многообразную катастрофу (вообще говоря, обратимую из-за явления забывания). Если не представить индивиду эти стимулы в том возрасте, когда поле W еще является гибким и восприимчивым, система W будет стареть, то есть развиваться в сторону притягивающего вырожденного состояния, и все попытки обучения в дальнейшем закончатся провалом. Умственные возможности будут отсутствовать или будут незначительными (случай глухонемых от рождения). С этой точки зрения обучение является нормальным продолжением эмбрионального эпигенеза, а индуцирующее воздействие, осуществляемое формами поведения родителей или взрослых учителей, формально идентично эмбриологической индукции.

ДОПОЛНЕНИЕ

[1] Морфология растений. У растений в отличие от животных между двумя взрослыми особями не существует даже приблизительного глобального изоморфизма. Изоморфизм существует только на уровне индивидуальных органов, причем, немногих, таких как, например, лист, цветок или корень. Морфогенез растений естественно описывается с помощью небольшого числа морфогенетических полей (креодов), каждый из которых связан со своим элементарным органом, и прикреплен к ствольному креоду, играющему роль центра. Приведенная выше статическая модель для животных в принципе применима к каждому из этих органов по отдельности. Каждое из этих полей имеет на стволе свою территорию (не обязательно связанную), где оно может себя проявить. Механизм запуска этих креодов был хорошо изучен для случая кончика ствола, на котором появляются почки листьев.

Результат можно схематизировать следующим образом: периодически (с фиксированным периодом A) на окружности фиксированного радиуса появляется почка (*пластохрон*), кончик которой совпадает с центром окружности. По мере роста меристематической ткани радиус окружности увеличивается. Предположим, что k -ая почка появляется в угловой точке абсциссы x_k . Допустим, что катастрофа, связанная с рождением почки, оставляет на окружности след, задаваемый функцией вида $g_k = 1 + \cos(x - x_k)$, которая равна нулю в точке, диаметрально противоположной x_k , и максимальна в (x_k) . Тогда $(k+1)$ -ая почка появится на окружности C в точке минимума функции следа предшествующих катастроф, т.е. в точке минимума функции вида $F(x) = \sum_{j=1}^k e^{-jbt} g_j$, где b — положительная постоянная. Экспонента e^{-jbt} является *фактором забывания*, следом катастрофы, убывающим во времени начиная с момента катастрофы. Известно, что для этого процесса существует притягивающий цикл, такой что угол $x_{k+1} - x_k$, поделенный на 2π , дает золотое сечение a такое что $a^2 + a = 1$ (см. [2]).

Можно интерпретировать этот механизм, считая, что вокруг кончика существует касательный градиент, поляризующий окрестность кончика. Почка образуется тогда, когда этот касательный градиент пересекает определенный порог. Происходящая катастрофа осуществляет деполяризующее воздействие на градиент и на определенное время замедляет восстановление этого градиента в этой области.

Эта схема типична для морфологии растений, которая имеет в основном повторный характер. Необходимая для любого морфогенеза поляризация у растений сводится к минимуму, т.е. ограничивается эмбриональной тканью, меристемой. Как только креод пройден и структура установилась, поляризация исчезает. Регенерация потерянных органов отсутствует. Вместо этого имеется регуляция, основанная на механизме конкуренции. Когда органы (например, листья) метаболически активны, порог запуска аналогичных виртуальных креодов остается высоким, и новые органы (листья) не формируются. Если же по какой-либо причине (внутренней или внешней) метаболическая активность этих листьев снижается, морфогенети-

ческий градиент больше не тормозится и восстанавливается вплоть до перехода порога запуска. Появятся новые листья, возмещающие таким образом падение старых.

С этой точки зрения представляется, что специализация растительной клетки является скорее геометрической, чем собственно биохимической. Ее следует интерпретировать при помощи относительно легко обратимой катаболической катастрофы (опыт Стьюарта).

Сказанное вовсе не означает, что растительный морфогенез не способен к сложным конструкциям. О структурном богатстве особенно убедительно свидетельствуют цветочные структуры. Хорошо известная приспособленность некоторых некоторых цветков к телам чешуйчатокрылых, ставит во всей своей общности проблему взаимодействий, функциональных связей и отношений между живыми особями. Не боясь упрека в телеологизме, который нам могут бросить, мы признаем, что генотип львиного зева содержит *виртуальную пчелу*, и что эта виртуальная пчела определяет структуру креода-цветка. Только глобальное видение рассматриваемых механизмов эволюции позволяет представить, как может возникнуть подобная ситуация (см. гл. 12).

В итоге предлагается следующая модель морфологии растений. Зародышевый режим задается метаболическим аттрактором H (который для определенности мы будем считать притягивающим многообразием конечной размерности). Этот аттрактор характеризует режим ствола. В H мы имеем подмногообразия r, f, \dots, F , характеризующие режимы корня, листа и цветка. Разнообразные возможные положения этих притягивающих подмногообразий в H определяют пространства U_r, U_f, U_F , являющиеся модельными пространствами креодов, соответствующих корню, листу и цветку. Некоторые из этих пространств могут быть несвязными. Когда волна роста F_t пробегает соответствующую петлю, возникает повторная морфология, многочисленные примеры которой известны среди цветов, таких как, например, малая центаврия. Самым сложным является креод, связанный с цветком. Именно в пространстве U_F находится виртуальная пчела львиного зева. Не останавливаясь на проблемах разнополюсности, отметим только, что режимы мужской и женской гамет — это подмногообразия h_1, h_2 из F . Креоды $F/h_1, F/h_2$ в основном функциональные (не морфогенные), и они предусматривают пространственное объединение гамет двух полов. Зародышевый режим H это подмногообразии произведения h_1 и h_2 , и соответствующий креод $h_1 h_2/H$ управляет оплодотворением (образованием тычинки).

В схеме этого рода все различия относятся к катаболическому типу (уменьшение размерности аттрактора). Индукция между тканями происходит только в случае оплодотворения. Некоторые авторы говорят об индукции в морфогенезе растений, имея в виду, например, индуцирующее действие прокампбия на рассмотренную выше меристему в листочной почке. Без опытов разделения тканей в этой формулировке трудно что-либо усмотреть, кроме риторической фигуры.

Как мы отметили выше, глобальная морфология растений не является фиксированной. Единство в этом случае состоит только в регулятивной игре порога запуска креодов. Отсюда получается, что возможно большое число глобальных форм, а выбор между этими формами зависит от совершенно незначительных внешних или внутренних факторов. Может показаться, что отсутствие регенерации на уровне элементарного креода, например, у листа, противоречит относительной легкости, с которой растительные клетки «раздифференцируются». Возможно, в этом следует видеть эффект относительной низкой скорости растительного метаболизма. Сохранение поляризованной структуры в тканях требует постоянной борьбы против уравнивающего эффекта диффузии, роста энтропии. Единственный возможный источник постоянной поляризации имеет метаболическое происхождение. Поддержка поляризации требует активного метаболизма (именно в этом, несомненно, и заключается один из источников

теории Чайльда, даже если интенсивность метаболизма не дает с необходимостью один из градиентов поляризации). У растений часто разрушение части органа (например, листа) не вызывает возмущений метаболизма в оставшейся части, которой достаточно, чтобы вызвать раздифференциацию. Действительно, нормальный растительный морфогенез основывается в значительной степени на внешних градиентах, например, таких как градиент тяготения или свечения, как будто внутренний метаболизм оказывается неспособным поддерживать надлежащую поляризацию (за исключением эмбрионального периода и в определенных локализованных зонах типа кончика почки).

Этого краткого описания достаточно, чтобы дать представление о свойственной растениям динамике. Чтобы сделать это описание полным, следует построить модель, объясняющую регуляцию путем уточнения порогов запуска креодов, связанных с важнейшими органами. Для этого необходимо ввести координаты, представляющие локальные биохимические состояния, в пространстве которых имеются пороговые гиперповерхности. Устойчивость появляется как следствие присутствия притягивающего цикла в системе разрывов типа обрушения. С этой точки зрения данная ситуация существенно не отличается от той, которая наблюдается у животных (см. понятие формы регуляции в 2В).

2. Физиологическое приложение модели: болезнь и смерть. В конце телесного развития волна роста стабилизируется в том, что касается пространственной структуры организма (за исключением случая гонад в гаметогенезе, и случая регенерации). Но волна роста продолжает варьироваться в пространстве W внутренних параметров, где она описывает физиологическое состояние различных органов. В том, что касается нервной системы, она, в частности, описывает психическое состояние субъекта в каждый момент времени. Если интересоваться только физиологическим гомеостазом, можно рассматривать пространство глобальных состояний организма как произведение PIW состояний, представляющих различные органы. Представляющая точка w пробегает в W область, заключенную внутри определенного числа гиперповерхностей X_i , где поле развития имеет разрыв типа обрушения, заданный векторным полем U_i , которое стремится привести точку к оптимальному состоянию. Такое поле U_i связано с возбуждением деятельности одного (или нескольких) органов. Но эти гиперповерхности X_i и корректирующие разрывы U_j сами зависят от глобального состояния w посредством члена взаимодействия $A(w)$, который поначалу мал, но растет по мере удаления от оптимального состояния. Действительно, если w слишком удаляется от оптимального состояния, которые мы принимаем за исходное, то каждый орган, взятый по отдельности, больше не может работать эффективно, и в результате корректирующий эффект U_i стремится к нулю. Само собой разумеется, точки, в которых это происходит, находятся поверх барьеров, создаваемых гиперповерхностями X_i , так что в нормальном режиме w остается внутри этих барьеров. Но в следствие удара внешнего или внутреннего (болезнь) происхождения, такая точка оказывается на барьере или несколько выше него, так что динамическое развитие входит в зону качественной неопределенности. Некоторые из этих барьеров оказывают лишь слабый корректирующий эффект или могут перемещаться в пространстве w . Немедленный качественный эффект в общем случае заключается в том, что барьеры перемещаются наружу, что делает возможным значительные изменения общего психологического состояния. Но с течением времени корректирующий эффект может слабеть. Каждое частичное поле w_i стремится все больше и больше к возбуждению. В случае удачного развития корректирующий эффект может в конце концов победить. Как только наиболее затронутый орган стабилизируется, другие органы, возбужденные взаимодействием, возвращаются к менее возбужденным состояниям, что в свою очередь ведет к стабилизации больного органа и т.д. Дело идет к выздоровлению, притом что конечное со-

стояние может не совпадать с начальным в том, что касается положения барьеров и силы корректирующего эффекта (именно в этом состоят последствия осложнений). Здесь приведена еще очень неопределенная модель. Но число параметров, важных для физиологического равновесия, не может быть настолько большим, чтобы было невозможно когда-нибудь понять не слишком сложные стандартные модели. В этом будет заключаться роль врача — для каждого пациента составлять его модель и затем оценивать влияние каждого медикамента на общее развитие процесса. Это было бы в любом случае гораздо лучше, чем чисто симптоматическое лечение, к которому прибегает сегодняшняя медицина, лечение, воздействие которого на общую устойчивость чаще всего неизвестно.

В случае неудачного развития событий представляющая точка в конце концов проникает сквозь корректирующие барьеры, эффект которых слабее. Как говорится, «глупая болезнь». Амплитуда возмущений локальных биохимических состояний оказывается такова, что затрагивается метаболическая структура поля. Рассмотренный выше метаболизм блокируется из-за недостатка важнейших метаболитов (кислорода). Метаболическое поле уступает место статическому полю в обобщенной катастрофе. Как в любой катастрофе этого типа эволюция сначала является очень неопределенной, состоящей из множества мелких явлений, которые поначалу обратимы. Затем катастрофа топологически упрощается. Она входит в фазу управляемой обратимости при помощи этих новых креодов, которые образуют трупное разложение. Если в физиологическом плане наша повседневная жизнь соткана из обычных катастроф, то смерть это обобщенная катастрофа.

3. Эпигенез нервной системы. Теоретическая схема. Рассмотрим на пространстве фигуры регуляции V регулирующей рефлекс, схематизированный следующим образом. Предположим, что V имеет размерность один, а именно координату v . Регулирующий рефлекс определим между точками $v = -1$, $v = +1$, по складке Риманна-Погонио, проведенной на плоскости v, x уравнения $v = x^3/3 - c^3 x$, где $1 = c^3/3 - c^2$, $c = (-3/2) - 1$. Предположим, как обычно, что ветвь, определенная при помощи $x < -c$ задает на оси Ov положительное среднее поле взаимодействия $И1$, а ветвь $x > c$ — поле противоположного знака (рис. 10-17).

Допустив все это, предположим, что корректирующий рефлекс является результатом активизации единственного органа J . Допустим также, что координата v является эпигенетическим градиентом, входящим в универсальную развертку зародышевой динамики. Тогда величина v будет значением пространственной координаты. Естественно предположить, что орган J локализован в середине O сегмента $-1, +1$. В ходе эпигенеза орган J остается зафиксированным в O в результате локализации соответствующей функции. Эпигенез органа J , согласно допущению, состоит в том, что складка сужается, образуя в $O1$ острие, при этом $c^2 = u$ мы будем рассматривать как временную координату. Сглаживание этой складки порождает, как мы видели в 10.4 Б, локальный потенциал W , линии градиента которого сходятся к O (в направлении возрастания отрицательных u). (Рис. 10-18). Можно считать, что метаболическая развертка зародышевой динамики из-за присущего ей замедления любого изменения фазы при любом морфогенезе немного предшествует ее пространственно-временной развертке. Первичные нейроны обладают метаболическим режимом, характеризуемым особой склонностью к быстрым изменениям, к физиологическим катастрофам. Их локальные режимы будут заполнять преимущественно множество катастроф фигуры регуляции. В нашей идеализированной модели точки $v = 1$ заполняются нейронами задолго до того, как орган J начинает работать. Направление регулирования метаболизма это отрицательные Δx при $v = -1$ и положительные Δx при $v = +1$ — знаки прыжков, которые следует совершить на сборке. В момент образования органа для малых по модулю отрицательных u эти нейроны кроме того подвергаются воздействию

вектора $\text{grad } W$. В результате их регулирующий вектор метаболизма меняется под действием горизонтальной составляющей $\text{grad } W$. Но поскольку локальный метаболизм нейрона, тем не менее, допускает только один способ функционирования, только одно направление регуляции путем разрядки нервных импульсов, клетка компенсирует эту разницу обрушением в направлении $\text{grad } W$ в системе эпигенетических градиентов. Таким образом, обеспечивается иннервация органа J . Аксоны, исходящие из нейронов режима $\nu = -1$, оказывают возбуждающее действие, а аксоны, исходящие из $\nu = +1$ — тормозящее.

Эта специфическая чувствительность распространения нейронов по эпигенетическим градиентам, возможно, имеет взаимный характер. Когда нерв взрывается в конечных разветвлениях, он может создать в этой зоне эпигенетические градиенты. Мы видели, что нервы в некотором смысле всасываются тканью, образуя эпигенетические поляризации, которые затем используются при строительстве центральных нервов. В случае ампутации можно считать, что процесс, по крайней мере частично, обратим. Химические маркеры локальной поляризации поля могут вернуться к разветвленным окончаниям ампутированного аксона и обеспечить в бластеме регенерацию необходимых элементов. С этой точки зрения роль нервов при регенерации является не *трофической*, как иногда полагают, но скорее *поляризующей* и геометрической, аналогичной роли корневого чехлика. Таким образом объясняется, почему у саламандры анейрогенные отростки регенерируют после ампутации без иннервации, тогда как постоянно иннервированные конечности не регенерируют, если есть препятствие для иннервации бластем. Это значит, что иннервация лишает конечности эпигенетической поляризации, чтобы использовать ее для создания связей нервной системы. [4].

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Образование некоторых органов может производить впечатление центростремительного процесса, как, например, в случае яичника у млекопитающих, в котором заканчивается идущий снаружи канал Мюллера. В таком случае мы имеем дело с креодом, не содержащим свой организующий центр. Волна роста проходит на расстоянии от организующего центра, и она встречает только несколько вторичных организующих центров, внешне различных, но на самом деле алгебраически связанных в большую геометрическую структуру, волна роста которой замечает только одно подмножество. Это явление требует высокой устойчивости порогов, гомеостатические механизмы которых уже достаточно эффективны. Его можно наблюдать только в позднем эпигенезе.

[2] Гаметогенез дает крайний пример стабилизации порогов, поскольку он представляет собой структурно устойчивое восстановление первичного организующего центра. В главе 6 мы видели формальный пример среднего поля взаимодействия, которое восстанавливается в виде *воронки* организующего центра.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландшафт эпигенетического полиэдра. С.Н. Waddington, *Introduction to modern genetics*, Allen and Unwin, Londres, 1939, стр. 181-183.

[2] С.Н. Waddington, *The strategy of genes*, Allen and Unwin, Londres, 1957, рис.5

[3] Richards F.J., *Phyllotaxis, its quantitative expression and relation to growth in the apex*, Transactions, Londres, 1951, стр. 235-509

[4] Опыт Интема. См. по этой проблеме Е. Wolff, *Le role du systeme nerveux dans la regeneration des Amphibiens*, Annee Biologique, tome IV, fasc.1-2, 1965.

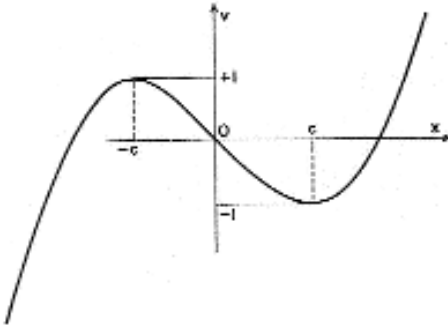
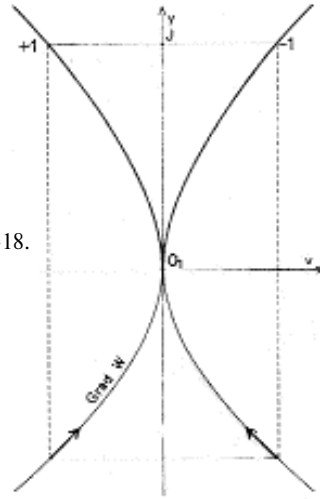


Рис. 10-17.

Рис. 10-18.



ГЛАВА 11

МОДЕЛИ УЛЬТРАСТРУКТУРЫ

В этой главе мы предложим несколько простых динамических моделей, описывающих глобальную эволюцию клетки. Затем мы обсудим, в какой степени эти модели могут объяснять известные явления.

11.1. ДЕЛЕНИЕ КЛЕТКИ

А. Оптимальный размер

Во внешней среде e , которой управляет непрерывный поток энергии, направленный в сторону термической деградации, зададим шар b радиуса r , которым управляет локальный динамический режим g , поглощающий энергию. Допустим, что поглощение энергии пропорционально объему, а приток энергии через обмен с окружающей средой пропорционален только поверхности. Если радиус r поначалу мал, то получение энергии превосходит ее поглощение. Допустим, что этот избыток энергии идет на синтез веществ образующих базу режима g таким образом, что объем V (а следовательно, и радиус r) возрастает. Если этот рост строго пропорционален росту энергии, то радиус r будет возрастать и асимптотически приближаться к равновесному значению n , при котором приток энергии равен поглощенной энергии. Предположим, что этот механизм синтеза имеет некоторую инерцию, определенное *запаздывание*. Тогда мы можем получить рост объема, превышающий оптимальный объем за счет поглощения внутренней энергии. Таким образом шар режима g с радиусом $r > n$ входит в состояние неустойчивости, из которого он может выйти только разбившись на части. После деления на два шара радиуса n меньшего n , может возобновиться рост, за которым последует дальнейшее размножение.

Б. Поток энергии

Какова может быть природа механизма синтеза, который дает такое запаздывание? Одна из наиболее приемлемых гипотез заключается в том, что запаздывание является следствием инерции метаболической конфигурации, следствием устойчивости циркуляционной структуры в клетке. В первую очередь допустим, что речь идет о циркуляции энергии. В клетке может иметься зона восприятия энергии (играющая роль вегетативной полусферы яйца) и зона потребления (гомологичная анимальной полусфере). Если существуют молекулы, специализирующиеся на переносе энергии (как пара АДФ-АТФ), то эти молекулы имеют тенденцию к образованию относительно устойчивой циркуляции между этими зонами. Если попытаться представить топологические конфигурации векторного поля в шаре V^3 , то наиболее простыми будут следующие: если V^3 это единичный шар в $Oxuz$, то циркуляцию можно получить с помощью кругов вида

$$x^2 + y^2 = k, \quad z = k'$$

Множество неподвижных точек этой циркуляции это ось Oz , выделенная траектория, соединяющая два полюса клетки ($z=1$) (рис. 11-1). В этих точках поле не является касательным к краю сферы. Можно также допустить, что окружность C , то есть множество неподвижных точек, имеет общую точку с краем (рис. 11-2). Таким образом, поле касательно к краю в каждой точке граничной сферы кроме точке присоединения круга C . Мы принимаем, таким образом, следующую идеализацию: существует поверхность W и граничный диск C , такой что когда траектория поля проходит скваозь W , соответствующая молекула теряет энергию. W можно рассматривать как ударную волну, отделяющую зону богатую энергией от обедненной и истощенной зоны. В круге C мы усматриваем предка нынешней хромосомы.

В. Удвоение хромосомы

В любом случае следует допустить, что поверхность W и ее край C связаны тем или иным способом с макромолекулярными структурами, которые обладают некоторой инерцией, обеспеченной их внутренней энергией. Вследствие роста клетки, а следовательно, и уменьшения отношения поверхности к объему, приток энергии становится недостаточным для поддержания постоянного потока через всю поверхность. В результате образуется *мертвая зона*, которая начинается в окрестности края C поверхности W . Из этого следует, что ударная волна представляет собой особенность типа *отслаивания*. Новый режим возникнет в окрестности

точки края, и поверхность W удваивается, получая тройное ребро. Новый фрагмент поверхности будет иметь в качестве края дугу C_1 которая дублирует соответствующую дугу C (рис. 11-3). W_1 будет отделять мртвый режим от режима нормальной циркуляции.

Поверхности W и W_1 ориентированы в противоположных направлениях таким образом, что последовательное прохождение через W и W_1 в действительности имеет нулевой энергетический эффект для любой траектории. Поскольку рост будет спадать, этот процесс удвоения будет тормозить синтез базовых веществ режима g . Когда W полностью удвоится, рост (и синтез) полностью прекратятся. Но возникшее таким образом состояние будет неустойчивым. При резком пространственном разделении поверхностей W и W_1 по двум параллельным, но достаточно далеким друг от друга плоскостям можно получить реорганизацию циркуляции в двух конвекционных ячейках с осями C и C_1 соответственно (рис. 11-5). В дальнейшем разделительная линия между этими двумя ячейками образует межклеточную перегородку, или же клеточная оболочка, надуваемая каким-то образом внутренним потоком, создаст в конце концов условия, которые приведут к пространственному разделению двух клеток, в результате чего материнская клетка даст две дочерние.

Эта модель вызывает очевидные возражения из-за ее слишком схематичного характера. Уже на ранних стадиях эволюции на циркуляцию энергии накладывается циркуляция информации, которая отфильтровывает энергию, влияя на ее циркуляцию посредством связи. Действительно, энергия вырабатывается специализированными органоидами, а именно митохондриями, тонкая структура которых, впрочем, в чем-то напоминает элементарную клетку, рассмотренную выше. Она содержит хромосому, содержащую ДНК (возможно, циклическую?), присоединенную в одной точке к стенке; эта стенка является двойной мембраной, внутренний лист которой имеет отслоения (*cristae*). Впрочем, в заданный момент и при соответствующих внешних условиях в клетке возможны различные метаболические режимы. Каждый из этих режимов включает в действие специализированные единицы информации типа элементарной клетки, рассмотренной выше. Такое включение геометрически проявляется в развертке соответствующей хромосомы, что обеспечивает наибольший поток информации через эту цепь.

Возникает предварительный вопрос: в какой мере замкнутый характер любой нуклеиновой молекулы в состоянии активности является установившимся? Мы здесь это свойство постулируем. Труднее допустить существование диска W , краем которого была бы хромосома. Но нет необходимости допускать, что эта поверхность W реализуется устойчивой макромолекулярной структурой. Прежде всего заметим, что существование такой структуры было бы весьма полезно для объяснения до сих пор не вполне понятого явления конденсации хромосом в профазе митоза: диск W складывается как веер, и его край превращается в спираль. Наконец, если бы хромосома бактерии была краем диска, у которого отслоение вызывает удвоение хромосом, нам было бы легче объяснить, почему две дочерние хромосомы никогда не переплетаются между собой. В конце концов, можно видеть, что поверхность W существует только локально и чисто кинетически (вокруг C). В случае, когда хромосома находится в состоянии гетерокаталитической активности, кажется весьма правдоподобным, что нити транспортной РНК, которые от нее отделяются, имеют в окрестности C относительно фиксированные траектории (возможна также волна молекул-предвестников). Эти нити замечают фиксированную поверхность W . На этой поверхности локализуются рибосомы, которые, будучи собранными на нити соответствующей РНК, синтезируют нужный белок, который покидает поверхность W на одной из ее сторон. Так зарождается связанный с C поток информации.

Какова бы ни была природа активности, центром которой является хромосома C , трудно

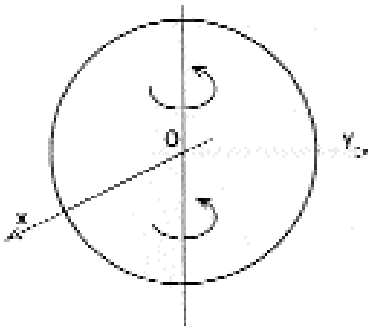


Рис. 11-1.

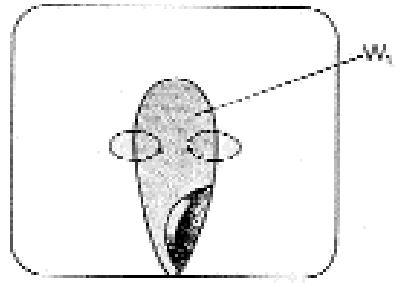


Рис. 11-2.

отрицать, что биологическая роль ДНК объясняется исключительно циркуляцией вокруг C . Мы воспроизводим эту ситуацию геометрически, постулируя, что в области Γ , содержащей хромосому C , комплексная дифференцируемая функция $V:U \Rightarrow \mathbf{R}^2$ имеет множество нулей. Чтобы получить замкнутую кривую мы постулируем, что в общем случае функция V в каждой точке $V^{-1}(0)$ имеет максимальный ранг. Важное преимущество этой точки зрения состоит в том, что она позволяет построить модель элементарного кроссинговера между двумя молекулами ДНК.

Г. Модель кроссинговера (на молекулярном уровне)

Допустим, что хромосома является множеством нулей комплексной дифференцируемой функции, которая регулярна на прообразе $V^{-1}(0)$. Что с ней происходит в точке $V^{-1}(0)$ второго ранга, в которой функция V перестает быть регулярной? Заметим для начала, что такая ситуация может иметь структурно устойчивый характер только относительно деформаций, в которых время является дополнительным параметром. Если обозначить через u, v координаты комплексной плоскости значений функции V , а через x, y, z — локальные координаты пространства с началом в O , функция $V(m, t)$ примет вид:

$$u = x^2 y^2 + t$$

$$v = z$$

В случае, когда квадратичная форма, заданная на Ox при помощи разложения Тейлора второго порядка определена положительно (или определена отрицательно), при переходе от отрицательных значений к положительным мы получаем исчезновение или рождение малой круговой хромосомы в начале координат. При обычном взгляде на биологию такое явление рассматривается как невозможное, поскольку хромосома реализуется линейной молекулой ДНК, заданной раз и навсегда или являющейся копией предшествующей модели. Но вполне

возможно, что в определенных условиях, например, в случае вирусной инфекции некоторые хромосомы перестают функционировать из-за приостановки соответствующей циркуляции. Соответствующая молекула приобретает *фантомный* вид и из-за этого полностью теряет устойчивость. Таким образом, приведенная выше модель, возможно, имеет определенное значение для описания утраты жизнеспособности хромосомы.

В случае, когда квадратичная форма на x, y имеет вид седла, мы видим, что когда t изменяется от $-a$ к $+a$,

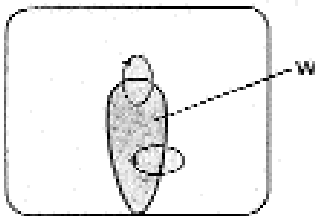


Рис. 11-3.

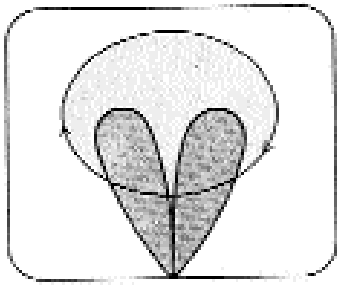


Рис. 11-4.

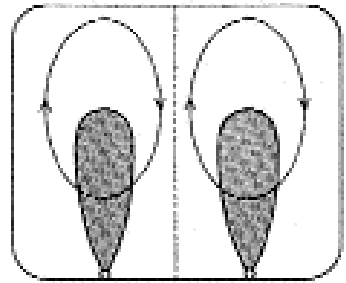


Рис. 11-5.

гипербола $x^2 - y^2 = a$ превращается в гиперболу $x^2 - y^2 = -a$. Изменение двух ветвей этой гиперболы на хромосоме, реализуемой левой кривой, можно рассматривать как *кроссинг-овер*, который меняет местами две нити хромосомы (рис. 11-6 и 11-7). Единственная общепринятая модель этого явления это *модель Кэмбелла* присоединения фага лямбда к хромосоме кишечной палочки. Динамическая простота приведенной выше схемы позволяет утверждать, что живая материя является структурированной в *энергоиды* U_i , то есть множества циркуляции, управляемые хромосомой C_i . Можно наблюдать захват энергоида U_i энергоидом U_j . Хромосома C_j из U_j будет захвачена путем кроссинговера хромосомой C_i из U_i (рис. 11-8).

При традиционном подходе, принятом в биохимии, такая связь может осуществляться только вдоль определенных сегментов хромосом C_1 и C_2 , называемых *гомологичными*. Обычно говорят, что гомологичные сегменты имеют схожее строение нуклеотидов. Приведенная выше динамическая схема не является несовместимой с этой точкой зрения, поскольку особенность сложного потенциала V , конечно, может быть представлена, только если локальные ферментативные эффекты C_1, C_2 во многом схожи. Но даже в случае с фагом лямбда допускается, что фаг может отъединяться от хромосомы бактерии в точке отличной от начальной, что посредством *трансдукции* дает ген *Гал* или другие соседние гены. Абсолютной специфичности в положениях точек присоединения нет.

11.2. МИТОЗ

А. Митоз во внутренних координатах

Можно получить достаточно удовлетворительную динамическую модель феноменологии митоза, допустив, что локальный биохимический режим клетки задан отображением V этой клетки на комплексную плоскость $z = u + iv$. В интерфазе на плоскости z имеется векторное поле X , заданное следующим образом. X имеет два аттрактора: начало координат O (соответствующее *ядерному режиму*) и круг $z = 2R$ (цитоплазмический режим). Бассейны аттракции этих двух аттракторов разделены окружностью $z = R$, которая является неустойчивой замкнутой траекторией. Прообраз $|z| > R$ по V определяет цитоплазму, $z = R$ — ядерную мембрану, а $|z| < R$ — ядро (рис. 11-9). В начале профазы ядерный аттрактор O подвергается *бифуркации Хопфа*. Он превращается в маленький инвариантный круг с радиуса r , при том что начало координат O становится точкой отталкивания (11-10). Из этого следует, что в ядре должна появиться кривая (состоящая из большого числа маленьких круговых нитей) — прообраз O по V . Это ядерный материал, который появляется в ядерном соке при *нитевидной катастрофе*. Это место точек с нулевым метаболизмом. Затем радиус окружности растет. Катастрофа топологически уп-

рошается, малые ядрообразные круги захватываются при кроссинговере, амортизируя таким образом конденсацию хромосом. Когда c смешивается с нестабильной траекторией $z=R$, происходит разрыв ядерной мембраны. В дальнейшем остается только один аттрактор, а именно цитоплазматический аттрактор $z=2R$. В этот момент разгара метафазы (рис. 11-11) метаболизм квазиулевого, что означает, что поле X имеет соответствующую нулевую тангенциальную составляющую на $z=2R$. Поле X таким образом имеет конфигурацию поля $\text{grad}|z|$. Клетка находится в состоянии *обратимой смерти*. Образование митотического аппарата между двумя полюсами, которые являются аттракторами поля, порождаемого V на X , выражает временное вырождение внутреннего метаболического поля в статическое поле градиентного типа. После анафазы, которую можно описать только на полной модели, предполагающей пространственные координаты (а не только поверхность внутреннего метаболизма z), идет телофаза. Во внутреннем пространстве u, v начало координат, которое является точкой отгалкивания, представляющей ядерный материал, снова входит в бифуркацию. Оно создает новый круг радиуса r , разделяющий цитоплазматический режим, который ограничивает $|z|=2R$ от начала координат, и новый точечный аттрактор, который создает новый ядерный режим (рис. 11-12). Прообраз $V^1(m)$ является новой ядерной мембраной. Затем цикл начинается снова. Заметим, что эта схема требует, чтобы новая ядерная мембрана дочерних клеток образовывалась в некотором смысле в результате разделения дочерних хромосом. Этот факт кажется противоречащим наблюдениям многочисленных цитологов, согласно которым новая мембрана образуется из фрагментов прежней. Видимо, здесь также идет речь о фантомных структурах в метафазе, которые возобновляют функционирование, как только представляется возможность. Плевромитоз при котором ядерная мембрана делится в результате сжатия, но не исчезает, задействует несколько иную схему.

Б. Митоз в пространственных координатах

До сих пор мы были заняты пространством-слоем внутренних переменных. Полная модель требует введения пространственных координат. Учитывая весьма незавершенный характер схемы, ограничимся моделью размерности один (координата x). По внутренней координате z берется ось Oz содержащая две особые точки: точку c , *цитоплазматический аттрактор*, который реализуется центриолою, и самую высоко расположенную точку n , представляющую ядерный материал. В нормальной ситуации (интерфаза) состояние клетки будет представлено, например, биссектрисой $z=x$. Существует, однако, небольшое плато с ординатой n , которое соответствует ядру (рис. 11-13). Первый симптом, сигнализирующий о профазе, это удвоение центриоли, отросток которой занимает противоположный полюс клетки. Это цитоплазматическое удвоение можно схематически изобразить с помощью гоафика типа представленного на рисунке 11-14, где c имеет два прообраза в симметричных точках клетки. Затем ядерное плато закругляется и таким образом возникает два соседних прообраза, соответствующих двум системам хроматид, появляющихся в профазе. Образованная таким образом дуга утончается в *острие* с ординатой n (идентификация хроматид) (рис. 11-15), которое затем превращается в завиток, снова ведущий к двум раздельным хроматидам m_1, m_2 , но эти точки находятся на метаустойчивых ветвях кривой состояний, таким образом, что на графике имеется разрыв. Этот разрыв проявляется как образование митотического аппарата, представленного пунктирным шнуром, соединяющим c с m_1 и c_2 с m_2 (рис. 11-16). В анафазе график совершает резкий скачок с метаустойчивой ветви на устойчивую, расположенную выше в n_1 и, соответственно, m_2' . Пунктирный шнур движется вслед за точкой m_1 к вершине, завиваясь вокруг c . Поэтому прообраз n , связанный с m_1 , переносится в окрестность c , что представляет собой анафастический подъем хромосом. Затем график превращается в систему двух обычных склеенных графиков.



Рис. 11-6 и 11-7. Схема кроссинг-овера.

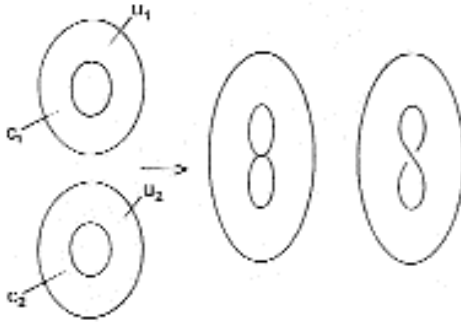


Рис. 11-8. Объединение двух хромосом посредством фузии двух энергоидов.

Понятно, что все это не что иное, как несколько идеализированное описание митоза, которое не может претендовать на роль объяснения. Однако представленная здесь аналогия между митозом и обрушением волны несомненно заслуживает того, чтобы быть отмеченной.

11.3. МЕЙОЗ

Модель, предлагаемая нами для *кроссинговера мейоза* не использует явно структуры хромосомы (у многоклеточных, которые здесь рассматриваются). Мы обращаемся только к следующему постулату, который, возможно, трудно принять в строго молекулярном смысле. В момент стадии *пахитены* локальная генетическая детерминация хроматид тетрады возникает в результате конкуренции между генетическими режимами, заданными родительскими хромосомами, объединенными в синаптонемальный комплекс.

Эта конкуренция может быть описана следующей генетической моделью. Локально в *Оху* синаптический комплекс представляется цилиндром с уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Допустим, что полуцилиндр $x < 0$ представляет одну из хромосом (например, базу локального гена *a*), а другая хромосома, локализованная в $x > 0$ имеет локальный ген *a+*, аллельный к *a*. На стадии *пахитены* всякий синаптический комплекс расщепляется пополам ударной волной, которая делит каждую из хромосом на две хроматиды. Мы допускаем, что в каждой плоскости $z = \text{const}$ ударная волна расщепления представляется в *Оху* кривой, проходящей через начало координат.

Предположим для начала, что эта кривая прямолинейна (рис. 11-17). Она образует с *Оу* угол, который является функцией z ; естественно предположить, что эта функция непрерывна. Поскольку угол (z) не равен нулю (по модулю), ударная волна *H* трансверсальна плоскости $x=0$, разделяющей две хромосомы. Две хроматиды, на которые расщепляется хромосома,

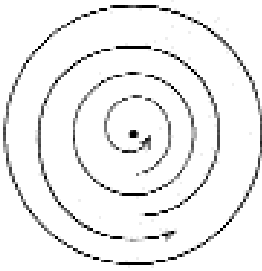


Рис. 11-9.

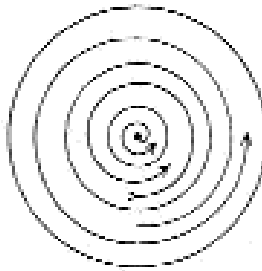


Рис. 11-10.

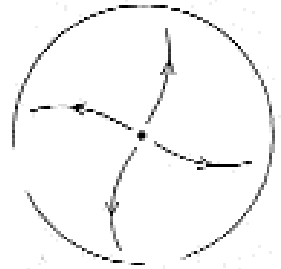


Рис. 11-11.

неизбежно наследуют ее генетические свойства. Предположим, что в точке z_0 , такой что плоскость $z = z_0$ отделяет два гена $z > z_0$ a, a^+ от двух генов $z < z_0$ b, b^+ , угол $\alpha(z_0)$ будет нулевой, а при переходе от отрицательных значений к положительным z будет возрастать, превосходя значение z_0 . Тогда по соображениям непрерывности хроматида, связанная с острым углом, расположенным в $z < z_0, x < 0$ продолжится в хроматиде, расположенной в $z > z_0, x > 0$ и связанной с острым положительным углом. Эта хроматида даст рекомбинацию a, b^+ . Аналогичным образом, хроматида, симметричная по отношению к оси Oz породит симметричную рекомбинацию. Геометрически глобальная конфигурация четырех хроматид ab, ab^+, a^+b^+, a^+b будет представлять собой сплетение четырех отростков, обеспечивающее поворот на $/2$. Таким образом получается классическая конфигурация хиазмы, наблюдаемого на стадии диплотены (рис. 11-18).

В ситуации, схожей с описанной, всегда получается только чистые и одиночные случаи *кроссинговера* с симметричными рекомбинациями. Но естественно думать, что ударная волна H не рассекает каждую плоскость $z = \text{const}$ по прямой. Самая приемлемая гипотеза состоит в том, что H рассекает каждую плоскость $z = \text{const}$ по вогнутой кривой $c(z)$, проходящей через начало координат и изгибающейся приблизительно следуя вращению, заданному углом $a(z)$. В критическом случае ($z = z_0$), когда вогнутая кривая $c(z_0)$ касательна к $Oy(a(n)) = 0$, мы видим (рис. 11-19), что одна из хромосом (например, $x < 0$) распадается на три хроматиды, тогда как другая ($x > 0$) останется неизменной. Будет иметь место *генная конверсия*. Три хроматиды тетрады будут иметь локус a хромосомы $x < 0$. Эта ситуация может продолжаться, пока вращение $\alpha(z)$ достаточно мало. Но очень быстро, например, уже при $z > z_0$ одна из ветвей кривой H перережет Oy . Возникнет сомнение, конкуренция по поводу природы соответствующей хроматиды (рис. 11-19). Наша модель мейотического *кроссинговера* следующим образом описывает ситуацию, связанную с хиазмой: каждая узкая зона генной конверсии, ограниченная двумя зонами многочисленных разломов (суммарный порядок нечетный), дает пару различных хроматид. Методы генетики являются достаточно точными, чтобы экспериментально обнаружить столь тонкую структуру, если она существует.

Один из важных вопросов, который ставит ядерный материал, состоит в следующем: влет ли мутация химическую или геометрическую модификацию структуры ДНК? Я полагаю, что имеется тенденция видеть в небольших мутациях химические изменения, а в больших (таких как пропуски, инверсии, транслокации) геометрические модификации структуры. Но провести границу между этими двумя типами изменений непросто. Вполне вероятно, что в последнее время линейную устойчивость ДНК переоценивали, и я лично склонен считать весьма сомнительной общую стойкость хромосом в интерфазе. Против этого свидетельствуют автодиаграммы бактериальной хромосомы (Жернс). Но глобальная устойчивость гигантской молекулы (1мм и более) в весьма ограниченной и текучей среде, каковой является клетка, ка-

жется мне скорее невозможной. Не следует ли думать, что хромосома *in vivo* расщепляется на более мелкие круговые единицы, каждая из которых управляет собственным энергоидом, и что в момент легкой смерти бактерии, эти энергоиды захватывают друг друга, а их хромосомы соединяются в кроссинговере? Хромосомы Кернса являются всего лишь артефактом, но этот артефакт вскрывает эффективно действующую динамическую структуру на плоскости глобальной динамики бактерии, которая реализуется исключительно морфологически (например, в митозе, или во время половой конъюгации).

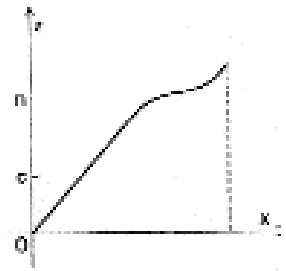


Рис. 11-13

11.4. МОРФОГЕНЕТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ ЦИТОПЛАЗМЫ

Имеется достаточно много примеров животных (и растительных) клеток всех размеров, обладающих очень точной и специализированной морфологией. Наиболее примитивные животные компенсируют свою гистологическую простоту очень развитой межклеточной специализацией. В какой степени создание таких структур отвечает действию морфогенетических полей типа тех, которые были рассмотрены в связи с эпигенезом крупных животных? Мне кажется, можно рискнуть дать следующий ответ: как и в эпигенезе тканей, в цитоплазме имеется метаболическое поле, чувствительное к катастрофам различных типов. Но в этом случае особенности метаболизма будет соответствовать макромолекулярная структура которая узко и специфически приспособлена к этой особенности, хотя природа этого приспособления остается неясной. Известно, например, что ресничка всегда связана с макромолекулярной структурой, образуемой из новых трубок. В настоящее время никто не знает причины возникновения этой структуры и ее функции. Напротив, локализация этих органоидов, как кажется, под-

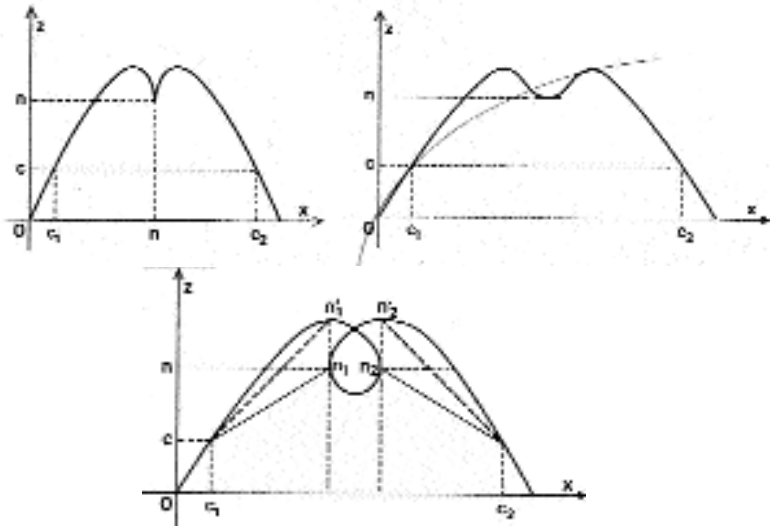


Рис. 11-14, 11-15, 11-16. Общая схема митоза в пространственных координатах.

чиняется относительно точным и явным законам. Они обнаруживаются в геометрических или функциональных особенностях мембраны (например, при закрытии пищеварительной вакуоли у реснитчатых). Возможно, появление этих структур связано с исчезновением в локальном метаболическом поле внутреннего фактора, например, роста эллиптической омбилики, специфической для определенного движения или перемещения. Так колебание некоторых одноклеточных (*Naegleria*) между амيبиеобразной формой без полярности, в которой вся область мембраны может образовывать псевдоподии или сжимающиеся вакуоли, и поляризованной формой с отростками, в которой вакуоли фиксированы, окружена четырьмя активными отростками, в которых псевдоподиальная активность полностью отсутствует. Простое изменение концентрации некоторых ионов во внешней среде может привести к изменениям в ту или иную сторону. В подобном случае, как и во многих других, поляризация клетки отсутствует. Возможно, поляризованный режим до своего исчезновения оставляет в цитоплазме макромолекулярные структуры, которые инертны в изотропном режиме, но ориентируются и вызывают поляризацию при возвращении метаболических условий, благоприятных для отросточного режима. Это зародышевые структуры, удваивающиеся во время митоза клетки.

Проблема цитоплазмических структур является особенно сложной из-за уникального и дискретного характера этих структур. Все происходит так, как если бы для реализации заданного генетического поля комбинирование белков давало бы только конечное число возможных конструкций, причем всегда одних и тех же. *Перед нами стоит самая настоящая проблема кодирования.* Необходимо проинтерпретировать отношения между наблюдаемой макромолекулярной конструкцией и особенностью породившего ее метаболизма. Более того, практически ничего не известно об эпигенезе этих молекулярных конструкций. В результате отсутствия интереса со стороны биологов или, что более правдоподобно, из-за сложности наблюдения, не существует законченной *цитоплазменной эмбриологии*. Однако когда мы наблюдаем весьма утонченную структуру *нематоцисты* или *книдобласта*, трудно поверить, что подобный орган мог возникнуть сразу, как Афина из головы Зевса. [1]. Та же проблема встает *a fortiori* в морфогенезе бактериофага, еще более мелкого и еще более загадочного. Несомненно, в этом последнем случае генетический анализ вносит какие-то уточнения, демонстрируя существование морфогенетических генов и мутаций, которые запрещают присоединение одних частей капсулы к другим. Но проблема, касающаяся назначения этих структур, остается нетронутой. С этой

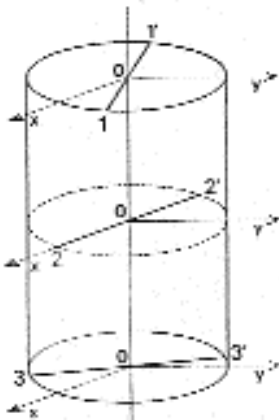


Рис. 11-17.

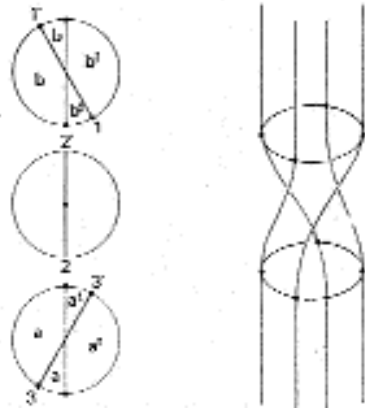


Рис. 11-18

точки зрения, я могу только повторить сказанное главе 8: те, кто считает, что тайну морфогенеза легче раскрыть на малых структурах, чем на больших, практически наверняка ошибаются. Генетические и эпигенетические ограничения сильнее действуют в дискретном, квантифицируемом пространстве, чем в мире, где возможны непрерывные адаптации, и где поэтому гораздо труднее восстановить морфогенетическое поле, порождающее формы.

Помимо таких сильно специализированных форм, как нематоцисты или капсула фага, в цитоплазме обычных клеток имеются более простые структуры (митохондрии, эргастоплазма, аппарат Гольджи, различные мембраны и пузырьки, и т.п.). Морфология этих органоидов весьма единообразна. Речь идет о повторяющихся вариациях на тему двойной мембраны или мешка. Для этих структур морфогенетическая теория представляется более простой. Эти структуры гораздо гибче и быстрее отвечают на локальные биохимические вариации цитоплазмы. Двойная мембрана может рассматриваться как ударная волна между двумя фазами, двумя режимами. Мешок возникает также как форма, предвещающая появления новой фазы (или как состояние фазы в процессе исчезновения). Пластиночные формы эргастоплазмы (эндоплазматического ретикулума) объясняются локальной катастрофой ламинарного типа. Теперь мы отвлечемся от этих рассмотрений и вернемся к центральной проблеме отношения между метаболизмом и макромолекулярными конструкциями.

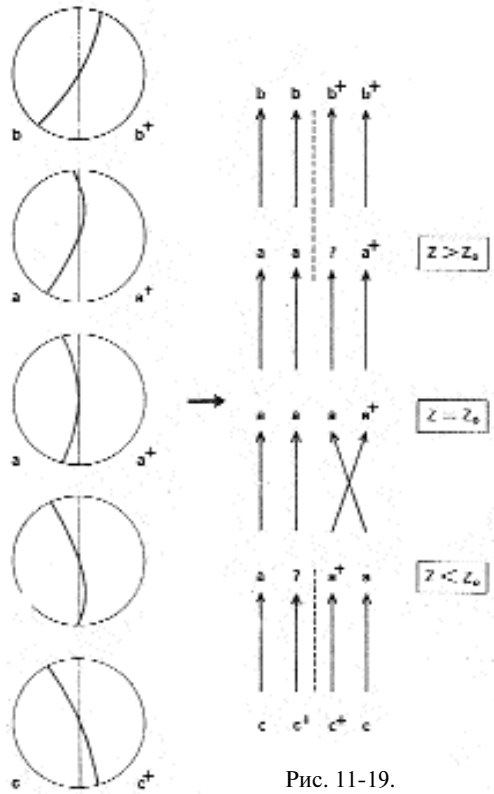
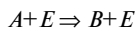


Рис. 11-19.

11.5. ТЕОРИЯ ЦИТОПЛАЗМЕННЫХ СТРУКТУР

А. Понятие фермента

Фермент E это вещество, способное быстро преобразовывать систему веществ A в систему B , при том что сам фермент остается, как правило, неизменным (или восстанавливается):



Как обычно, представим локальные биохимические состояния точками внутреннего пространства M . Состояние A представлено аттрактором, локализованным в точке a , состояние B — другим аттрактором, локализованным в b . Фермент E в M переносит ab на всю окрестность a . Для большей точности можно допустить, что реакция $A + E \Rightarrow B + E$ происходит только если молекулы A и E находятся в некотором характерном пространственном отношении,

которое благодаря своим стереохимическим свойствам позволяет ферменту осуществлять свои каталитические функции. Применим это к структуре ударной волны.

Б. Структура ударной волны: переходные режимы

Предположим, что внутри клетки имеется два устойчивых режима A и B , которые конфликтуют вдоль поверхности ударной волны. Если точки a, b из M представляют аттракторы, определяющие эти режимы, то можно задать плоскую ферментативную систему H , так что на стороне H осуществляется преобразование $A \rightarrow B$. Также существует система H' , которая на другой стороне осуществляет обратное преобразование $B \rightarrow A$. Если ферментативные конфигурации H и H' устанавливаются, то можно наблюдать, как ударная волна S стабилизируется в виде двойной мембраны, образованной конфигурациями склеенных H и H' . Между этими двумя листами возникает переходный режим, характеризуемый приходами и расходами, то есть флуктуациями между режимами A и B . Формально ситуация аналогична образованию вихревой подушки в теории струй в гидродинамике. Вихри образуют переходный режим между зоной мертвой зыби за препятствием и зоной внешнего ламинарного обтекания (см. рис. 11-20).

Однако в гидродинамике эти переходные режимы очень неустойчивы и очень зависят от вариаций начальных условий, тогда как в биологии напротив, эти переходные режимы связаны с супрамолекулярными конфигурациями, которые, будучи однажды установленными, выживают в породивших их метаболитических условиях. Иначе говоря, динамика переходных режимов сама столь же квантифицирована, богата различными аттракторами, как и окружающие динамики. Как только режим устанавливается, он стремится сохраниться в этом состоянии, даже если окружающие динамики развиваются. В этих условиях можно видеть, как переходный режим, связанный с ударной волной, действует в свою очередь на окружающие динамики. Можно наблюдать, как динамический режим A зависит от структур, ограничивающих область режима A .

Впрочем, не исключено, что переходы ab и ba , необходимые для стабилизации ударной волны между режимами A и B , не смогут реализоваться плоскими ферментативными системами. Могут понадобиться другие органоиды — точечные или круговые. Возможной иллюстрацией этого являются рибосомы, располагающиеся на эндоплазматическом ретикулуме, поры ядерной мембраны. На мембране эргастоплазмы эти органоиды часто располагаются в соответствии с геометрическими схемами периодического характера. Это значит, что переходный режим может представлять собой разложение на конвекционные ячейки, как жидкость под действием двух противоположных градиентов (феномен Бенара). Не исключено, что в этом следует видеть возможный источник биохимической поляризации, необходимой для любого органогенеза.

В. Правило трех состояний

Любая макромолекулярная структура может находиться в трех различных состояниях:

1. На стадии формирования структура порождается конфликтом окружающих динамик (или, говоря более общо, особенностями окружающего метаболизма).
2. На стадии функциональной активности в структуре устанавливается макромолекулярный порядок, обеспечивающий внутреннюю устойчивость и ферментативные свойства по отношению к окружающим динамикам. Таким образом структура действует на эти динамики.
3. На стадии сна или смерти молекулярная структура сохраняется. Но она оказывается полностью отрезанной от окружающей среды и больше не влияет на локальную динамику, ее ферментативный эффект равен нулю.

В принципе можно опознать стадию, на которой находится форма, пытаясь ее разрушить

с помощью искусственных микроманипуляций.

- i) На стадии 1 частичное разрушение ведет к восстановлению структуры, не вызывая тяжелых возмущений в окружающей среде.
- ii) На стадии 2 частичное разрушение не влечет регенерацию и вызывает глубокие разрегулирования окружающего метаболизма (часто летальные).
- iii) На стадии 3 разрушение структуры не влечет ни регенерацию, ни разрегулирование окружающей среды. Форма уже не более чем призрак, след своей прежней деятельности.

Обычная эволюция структуры идет от стадии 1 к стадии 3, проходя через стадию 2. Но как показывают многочисленные примеры (митохондрии, ядерная мембрана и т.п.), переходы $1 \Rightarrow 2$ и $2 \Rightarrow 3$ часто обратимы.

Эта схема поднимает одну из важнейших проблем биологии. Если верно, что конфликт между двумя режимами может стабилизироваться только путем создания макромолекулярной структуры с ферментативным эффектом, способствующим переходу между двумя режимами, то встает вопрос, каким образом может возникнуть такой комплекс.

Если молекулы-предшественники находятся в окружающей среде в достаточной концентрации, то можно допустить, что стабилизирующая конфигурация образуется при помощи простого динамического эффекта взаимодействия. Присутствие этих ферментов уменьшает нарастание энтропии вдоль ударной волны, и на основании принципа Ле Шателье (обобщенного) можно сделать вывод, что это содействует образованию комплекса. Но чтобы смягчить этот процесс, для комплекса необходима достаточно большая площадка. Здесь мы сталкиваемся со стереохимическими ограничениями. Любой фермент это на самом деле белок, а любая белковая молекула представляет собой сложную трехмерную структуру, которая, если она играет важную роль в действии фермента, делает эту молекулу неспособной к удвоению. Ясно, что жизненная динамика после многочисленных попыток, разрешает эту трудность, поручая роль роста ядерному материалу, который заимствуется для удвоения. Следует иметь в виду, что свободный край ударной волны, в конце концов, захватывается хромосомой (или ее фрагментом). На краю S хромосома выбрасывает нити сообщения ДНК, которые, захватывая рибосомы, связанные с S , синтезируют все необходимые белковые молекулы. Таким образом хромосома предстает здесь как биохимическая каустика, которая излучает информацию точно так же, как оптическая каустика излучает свет. Впрочем, этот пространственный образ должен быть скорректирован, поскольку он является слишком наивным. На самом деле удвоенные ударные волны находятся в топологическом произведении $M \times D$ (рис. 11-21) клетки D на внутреннее пространство M . Менее эксцентричная волна Δ_1 имеет сенсорный эффект. Когда локальный метаболизм демонстрирует в некоторой точке избыточную вариацию и пересекает Δ_1 , эта вариация распространяется путем диффузии вплоть до ядра, где она рассекается, поляризуя ядро в режиме корректирующей реакции, которая передается по белковому комплексу внешней ударной волне Δ_2 , представленной векторным полем X . Корректирующий механизм ограничен пространственно и, видимо, находится только внутри ядра. За пределами ядерной мембраны нет хорошо определенных поляризующих пространственных факторов, кроме, возможно, градиентов очень общей природы (и, возможно, цитоплазмических морфогенетических полей, о которых шла речь выше).

Г. Ядро как хемостат

Применив немного воображения, можно уточнить устройство корректирующего механизма, допустив, что клеточное ядро играет для этого механизма роль хемостата. Пусть m это фундаментальный метаболит, концентрация которого должна оставаться в окрестности оптимального значения c_0 . Предположим, что в результате внешнего воздействия концентрация m

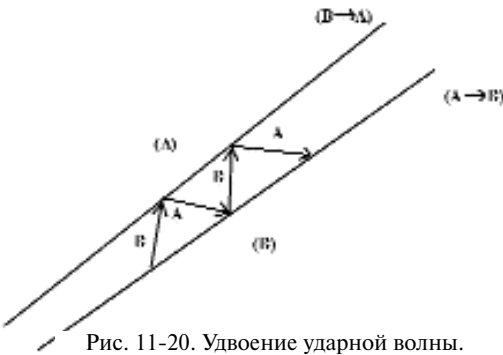


Рис. 11-20. Удвоение ударной волны.

в цитоплазме падает ниже некоторого критического порога $c_0 - k$. Тогда метаболит m будет иметь тенденцию диффундировать из ядра в цитоплазму. Допустим, что на ядерной мембране существует относительно узкая специализированная площадка W , проницаемая для m изнутри в гораздо более высокой степени, чем остальная мембрана. Эта зона W будет базой ураганного потока исходящего метаболита. Таким образом, будет образована цилиндрическая ударная волна T , одновременно кинетическая и биохимическая, снаружи которой имеется обычный ядерный режим n , а внутри возмущенный режим a , характерный избыточной концентрацией метаболита m . Согласно вышеизложенной схеме, единственное положение равновесия на краю цилиндра T соответствует хромосоме C , кодирующей протеиновые комплексы, обеспечивающие биохимический переход $n \Rightarrow a$. Ничто не мешает предположить, что эта хромосома находится на относительно близком расстоянии от площадки W , с которой она функционально связана. В этих условиях сам диффузионный поток метаболита m через W будет перенести молекулы ферментов, необходимых для формирования метаболита m , и этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока разница концентраций m между ядром и цитоплазмой не превзойдет определенный порог. Как только коррекция произошла, и цитоплазменная концентрация стала достаточно близкой к оптимальной концентрации c_0 , диффузия через W прекращается, и ударная волна T рассасывается, часто приводя к сгущению хромосомы C (рис. 11-22, см. [2]).

Очевидно, самой непонятной остается та часть этой схемы, которая связана с приспособлением хромосомы к проницаемости мембраны. Заметим в этой связи, что согласно некоторым цитологическим наблюдениям, поры ядерной мембраны совпадают с точками прикрепления ядерного волокна в интерфазе. На это можно возразить, что гомеостатическая регуляция существует также у бактерий, не имеющих ядра. В последнем случае регуляция, весьма вероятно, осуществляется с помощью гибких обратимых структур типа энергоидов, описанных в начале этой главы. Таким образом, ядерная мембрана в соответствии с общей схемой органогенеза предстает как окончательная реализация, как жесткая локализация креодов, которые поначалу являются гибкими и обратимыми.

11.6. ФОРМАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО УДВОЕНИЯ

В списке обычных катастроф в \mathbf{R}^4 (острие, ласточкин хвост, омбилики-бабочки), ни одна из локальных моделей не связана с удвоением (дубликацией). Зададим следующее условие: особенность s при $t = -1$ после прохождения начала координат ($x = t = 0$) при $t = +1$ замещается парой особенностей s_1, s_2 изоморфных s . Предположим сначала, что особенность s точечная. В этом случае график, заданный точками s , не может иметь вид \mathbf{Y} . На самом деле любая алгебраически заданная особенность порождает циклическое множество по модулю 2, что требует прохождения через точку ветвления четного числа сегментов. Вместе с устойчивой парой s_1, s_2 возникает или разрушается неустойчивый режим s' , существующий чисто виртуально и в общем случае ненаблюдаемый. Простейшая модель задается на пространстве \mathbf{R} с координатой x функцией $f: x \Rightarrow u$, где $u = x^4 + tx^2$. При положительных t , $x = 0$ является простым минимумом u .

При отрицательных t и u имеет два простых минимума s_1 и s_2 симметричных по отношению к $x=0$, который в свою очередь является простым максимумом (неустойчивый режим s') (см. рис. 11-23 и 11-24).

Интересным моментом этой модели является ее структурная неустойчивость. Возмущение u , например, задаваемое уравнением $v=u+ax$ превращает эту особенность в то, что изображено на рис. 11-25. Режим s переходит в режим s_1 непосредственно без ветвления, а другой устойчивый режим s_2 , как представляется, рождается из режима s заново, который, таким образом, оказывается в роли родителя. В терминах креодов эту модель можно описать следующим образом: креод W , задающий поле s , имеет в окрестности начала координат омбилическую зону, от которой отпочковывается креод W' , изоморфный креоду W (рис. 11-26). Говоря точнее, предположим, что эволюция одномерного существа описывается волной роста со значениями на торе с координатами x , t и предположим, что на торе, обозначенном квадратом $0 < x < 1$, $0 < t < 1$ имеется конфликт режимов g_1 , g_2 , ограниченных кривой конфликта с двумя свободными концами, то есть катастрофами Риманна-Пюгониио (рис. 11-27). Если режим g_1 это режим быстрого роста, а g_2 — режим медленного роста, то мы получаем модель почкующейся системы. Часть существа попадающая в режим g_1 образует почку. Однако в этой слишком простой модели не происходит пространственного разделения почки с родителем.

Практически всякое элементарное удвоение в биологии, которое происходит на уровне субклеточных органоидов, это почкование (как, например, в случае центриоли). Симметричное удвоение на две изоморфные модели является исключением [3]. Митоз клетки слишком сложен для того, чтобы рассматривать его как элементарное явление. Что касается расщепления двойной спирали Уотсона и Крика, то в этом случае мне тяжело судить о применимости приведенной модели, однако термодинамические и топологические трудности, как мне кажется, окажутся значительными. Остается деление хромосомы на два изоморфных дочерних экземпляра. В этом случае тонкая структура процесса также неизвестна. Но мне кажется несомненным, что линейная структура генетического материала возникает в результате топологических ограничений. Действительно, удвоение структуры является в биологии эффектом регуляции, гомеостаза. Или умножение данной структуры оказывает благотворное действие на метаболизм (за счет уменьшения энтропии), или же, как мы предположили в начале, удвоение является процессом торможения гетерокаталитического эффекта на пути его угасания. Во обоих случаях это удвоение должно осуществляться относительно быстро, поскольку регулирующий механизм запаздывает и теряет свою эффективность. Итак, удвоение сложной структуры само является сложной операцией даже по отношению к сложности своего объекта. Допустим, что удвоение осуществляется на уровне бесконечно малого. Структура A порождает две изоморфные структуры A_1 , A_2 при бесконечно малом перемещении, которое задается геликоидальным преобразованием g . Объект удвоения может быть бесконечно малым, если структуры A и gA остаются разъединенными при всех перемещениях из некоторой подгруппы с параметром g . Если структура A простая, она может быть многообразием, кривой или поверхностью. Однако при условии, что A и gA не встречаются при достаточно малых g , эти объекты не могут быть трехмерными. По той же причине они не могут быть компактными поверхностями без края. Единственные простые геометрические объекты, которые могут быть быстро удвоены это кривые или, возможно, поверхности с краем, такие как диски или ленты малого размера. Необходимость хранения в этих структурах важной химической информации, легко передаваемой при помощи механизма локального характера, устраняет эту последнюю возможность. Но само собой разумеется, это объяснение *a posteriori*, и роль генетического материала несомненно остается одной из больших загадок Динамики жизни.

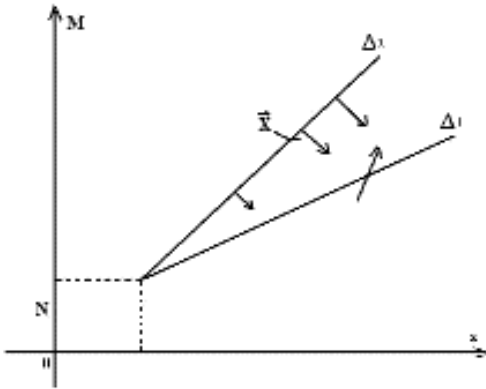


Рис. 11-21.

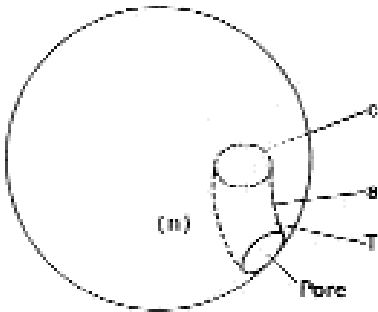


Рис. 11-22. Локальная схема структуры регуляции, связанной с ядерной мембраной.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] На самом деле в книге Ленца *The Cell Biology of Hydra* (North Holland, Amsterdam, 1966) на рис. 83 и 95 имеются интересные изображения образования нематоциты. В частности, отмечается треугольный характер (характерный для эллиптического обрушения) стилета и нити нематоциты (11а и 11b), см. иллюстрации 27а, 27b.

[2] В этой же работе на сечении нейроганглиальной клетки (11-с) показано присутствие многочисленных микротрубок, заканчивающихся у определенных пор ядерной мембраны. Возможно, их следует рассматривать как цитоплазменное расширение внутриядерной поляризации. См. иллюстрацию 28.

[3] Как мы отмечали в 10.4В, в универсальной развертке параболической омбилики имеются совершенно симметричные удвоенные петли. Эти петли, воспроизводящие чередование гаплоид-диплоид в половом размножении, очевидным образом, требуют стабилизации порогов, или, что то же самое — передаваемой по наследству фиксированной структуры, которая является гораздо более сложной, чем структуры, рассмотренные выше.

ГЛАВА 12

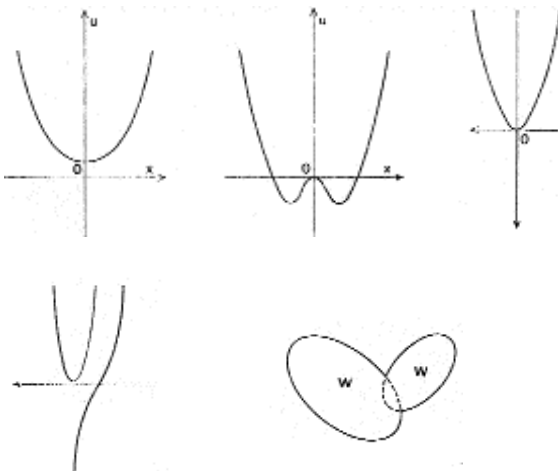
ВЕЛИКИЕ ПРОБЛЕМЫ БИОЛОГИИ

Жизни некогда достигать строгости
Поль Валери «Идея фикс»

Здесь мы обсудим следующие темы: 1. Целесообразность в биологии, 2. Необратимость дифференциации, 3. Происхождение жизни, 4. Эволюция.

12.1. ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТЬ В БИОЛОГИИ

А. Целесообразность и оптимальность



Когда биолог сталкивается с органом или поведением, приспособительный характер которого очевиден, первая забота биолога состоит в том, чтобы игнорировать этот характер и выявить факторы, непосредственно вызывающие данный процесс. Например, при изучении явления ориентации листьев на свет обращают внимание на *ауксин*, производимый световыми лучами, который замедляет рост ткани. Таким образом непосредственный механизм процесса получает прекрасное объясне-

Рис. 11-23, 11-24, 11-25, 11-26. Схема удвоения.

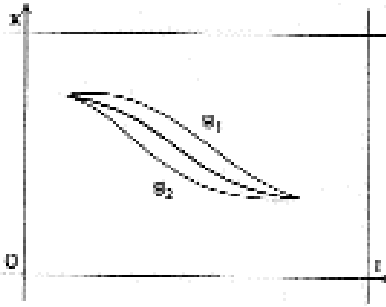


Рис. 11-27. Схема почкования.

менее биологическая целесообразность бросает разуму вызов, который заслуживает применения других средств.

Как замечал по этому поводу математик фон Нейман [1], известно, что в классической механике эволюция материальной системы может описываться двумя способами. Во-первых, локальными дифференциальными уравнениями, такими как уравнения Лагранжа или Гамильтона. Во-вторых, вариационным глобальным принципом, таким как принцип наименьшего действия Мопертюи. Эти два описания полностью эквивалентны, хотя один представляет механистический аспект локального детерминизма, а другой — телеологический аспект.

Похожим образом дело обстоит и в биологии. Любой эпигенетический или гомеостатический процесс допускает двойную интерпретацию — детерминистическую и телеологическую. Не следует забывать, что главным объектом изучения в биологии является не изолированная особь, а непрерывная пространственно-временная фигура, связывающая родительскую особь с потомками. Точнее говоря, когда два или более вида имеют между собой функциональное взаимодействие, такие как поедание, унавоживание и т.п., следует рассматривать общую фигуру, объединяющую пространственно-временные фигуры, связанные с отдельными видами. С каждым приспособительным процессом можно, очевидно, связать функцию S локального биологического состояния, которая выражает что-то вроде локальной сложности состояния по отношению к рассматриваемому процессу. Между двумя временами t_0 и t_1 (например, временем, когда родитель имеет возраст A , и временем, когда его потомок имеет тот же возраст A), непрерывная фигура развивается таким образом, что реализует минимум глобальной сложности $\int |S| dt$ относящейся ко всей этой фигуре. Таким образом реализуется минимизация сложности, то есть наиболее экономичное приспособление рассматриваемого процесса. Естественный отбор является одним из факторов этой эволюции. Я лично считаю, что внутренние механизмы, дающие ламарковские эффекты, действуют в том же направлении. Однако в отличие от случая классического механизма здесь невозможно надеяться на то, что удастся наблюдать действие этой эволюции дифференцируемым или непрерывным способом в любой точке особи. Действительно, глобальная непрерывная фигура подчиняется *предельным условиям*, которые в соответствующей системе пространственно воспроизводятся в заданном биохимическом контексте. Поэтому наблюдается не только непрерывная форма, но и конечная цепь локальных процессов (кредов), которые относительно хорошо заданы и слабо связаны друг с другом. Вариации самой глобальной формы могут приводить к качественным скачкам в структуре этих цепей. Речь идет о мутации. Эффект глобального вариационного принципа слишком слаб на локальных механизмах для того, чтобы можно было локально наблюдать многочисленные флуктуации случайного характера. Только общая результирующая

ние, и, как правило, биолог считает свою задачу выполненной. Но если чувство интеллектуальной неудовлетворенности поведет нас дальше и вынудит спросить, почему этот процесс столь очевидным образом благоприятен для метаболизма растения, то нам обязательно укажут на принцип отбора. Растения, в которых случайная мутация создаст этот процесс, получают преимущество, а не имеющие такового будут устранены отбором. Этот вялый и совершенно непроверяемый аргумент используется в качестве единственного объяснения биологической целесообразности. Тем не

этих локальных вариаций подчиняется, в конечном счете, вариационному принципу.

В то время как телеологический аспект органов и поведения бросается в глаза при наблюдениях за живыми существами (по аналогии с людьми и человеческим поведением, см. Приложение [1]), детерминистический и механистический аспекты от нас ускользают, потому что в этом случае речь идет о долговременном эффекте статистического характера, связанном с эволюцией, решающие факторы которого (влияние метаболизма на статистику мутаций), весьма вероятно, характеризуются чрезвычайной тонкостью. Уточним теперь нашу точку зрения.

Б. Случайность и мутации

Строго случайный характер (если этому выражению можно придать смысл) мутаций является одной из догм современной биологии. Однако мне кажется, что эта догма противоречит механистическому принципу действия и противодействия. Из двух возможных мутаций m и m' большую вероятность должна иметь та, которая более благоприятна для метаболизма (т.е. которая минимизирует производимую энтропию). Согласно классической схеме теории информации

источник \Rightarrow канал \Rightarrow получатель

источник оказывает действие на получателя. Однако и получатель оказывает обратное действие на источник. Этот обратный эффект обычно не наблюдаем, потому что собственная энергия источника слишком велика по отношению к энергии взаимодействия. Однако в случае нуклеиновой кислоты, собственная энергия связи которой, несомненно, мала по сравнению с энергией метаболизма, дело обстоит иначе. Мне возразят, что здесь получатель является открытой системой (как говорят в термодинамике) и что можно допустить, что ДНК управляет метаболизмом без участия существенной энергии взаимодействия. Действительно, в катастрофической ситуации очень слабое варьирование начальных условий может повлечь значительное изменение конечного состояния, и взаимодействие с хромосомной ДНК может вызвать малые вариации, приводящие к очень существенным конечным эффектам. Ситуация похожа на случай со стрелочником, который определяет движение поезда, тогда как обратное действие поезда на стрелочника нулевое. Но как и в любом примере, взятом из человеческой техники, правдоподобие тут кажущееся. В любом случае состояние метаболизма не будет нулевым. Вряд ли возможно, чтобы стрелочник без помех управлял стрелками под паровозом на полном ходу. Поэтому кажется весьма вероятным, что большинство спонтанных мутаций происходят в интерфазе, в разгар метаболической активности. Переломы и перемещения хромосом, наблюдаемые в метафазе, являются только видимым результатом внутренних метаболических событий в анафазе, которые нарушают ход анафазической катастрофы. Большинство мутаций обычно относят за счет химических модификаций последовательности ДНК в нуклеотидах, происходящих в результате ошибок в процессе удвоения ДНК. Я не разделяю общей уверенности в том, что точечной мутации, затрагивающей только нуклеотид, достаточно для того, чтобы вызвать нечто большее, чем функциональные затруднения. Это мне кажется повторением в иной плоскости ошибки морфологов, которые полагают, что разрушение одного нейрона мозга мешает мыслить. Допускать строгую действенность генетического кода без учета определенного *статистического шума*, значит подчинять фундаментальные регулирующие механизмы клетки процессу перманентной катастрофы. Даже если, как часто говорят, жизнь это ни что иное как непрерывный ряд катастроф, следует отдавать себе отчет, что эти катастрофы связаны с глобальной устойчивостью процесса, а не с произвольной игрой молекулярных сочетаний. Впрочем, даже если принять антропоморфную модель механизма чтения ДНК, в котором случаются опечатки, нельзя ли довести антропоморфность до предела и до-

пустить, что эти опечатки подчиняются, как учит фрейдистская теория, «бессознательным» потребностям и импульсам окружающего метаболизма? Мне трудно избежать вывода о том, что метаболизм оказывает на статистику мутаций влияние, которое хотя и является слабым, в длительной перспективе может оказаться решающим. Благодаря этому долговременному эффекту можно объяснить вариационный принцип *минимальной сложности* и усиление приспособляемости биологических процессов, которые приводят к целесообразности.

12.2. НЕОБРАТИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ

А. Основные типы дифференциации

Здесь предлагаются геометрические модели различных трансформаций, наблюдаемых при клеточной дифференциации. Их три.

1. Тихая катастрофа. Локальная динамика задается аттрактором V дифференциальной системы M, X . Тихая катастрофа имеет место, когда размерность аттрактора растет. Формально это может осуществляться двумя разными способами. Во-первых, через бифуркацию Хопфа, когда, например, закрытая траектория порождает инвариантный тор размерности два. Во-вторых, через взаимодействие с другой системой M', X' с диффузионным режимом, которое приведет к замене V произведением $V V'$ аттракторов этих двух динамик, которые в свою очередь становятся связанными.

Биохимически тихая катастрофа интерпретируется путем задействования новых циклов реакций, синтеза новых продуктов (РНК?) и новых органоидов (рибосом), разблокирования ранее подавленных степеней свободы. В эмбриологии тихая катастрофа дает выигрыш в компетенции. Но поскольку речь идет о непрерывном преобразовании, она не порождает никакого морфогенеза.

2. Катаболическая катастрофа. Она характеризуется резким снижением размерности аттрактора локальной динамики. Ее можно интерпретировать как установление резонанса между двумя или большим числом ранее независимых циклов реакций. На биохимическом уровне это выражается в резкой потере компетенции (путем дифференциации), массовым синтезом специфических белков и прекращением синтеза неспецифических белков нового режима. На морфогенетическом уровне происходит пространственная дифференциация новой ткани в форме катастрофы (обобщенной, если компетентная ткань не претерпела достаточно длительной предварительной поляризации).

3. Старение, или катаболическое скольжение. Может так случиться, что снижение размерности аттрактора V будет происходить почти непрерывно. Новый аттрактор V' имеет размерность ниже, чем V , но поскольку он погружен в V топологически сложным образом, все происходит так, как если бы V был эргодически покрыт новым аттрактором V' . Далее погружение V' в V топологически упрощается путем бесконечного числа скачкообразных изменений, термодинамический эффект каждого из которых незначителен. Хорошая модель этого явления получается, если рассмотреть на торе T^2 (где x, y берутся по модулю один) векторное поле, заданное при помощи равенств $x=1, y=m$. (Когда m рационально, это поле можно заменить структурно устойчивым полем с притягивающей траекторией). Когда m стремится к простому рациональному значению, происходит деформация описанного типа. Можно также предложить другую модель. Новый аттрактор V' не является фиксированным, но подвергается флуктуациям, которые заставляют его изменяться в некотором открытом множестве U из V (первоначально во всем V). Затем эти флуктуации ослабевают, и в конце концов V' стабилизируется в фиксированном положении V_0 . В обоих случаях, если взять в качестве координаты

такую функцию, что V_0 будет задаваться в V при помощи $v=0$, можно выразить энтропию (логарифм меры Лиувилля вероятности нахождения системы в окрестности данной точки) как функцию. При том, что первоначально имеется пологая кривая $g>0$, такая что $\int g dv = 1$, функция g развивается, стремясь к мере Дирака при нулевом значении координаты $v=0$. Если обратиться к модели из главы 4, мы увидим, что система будет, по крайней мере, взаимодействовать с индуцирующей системой, связанной с ней по переменной v . Такая модель объясняет прогрессирующую потерю компетенции. Если индуктор сам поляризован, индуцируемые зоны, в которых возникает новый режим взаимодействия, будут сужаться по мере того, как функция $g(v)$ будет становиться более острой.

Б. Сексуальность

Можно допустить, что приведенная схема правильно иллюстрирует потерю компетенции, однако неочевидно, что общее старение организма описывается моделью этого же типа (см. [2]).

Глобальный динамический характер жизненной динамики требует, чтобы рассмотренные выше трансформации могли быть обратимыми. Таковыми являются трансформации 2 и 3, которые могут быть обращены при помощи трансформации типа 1. Например, в результате удара вырожденное поле с аттрактором $V' \subset V$, может вернуться к начальному состоянию эргодичности на V . Это, вероятно, происходит при «раздифференциации» мышечных или костных клеток во время образования *бласты* в ходе регенерации органа. Однако следует заметить, что это явление проявляется только локально, как если бы его реализация требовала от остальных структур организма значительных усилий. Впрочем, имеется одно исключение: полное растворение личиночных структур во время окукливания при метаморфозе насекомых. Однако следует заметить, что здесь трансформация также не является возвращением в прошлое, и, кроме того, уникальная структура политенных хромосом в слюнных железах, свидетельствует о предельном напряжении, который в этот момент испытывает генетический материал.

Обратимость тихих катастроф (типа 1) поднимает очень сложную проблему. Не надо думать, что трансформация типа 2 или 3 ликвидирует эффект трансформации типа 1. Действительно, если между двумя системами аттракторов V и V' имеется связь, то последующая катастрофическая катастрофа приводит к появлению аттрактора G , который хотя и погружается в $V \cup V'$, но вообще говоря, существенным образом проецируется на оба сомножителя. Возникает смесь двух режимов V и V' — явление, которое в термодинамическом аспекте можно сравнить с диффузией двух газов, помещенных в один сосуд. Для разделения смеси двух газов необходима такая радикальная операция, как фракционированное сжижение смеси. Аналогичным образом для обращения катастрофы типа 1 жизненная динамика должна вернуться к квантитативной приостановке метаболизма, за которой последует заранее спланированный новый пуск. Такая инверсия реализуется в мейозе и гаметогенезе. У диплоидных особей с нормальным половым размножением эта операция, по-видимому, проходит следующим образом. Локальная динамика возникает из слабой связи между двумя изоморфными динамиками M_1, X_1, M_2, X_2 ; пространство M будет иметь вид $K \times T_1(i)=1, 2$, где T_1 это n -мерный тор, который в каком-то смысле представляет чисто кинетическую часть биохимической динамики (которая ускользает от биохимического анализа). Начиная с этого момента мейоз представляет собой специальную связь, которая позволяет составляющим X_1, X_2 на T_1 и T_2 соответственно действовать друг на друга аддитивным образом. В результате они уравниваются, что делает возможной хроматическую редукцию. Время этого взаимодействия соответствует образованию сложного синнаптического комплекса между гомологичными хромосомами. С этой точки зрения половое

размножение предстает как динамическая необходимость, определяемая периодическим характером биологического морфогенеза. Старая идея о том, что половое разделение в каком-то смысле необходимо для восстановления морфогенетического потенциала (выражаясь неточно), была заброшена в пользу телеологических обобщений о благотворных последствиях генетического обмена. Возможно, она заслуживает переоценки. Нельзя ли рассматривать *половое разделение как сон морфогенеза?* Этот сон может быть периодом скрытой жизни, необходимым для аккумуляции динамических смесей, возникающих, с одной стороны, в результате дифференциации, и с другой стороны, в результате морфогенетического переноса в пространстве-времени, осуществляемого гаметатами. Вообще говоря, у живых существ гаметы или споры появляются в той точке организма, где морфогенетические способности вида уже полностью реализованы и кажутся исчерпанными. Этот факт выглядит особенно шокирующим у некоторых грибов, например, мухоморов, которые образуют споры, неспособные к прорастанию.

Я, конечно, учитываю, что многие виды — партеногенетические и другие — обходятся без полового размножения. Но было бы удивительно, чтобы в этом случае митоз, порождающий будущие яйцеклетки, не обладал особыми цитогенетическими или другими свойствами, которые вполне могли ускользнуть от наблюдения.

В. Необратимость и смерть

Ни одна из рассмотренных нами динамических трансформаций не является фундаментально необратимой. Они только плохо обратимы. В таком случае, почему люди не бессмертны (как более низшие существа, например, гидры)? Обычно старение и смерть индивида считают следствием соматической дифференциации. Мне трудно понять, почему полностью дифференцированное существо не может быть бессмертным. Вот другое (гипотетическое) объяснение. Чтобы некоторое существо было бессмертным, его динамика должна по прошествии конечного времени порождать притягивающее состояние *g*. Со времени рождения и эмбрионального развития происходит временная эволюция, которую следует рассматривать как старение. Следовательно, необходимо, чтобы в течении конечного времени это старение остановилось и динамика устремилась к состоянию *g*. Это требует, чтобы данное состояние было очень сильно притягивающим и не допускало никакой последующей эволюции к другим состояниям. Многообразие конечных состояний должно быть компактом, как говорят в топологии. Мне кажется, что бессмертие индивида несовместимо с последующими эволюционными возможностями вида. Смерть индивида — это, таким образом, цена, которую приходится платить за сохранение возможности будущего совершенствования вида.

12.3. ПРОИСХОЖДЕНИЕ ЖИЗНИ

А. Синтез жизни

Если смерть это обобщенная катастрофа, задаваемая преобразованием метаболического поля в статическое, то синтез живой материи требует настоящей анаболической катастрофы, которая, начинаясь на статическом поле, завершается созданием метаболического поля. Как мы видели на дифференциальных моделях, для возникновения устойчивой метаболической ситуации требуется пройти через *бесконечное число обычных катастроф, подчиненных точному плану*. Таким образом, нужно пройти через бесконечное число локальных синтезов согласно хорошо определенной пространственно-временной схеме. Кажется, что такая задача превосходит возможности традиционной химии.

Другой путь, на первый взгляд более легкий, состоит в симуляции жизненного метаболизма. В некотором элементе объема реализуется непрерывный поток энергии, которую пытаются канализировать в кинетические структуры, наделенные способностью к самовоспроизводству. Эти структуры поначалу являются гибкими, но в дальнейшем могут дополняться генетическими структурами, которые придают им устойчивость. Вынужденно спекулятивным образом мы попытаемся описать первичные формы жизни и управляющие ими динамики.

Б. Три режима бульона

В начале был первичный бульон. Открытое множество U из \mathbf{R}^3 , управляется полем локальных динамик, которое находится в состоянии общей турбулентности. U пересекается потоком энергии (светового происхождения), которая в конце концов превращается в тепло. Но наш бульон далеко не гомогенен. Он управляется устойчивыми локальными динамическими режимами (r_1, r_2, \dots, r_n) , которые образуют n фаз в U . Эти фазы разделены узкими и гибкими переходными режимами, преимущественно текучего и турбулентного характера. Можно (по крайней мере, частично) упорядочить эти режимы в порядке возрастания топологической сложности, что интуитивно соответствует количеству информации, то есть негэнтропии, содержащейся в единице объема, подчиненном рассматриваемой динамике. Для простоты предположим, что три таких режима σ , ρ , τ расположены в указанном порядке и обладают следующими свойствами: τ это режим самоудвоения при взаимодействии с σ и по отношению к ρ ; при этом допускается устойчивый переходный режим $V_{\rho\tau}$. Тогда мы получаем следующую качественную эволюцию: в открытом множестве U_σ режима σ могут существовать крупинки режима τ , независимо от того, существуют ли они с самого начала или формируются путем спонтанного порождения в результате локального возбуждения динамики. Эти крупинки удваиваются и полностью заполняют открытое множество U_σ . В ходе этого процесса будет полностью исчерпана сложность окружающей среды, и когда плотность τ достигнет определенного порога, произойдет возвращение к менее возбужденной динамике ρ . Высвобожденные таким образом в U_ρ крупинки τ останутся из-за присутствия устойчивого переходного режима $V_{\rho\tau}$ защищенными мембраной. Эта ситуация продлится до тех пор, пока увлеченные возбуждением окружающей среды эти шарики не столкнутся с новым открытым множеством U_σ , в которое они проникнут и начнут там размножаться, и так далее. Это пока еще только ситуация преджизни, которая из-за своей гибкости остается обратимой. Явления, типичные для жизни, появляются в следующей ситуации: τ является к тому же динамикой почкования, дочерняя динамика которой, управляющая почкой, является устойчивым переходным режимом $V_{\rho\sigma}$ между режимами ρ и σ . Можно предположить, что этот режим $V_{\rho\sigma}$ связан с макромолекулярной организацией, наделенной определенной геометрической строгостью и имеющей ферментативные и направляющие свойства, стабилизирующие режим σ . Если этот так, то как только крупинка τ встречает открытое множество U_σ , она сначала оказывается на границе U_σ в U_ρ и порождает путем почкования переходный режим $V_{\rho\sigma}$. Этот режим навязывает ограничивающей поверхности свою собственную геометрическую структуру, например, сферу S . Внутри S режим σ защищен ферментативным барьером на S от случайностей окружающей динамики ρ , и крупинки τ могут регулярно размножаться внутри S . Когда окружающая динамика, которая не может бесконечно поддерживать экспоненциальный рост режима τ , исчерпывает свои ресурсы, динамика внутри S возвращается в менее возбужденное состояние ρ . Сфера S это только призрачная форма состояния 3, оторванного от окружающей среды. Будучи неустойчивой, она отрывается и позволяет крупинкам τ выйти наружу и колонизовать другую свободную площадку U_σ .

Предположим теперь, что в результате неблагоприятного изменения внешних условий

(например, динамики приноса энергии), режим σ резко ослабевает или даже полностью исчезает. Можно было бы ожидать, что в результате исчезновения σ τ , который зависит от него при размножении, также исчезнет. На самом деле этого не происходит из-за индукции, связанной с организующим центром. Если устанавливается взаимодействие с очень сложным режимом, заданным представляющей функцией g , областью определения которой является малый шар b с гораздо менее сложной динамикой g_b , управляющей окружающей средой, то после локальной поляризации окрестности b под действием g развитие всей системы к структурно устойчивой ситуации проявляется таким образом: ударная волна, ограничивающая шар b расслаивается, и на различных областях, изолированных этими слоями, устанавливаются режимы g_1, g_2, \dots, g_n , сложность которых увеличивается извне вовнутрь. Все это происходит в соответствии с креодом пространства-времени, который зависит только от лимитрофных режимов g_b и g . Это можно назвать прорастанием крупинки g (рис. 12-1). Можно также предположить, что под действием локального возбуждения режима переходный режим $V_{\text{пр}}$ ослабевает и порождает путем отслоения бесконечно малую площадку режима σ , промежуточного между τ и ρ с точки зрения сложности типологии функционального пространства. Этого достаточно для того, чтобы внедрить переходный режим $V_{\text{пр}}$ в край площадки σ в U_{ρ} . Таким образом будет построена сфера S , внутри которой режим продолжит существовать из-за ферментативных свойств режима $V_{\text{пр}}$, тогда как при отсутствии такого барьера он естественным путем исчезнет. В этой сфере крупинки могут размножаться, и цикл возобновляется.

Чистый результат этой ситуации может быть выражен следующим образом: τ становится режимом ρ -дубликации. Важнейшее отличие от предшествующего случая заключается в том, что возможность спонтанного порождения крупинки τ больше не допускается. Присутствие этих крупинки связано с присутствием родительских шариков и содержащейся в них информацией. Подобная процедура могла бы за счет роста топологической сложности режима τ позволить сделать его жизнеспособным в режимах ν, μ, \dots менее сложных, чем τ . Так в элементарной форме проявляется один из важнейших эволюционных процессов: расширение условий существования и победа над внешней средой. Само собой разумеется, мы можем снабдить эту эволюцию только формальными и предположительными объяснениями. Переход от σ -дублицирующего режима к ρ -дублицирующему в более широкой среде требует роста топологической сложности режима. Этот рост можно отнести за счет мутации, которая является истинным событием зарождения жизни. Соблазнительно думать, что этому способствует время необходимости. Как только под воздействием внешних неблагоприятных условий дубликация наших τ -крупинки чем-то ограничивается, нужно ожидать появления неудачных или обратимых митозов типа мейоза. Итак, в этой ситуации дочерние крупинки могут иметь сложность, превосходящую родительскую. Поскольку расщепление происходит медленнее и неустойчивей, чем распространение ударной волны деления, последняя может породить более тонкие топологии путем разрыва связи. Само собой разумеется, что из всей совокупности произведенных таким образом мутантов выживут только те, которые подверглись подходящей мутации. Существование такой мутации представляется постулатом, который успех жизненной динамики подкрепляет *a posteriori*.

Бульон с тремя режимами ρ, σ, τ , представляется достаточно удачной идеализацией клеточной деятельности. Режим ρ это режим цитоплазмы, σ -ядра, τ -генов (или ядерного материала в целом). Вирусы это типичные τ -крупинки σ -дублицирующего типа, которые снабжены дополнительным изменчивым аппаратом (оболочка, хвост и т.п.), защищающим их от внешнего мира или облегчающим соединение с клетками, на которых они паразитируют. Впрочем, вся эта схема в значительной степени возникла под влиянием теории ископаемых

вирусов, теории, которая представляет большой концептуальный интерес, хотя ее трудно принять из-за сложности цитоплазмы (см. Примечание [2]).

В. Закон повторения

Представленная схема также соответствует классическому закону повторения, согласно которому эмбрион в ходе своего развития повторяет этапы филогенеза. Примем здесь для простоты глобальную статическую модель из главы 10. Так как глобальная динамика вида всегда представлена τ , столкновение в ходе эволюции со все более враждебной средой (символизируемой режимами h_1, h_2, \dots, h_m), выражается в виде складок, последовательных «усложнений» динамик τ , которые позволяют им последовательно создавать переходные режимы $V_{h_1}, V_{h_2}, \dots, V_{h_m-h_m}$. Структуры, связанные с этими переходными режимами, это органы, которые осуществляют последовательную адаптацию к средам h_j . В связи с этим яйцо рассматриваемого вида это не что иное как τ -крупинка, ограниченная переходным режимом W_{h_m} , где h_m обозначает внешний мир. (У млекопитающих бремя внешнего мира поначалу принимает на себя материнский организм. В случае обычных яиц речь идет о вителлине и экстраэмбриональных образованиях). Образование зародыша в яйце вызвано ослаблением переходного режима W_{h_m} , который теряет способность постоянно обеспечивать режим τ внутри. Из-за этого внутренний режим описывает последовательно все состояния от h_1 до h_m , в частности $\tau_\sigma, h_\nu, \dots, h_j, \dots, h_m$. Крупинка τ реагирует на эти изменения внешней среды, образуя переходные режимы $I_{h_1}, I_{h_2}, \dots, I_{h_m-h_m}$, которые образуют связанные с ними органические структуры. Эти структуры строятся последовательно во временном порядке по центробежному принципу (изнутри наружу), что отметил уже Иксюль (см. эпиграф к десятой главе). Действительно, как мы видели в главе 9, речь идет всего лишь об идеализированной схеме, поскольку эпигенетическая динамика реализуется более коротким путем, что позволяет перешагнуть через некоторые этапы, ставшие ненужными.

12.4. ЭВОЛЮЦИЯ

А. Формы удвоения в собственном смысле

Вспомним очень обоснованное возражение, которое приводят телеологи по поводу механистической теории эволюции. Если эволюция управляется только случайными мутациями, контролируемые только естественным отбором, то как объяснить, что этот отбор оказался в состоянии производить все более сложные структуры вплоть до человека и удивительных проявлений человеческого разума? Я полагаю, что есть единственный способ избежать, хотя бы частично, этого возражения, которое обычно считают идеалистическим. Когда математик Эрмит написал Стельтье: «Мне кажется, что числа существуют вне нас и заставляют нас себя признать с той же необходимостью, той же неизбежностью, что и натрий или калий», он, с моей точки зрения, не заходил слишком далеко. Натрий и калий существуют только постольку, поскольку существует соответствующая математическая структура, обеспечивающая стабильность атомов натрия и калия. Для простых вещей типа молекулы водорода эту структуру можно объяснить при помощи квантовой механики. В случае атомов натрия или калия такая структура гораздо менее изучена, однако нет никакой причины ставить под сомнение ее существование. Я считаю, что в биологии аналогичным образом существуют формальные структуры, имеющую геометрическую природу, которые предписывают динамике самовоспроизводства в заданной среде единственную возможную форму.

Выразим это более абстрактно. Предположим, что эволюция биохимического бульона в

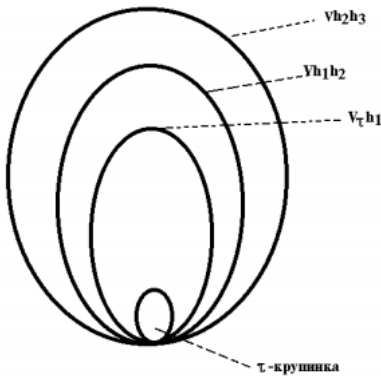


Рис. 12-1. Прорастания-крупинок.

заданной среде, зависящей от параметров W , может быть описана при помощи траекторий некоторого векторного поля в соответствующем функциональном поле. Обозначим через F операцию скольжения вдоль траекторий через разрывы времени t . Если задать исходные данные, определяемые формой s , то эта форма будет самовоспроизводящейся в том случае, если форма $F(s)$ является разведенной топологической суммой $s_1 \cup s_2$ двух форм s_1, s_2 , изоморфных s . Тогда исследователь будет иметь для всех значений t спектр оператора удвоения F , т.е. множество собственных форм s , таких что $F(s) = s_1 \cup s_2$. Весьма вероятно, что этот спектр является дискрет-

ным и что его можно задать на собственных формах таких операций как топологические сумма, произведение и т.п. При этом на пространстве W внешних параметров каждая собственная форма имеет собственную область устойчивости, и множество этих областей, разделенных случайным образом стратами конфликтов или катастроф, образуют филогенетическую карту, разлагаемую на креоды, как в случае эпигенетического ландшафта Уоддингтона. Итак, эволюция это не что иное, как распространение огромного фронта ударной волны через эту карту. Как и при развитии эмбриона здесь имеют место явления индукции, регрессии и катастроф по тем же формальным причинам.

Телеологи-глобалисты (вроде Тейяра де Шардена) ссылаются аналогию между эволюцией и эпигенезом эмбриона, чтобы показать, что и эмбрион, и волна эволюции развиваются в пространстве форм W в соответствии с инманентным и заранее установленным планом. Однако они забывают о существенном различии: развитие эмбриона воспроизводимо (и поэтому является объектом науки), а волна эволюции нет. Утверждать, что уникальное и невоспроизводимое явление протекает по плану значит делать пустые и необоснованные заявления.

Нельзя ли на основании сказанного предъявить аналогичный упрек в адрес филогенетической карты? Поскольку речь здесь идет об уникальном и невоспроизводимом явлении, не является ли все это пустой интеллектуальной забавой? Действительно, единственное возможное достоинство нашей схемы это выявление аналогий и локальных механизмов. Поэтому совершенно не исключено, что можно (особенно на низших особях, с большой частотой размножения) экспериментально вызвать локальные эволюционные толчки в заранее выбранных направлениях (ср. опыты Уоддингтона над дрозофилами). Вообще следует заметить, что любая точка эмбриона находится на большом расстоянии от клеточного ядра, которое содержит, по крайней мере виртуально, всю информацию, необходимую для локальной реализации индивида. В волне эволюции единственные факторы, общие для всех живых существ, это их элементарные биохимические составляющие — ДНК, РНК, белки, генетический код, которые, как кажется, не имеют достаточно сложных общих структур, чтобы дать основу глобального плана жизни. Поэтому пока не будут получены более полные данные, я предпочитаю думать, что эволюционное развитие должно протекать в соответствии с локальным детерминизмом.

Один из важнейших факторов эволюции — это, возможно, притяжение форм. Любая собственная форма (мы бы сказали, архетип, если бы это слово не имело телеологической

коннотации) стремится к существованию и притягивает фронт ударной волны существования, пока он не достигнет топологически близких собственных форм. Между этими аттракторами происходит конкуренция, и можно говорить о коварности формы, характеризуя ее способность притягивать близкие формы. С этой точки зрения очень соблазнительно приписать очевидную нынешнюю остановку эволюции чрезмерному, *слишком коварному* характеру человеческого аттрактора. Из всех теоретически возможных живых форм только бесконечно малая часть будет затронута ударной волной и получит право на существование.

Б. Гипотетический механизм притяжения форм

Предложенный здесь взгляд на притяжение архетипов вызывает очевидное возражение. Как структура (архетип, существующий только формально) может реально притягивать на по-настоящему существующие особи? Вот возможный ответ, основанный на более детальном анализе генетического материала. Собственная форма в принципе полностью задается своим хромосомным спектром, т.е. голым генотипом рассматриваемого вида. Этот генотип, по крайней мере, у многоклеточных, практически задается структурой хромосомного материала. Тем не менее, можно допустить, что одних только данных генотипа недостаточно для полной характеристики метаболического состояния животного. Можно допустить, что метаболический режим остается в некоторой степени текучим по отношению к возмущениям внутреннего или внешнего происхождения. Эту ситуацию можно выразить как в квантовой механике, сказав, что среднее состояние метаболизма это смешанное состояние, линейная комбинация собственных форм $g, u = \sum c_i g_i, c_i > 0$, где $\sum c_i = 1$. Все положительные коэффициенты c_i кроме веса c_0 архетипа g_0 и, возможно, веса c_1 формы g_1 , топологически близкой g_0 , являются нулевыми или незначительными. Это значит, что пока флуктуации относительно часты, метаболизм животного находится в режиме g_1 , хотя его хромосомный материал остается в состоянии g_0 . Для перехода между режимами $g_0 \Rightarrow g_1$ в определенные моменты и в определенных точках организма обязательно должны возникнуть особенности метаболизма (такие как разрывы, ударные волны и т.д.), где в большом количестве производится энтропия. Известно, что эти особенности могут вызывать порождение макромолекулярных структур m_0^1 , содействующих переходу $g_0 \Rightarrow g_1$ и уменьшающих производство энтропии. Эти частицы m_0^1 могут оказаться внутренне устойчивыми и выживать в порождающих их метаболических условиях; более того, они имеют тенденцию переносить создавшие их особенности перехода. Благодаря этим свойствам они самоумножаются. Это будут протовирусы или плазмогены. Термодинамическая конкуренция между режимами g_1, g_1' , близкими к g_0 , может интерпретироваться как борьба между двумя популяциями плазмогенных частиц m_0^1, m_0^1' . С этой точки зрения естественный отбор работает внутри метаболизма особи таким же образом, как он работает между особями и между видами. Если форма g_1 достаточно сложна, то частицы m_0^1 размножаются, что тем более способствует возобновлению формы g_1 . Веса c_i увеличиваются за счет c_0 . Когда вес c_1 превзойдет определенный порог, бесконечно малое возмущение может вызвать переход генотипа из формы g_0 в форму g_1 . Протовирус перехода m_0^1 перейдет в хромосомную позицию с возможным фенотипическим эффектом. Как будет влиять среда на трансформацию такого типа?

В. Непривычные раздражители

Подвергнем живое существо действию непривычного раздражителя S . Представляющая точка перейдет в фигуре регуляции в некоторую неопределенную точку s с большой амплитудой. Если раздражитель слишком силен, против него может не оказаться никакой защиты. В этом случае со смертью индивида умирает и проблема. В противном случае индивид реагиру-

ет путем включения корректирующих рефлексов l . Допустим, что существует последовательность рефлексов l_1, \dots, l_n , ликвидирующих помехи, вызванные раздражителем. На самом деле, в большинстве случаев существует много последовательностей рефлексов, обладающих этим свойством, и выбор между этими последовательностями изначально структурно неустойчив. Если, тем не менее, после периода конкуренции возобновить действие раздражителя S на рассматриваемую особь, то одна из корректирующих последовательностей в конце концов будет установлена. Если продолжить действовать раздражителем S на наследников этой особи, то можно надеяться, что привычное применение этой последовательности может встроиться в генотип данного вида вплоть до физиологических и морфологических последовательностей. Как нужно отнестись к ламарковской мечте, согласно которой приобретенные черты могут стать наследственными? Ниже мы покажем, как эта проблема решается в нашей модели.

С каждым из корректирующих рефлексов l связана страта X_l множества бифуркации функционального пространства фигуры регуляции. Может так случиться, что корректирующая последовательность $l_1 \dots l_n$ задает звездообразную страту $X_{l_1} \dots X_{l_n}$. Если эта страта окажется не очень высокой коразмерности и не слишком далекой от страт, эффективно пробегаемых волной роста в ходе развития, то вокруг этой страты может произойти стабилизация организующего центра последовательности l_1, \dots, l_n . Когда возникает этот процесс, животное может даже само найти раздражитель S . Если этот процесс пойдет достаточно далеко, то может произойти мутация, которая будет передаваться посредством обмена хромосомного материала. Геометрия этого обмена, вызывающего разъединение и последующую рекомбинацию хромосомных фрагментов после репликации, должна отражать топологическое положение нового организующего центра по отношению к прежним. В нашей гидравлической модели такая мутация должна быть представлена в виде обмена между перевалами, т.е. географически как захват одного из водных потоков данного ландшафта боковым притоком.

В заключение я признаюсь, что мне очень хочется думать, что влияние среды играет отнюдь не вторичную роль в больших эволюционных преобразованиях. Более того, можно допустить, что частота внешнего раздражителя может играть роль фактора, способствующего эволюционному толчку.

Г. Бактерии и многоклеточные

С этой точки зрения имеется большое различие между бактериями и многоклеточными. Действительно, метаболизм у бактерий является относительно жестким. Любое мало-мальски значимое изменение среды требует почти *ipso facto* соответствующего изменения генома, то есть мутации. Иначе обстоит дело у многоклеточных, которые способны к значительной физиологической адаптации без изменений своего набора хромосом. Другими словами, для бактерий не существует различия между взрослым организмом и зародышем. Если наши концепции точны, многоклеточные посредством кинетической конфигурации метаболизма своих гамет строят модели текущих условий своего существования, и даже вырабатывают некоторые представления о внешнем мире и живых существах, с которыми они функционально связаны (например, о добыче и хищнике). Итак, по крайней мере, у животных эти фигуры построены на аналогиях, которые выражаются в глобальном изоморфизме эпигенетических режимов. Таким образом, вполне естественно считать, что все эти модели построены посредством спецификации универсальной модели (как говорят в алгебраической геометрии; см. Приложение 2), которая содержит фигуры регуляции живых существ любых видов. Топология этой универсальной модели, в меньшей степени отражает филогенетическое родство, чем функциональное взаимодействие между видами. Расстояние между пчелой и львиным зевом здесь меньше, чем между пчелой и бабочкой. Великие эволюционные толчки истории жизни описываются,

таким образом, как глобальные деформации этой универсальной модели. Метаболизм гамет предстает как что-то вроде исследовательского института, устройства, воспроизводящего условия существования, близкие к существующим. Эволюционный толчок происходящий в этом устройстве вызывает виртуальные (неустойчивые) катастрофы, которые находят выражение в новой функциональной морфологии. Эта морфология выражает органические и физиологические приспособления, необходимые при эволюционных изменениях. И только когда эта новая морфология в достаточной степени стабилизируется, происходит настоящий эволюционный толчок. В результате происходит мутация, реорганизация хромосомного набора и появление новых органических форм. Согласно этой концепции, когда рыбы становятся амфибиями они уже «знают», что для них будет возможна жизнь на воздухе и какие новые органы следует для этого создать.

Впрочем, ничто не мешает считать, что большие эпидемии, обрушивающиеся на вид, являются признаком нарушения равновесия между генотипом и метаболическими условиями, и что такой удар помогает ускорить необходимый переход. Я, естественно, не скрываю ту часть рассуждения, которая содержит подобные взгляды. Я претендую только на то, чтобы предложить концептуально приемлемое решение одной из самых сложных загадок, которые ставит перед собой любопытный ум.

ДОПОЛНЕНИЕ 1

Целесообразность и архетипические креоды. По поводу целесообразности поведения в первую очередь нужно поставить следующий вопрос: существует ли имманентный (связанный с геометрией процесса) критерий, который позволяет опознать в нем телеологический характер? Можно считать, что телеологический процесс характеризуется тем фактом, что он имеет цель, т.е. конечное состояние, к которому стремится организм, сходясь в воронку (*cusped canalization*). Большинство телеологических процессов в биологии носят именно такой характер. Но в 6.2.Б мы видели, что в случае средних полей взаимодействия такие ситуации схождения могут возникать естественным и структурно устойчивым образом. Таким образом, телеологический характер процесса такого типа нельзя распознать автоматически. Глобальная регуляция, гомеостаз живых существ и, в частности человека, основаны на нескольких регулирующих функциях, таких как питание, дыхание, выделение, размножение и т.п., которые в эпигенетическом креоде задают гиперповерхности обрушения, ответственные за создание соответствующих органов и образующие в нервной системе функциональные поля, управляющие работой этих органов. После этого они создают в нашей психике организующие центры глобальных функциональных полей, то есть архетипические креоды. Поскольку основные регулирующие функции являются общими для всех живых существ, не удивительно, что большинство процессов, наблюдаемых у живых существ, кажутся целесообразными. Тем не менее, в биологии часто случается так, что некоторые органы или некоторые виды поведения, очень узконаправленные, не служат никакой очевидной цели. Существуют даже самоубийственные креоды, ведущие к разрушению личности: так происходит, если имеется конфликт между целями особи, с одной стороны, и целями вида или социальной группы, с другой стороны, или (что кажется непонятным), если этот креод отвечает целям хищника, как в случае с птицей, зачарованной удавом.

ДОПОЛНЕНИЕ 2

Универсальная модель. Идея универсальной модели может быть задана при помощи следующей метафоры. Откуда в конечном счете произошла жизнь на нашей планете? Из не-

прерывного потока световой энергии, излучаемой солнцем. Солнечные фотоны, входя в контакт с почвой или водой океанов, немедленно тормозились, и их энергия резко переходила в тепловую энергию. В результате поверхность разрыва между землей и водой становится также ударной волной, настоящим утесом, где обрушивается негэнтропия солнечного излучения. Жизнь можно в каком-то смысле рассматривать как подземное разрушение этого утеса, сглаживающее этот разрыв. Например, растение представляет собой ни что иное как обрушение земли в направлении света, а ветвящаяся структура корней — та же самая, которую можно наблюдать на потоках воды, сбегаящих с утеса и завершающихся на конусе обрыва. Пластиды, настоящие ловушки для фотонов, это миниатюрные устройства, в которых начинается эта подземная циркуляция. Энергия, запасенная в благородной форме химической энергии, начинает медленно деградировать. Поток энергии поглощает подземный утес и циркулирует в обратном направлении (по отношению к экологической пирамиде живых существ). Каждый биологический вид является структурно устойчивой особенностью, креодом этой циркуляции. Как и в гидродинамике, где энергия в режиме турбулентности перетекает от вибраторов низкой частоты к вибраторам высокой частоты и в конце концов теряется в тепловом хаосе, так и в жизни существа с медленным метаболизмом (растения) становятся добычей существ с более быстрым метаболизмом (животных).

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Старение. Кажется естественным допустить, что сущность старения состоит в локальной эволюции тканей к более устойчивому состоянию. Поскольку глобальная устойчивость организма основывается на возможности адаптироваться к агрессии путем локальных качественных изменений организма, рост локальной устойчивости ведет к снижению глобальной устойчивости.

[2] Возможно, вирусы правильнее было бы рассматривать как процессы саморазрушения жизни, заимствующие жизненный формализм самоубийственных креодов клеточного метаболизма.

ЛИТЕРАТУРА

[1] John von Neumann, *Collected Works*, volume VI, о роли математики см. стр. 484, Pergamon, 1963.

ГЛАВА 13

КАТАСТРОФЫ В АРХЕТИПАХ:

МЫШЛЕНИЕ И ЯЗЫК

13.1. АРХЕТИПИЧЕСКИЕ КРЕОДЫ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОЛЯ

Взаимодействие любого живого существа с внешним миром и взаимодействия живых существ между собой описываются относительно небольшим числом креодов, которые мы назовем *архетипическими* (креоды захвата, борьбы, воспроизводства). Это когерентные системы катастроф, порождаемые стабилизированными организующими центрами. Для каждого конкретного существа эти креоды могут быть разделены на два класса по их общему воздействию на организм: на благотворные и тлетворные креоды. Итак, относительная устойчивость любого существа и его воспроизводство требуют, чтобы бассейн притяжения благотворных креодов был как можно больше, а тлетворных — наоборот, сведен к минимуму. Очевидно, не приходится надеяться на полное подавление последних, потому что живые существа, как известно, уничтожают друг друга. Генотип это структура, в основном предназначенная для увеличения бассейна притяжения благотворных креодов и уменьшения тлетворных. В обоих случаях результат достигается при помощи вторичной морфологии, которая выражается в создании органов. Но органы имеют свои неудобства. Хотя органы усиливают функциональную эффективность, однако

1. присутствие органов относительно автономного действия (необходимое для этой эффективности) уменьшает когерентность организма;
2. поскольку в организме имеется только конечное число органов, это приводит к необходимости выбора между различными эпигенетическими полями. В результате возникает функциональная специализация и ограничение комбинаторных возможностей выработки защитных рефлексов.

Эти соображения можно применить к возникновению *Homo faber* (человека умелого).

13.2. НОМО FABER

А. Органы и инструменты

Если непосредственная причина эволюции первых антропоидов вплоть до современного человека окутана глубокой тайной, то ее динамическую природу, напротив, можно легко ловить. Уже у высших позвоночных передние конечности могут при случае использоваться для движения внешних объектов (особенно в игровой деятельности). Таким образом, внешние объекты понемногу начинают играть роль вспомогательных органов, сохраняемые после употребления. Происходит восстановление организующего центра таких видов деятельности, как борьба и захват с использованием внешних объектов — растительных или минеральных. Это приводит к тому, что органогенетические поля превращаются в поля создания инструментов. Этот перенос оказывается тем более легким, что поля формально остаются теми же. Помимо полей, связанных с элементарными катастрофами (такими, как разбивание, разрушение, укальвание, продырявливание и т.д.; см. таблицу Приложения [2]), появляются также поля,

связанные с конфликтом двух твердых тел, такие как полирование, стругание и т.п., которые мы уже встречали в эпигенезе костей (см. 9.5.В). Для этого оказывается достаточно модифицировать передние конечности таким образом, чтобы позволить им реализовать вторичную морфологию приготовления инструментов. Необходимость захватывать внешние объекты, приводит к *противопоставлению* большого пальца остальным. Далее нужно *противопоставить* одну руку другой, чтобы разрешить конфликт между объектами, которые они держат. Эти сложности были разрешены посредством выбора вертикального положения. Таким образом возникает комбинация исключительно разнообразных функциональных полей с почти неограниченными возможностями. Можно предположить, что ситуация в этом случае в корне отличается от ситуации животного. Конечно, и у животных можно найти бесконечную комбинацию функциональных креодов. Но там речь идет о простом смещении различных не связанных друг с другом видов деятельности, о *свободном производстве* конечных и независимых полей. В случае человеческих рук эта комбинация не произвольна. Она имеет значение. Рука берет и дает, она разбивает и ударяет, стреляет и толкает, отделяет и месит. Все эти виды деятельности, которые очевидным образом различны, проистекают, однако, из функционально и топологически связанных организующих центров возрастающих коразмерностей, которые последовательность вторичных морфологий создала в нашем мозгу. Уточним сказанное при помощи примера.

В царстве животных известен метательный креод, заключающийся в метании во врага предмета, который тот может использовать для питания. В начале такой объект извлекался из организма (например, нематоцисты гидры, чернила каракатицы и т.п.; некоторые обезьяны забрасывают нападающих своими экскрементами, выделенными очень кстати). У человека этот креод специализировался и приобрел вид удара дубиной. Речь идет о раскалывании черепа противника, что вызывает катастрофу типа «ласточкин хвост». Это требует, чтобы метательный снаряд имел типичную форму с косо срезанным краем. Мысленный образ предстоящей катастрофы у противника создает вторичное поле создания дубины. Этот процесс можно описать следующим образом. В отличие от многочисленных полей, наблюдаемых у животных, в случае человека исходные данные (с точки зрения предстоящих изменений) являются исключительно разнообразными. Из всего многообразия форм исходного материала мастер в конце концов извлекает уникальную форму. Изготовление дубины, таким образом, является очень сильно притягивающим креодом. Оно требует постоянного присутствия в сознании исполнителя требуемой формы. В этом смысле это *первый пример строго конечного процесса*, протека-

ние которого определяется его идеальным результатом и в котором обрабатываемый материал в каждое мгновение представляет собой плод конфликта между достигаемой целью и текущей ситуацией. Такой процесс можно описать следующим образом.

Б. Изготовление инструмента как креод

Когда мастер берется за камень B , который он собирается обработать, он в первую очередь мысленно сравнивает ее с требуемой формой O . Это сравнение вызывает в мозге фронт ударной волны, который способствует возникновению механизма осуществления. Возьмем, например, обстругивание B по грани f . Когда эта грань становится достаточно гладкой, новое сравнение с O приводит к обстругиванию другой грани f' . Позднее мастер может вернуться к обработке грани f ... Дадим геометрическую интерпретацию этому процессу. На плоскости Oxy , которая параметризует формы обрабатываемого куска материала, начало координат O это идеальная форма. Из O выходят два луча функциональной катастрофы, например бисектрисы $x=\pm y$, D и D' ($x>0$). Поля действия X и X' представлены полями параллельных векторов с наклоном -2 , $+2$, направленных к отрицательным x . На D происходит переход от X' к X , а на D' переход от X к X' . Если при этих условиях исходить из какой-то точки, расположенной в углу DOD' и находящейся в режиме X или X' , то окончательным результатом всегда будет достижение требуемой формы O . (рис. 13-1). Как только требуемая форма O достигнута или считается достигнутой, соответствующий рефлекс исчезает, и креод создания инструмента уступает место креоду использования этого инструмента, следующему за ним в общем функциональном поле.

Вторичная морфология базы DOD' является, таким образом, *полем обрушивающимся в воронку* типа тех, которые мы встречали в средних полях взаимодействия (см. 6.2 В). Действительно, если применить формализм органогенеза, описанный в 10.4, то это вторичное поле можно в некотором смысле получить как аналитическое продолжение огибающей ударной волны первичного креода. В общем случае внутренние переменные вторичного поля являются внешними переменными первичного поля. Но тут возникает новое обстоятельство: вторичное статическое поле вступает в конфликт с полем, которое этому сопротивляется: мы имеем в виду первоначальную форму камня B , взятого мастером. Чтобы обработать выбранный камень B мастер должен в свою очередь использовать вспомогательный камень A . Конфликт между этими двумя полями разрешается возникновением воронки вторичного статического поля (заметим, что ограничивающие ударные волны D , D' получаются как аналитические продолжения краев раны, которую нужно нанести противнику). Таким образом, возникает вторичная катастрофа, внешние переменные которой характеризуют относительное положение B по отношению к A и организующий центр которой не является точечным, а имеет базу в виде множества ударных волн. Третичное поле, созданное сглаживанием ударных волн, является статическим и характеризует притяжение со стороны B вспомогательного элемента A . В итоге можно утверждать, что множество полей, управляющих движением рук, образуют многомерную семантическую модель (размерность которой не меньше двенадцати, то есть размерности произведения двух групп евклидовых движений).

Поскольку изготавливает дубину и замахивается дубиной одна и та же рука, между соответствующими креодами возникает функциональная субординация, которая имеет почти столь же точный синтаксис, как и в случае языка. В частности формальный процесс органогенеза (см. 10.4), который превращает среднее поле взаимодействия на внешнем пространстве в статическое поле внутреннего пространства, реализуется в мозговой деятельности.

Каким образом человеческий мозг, который анатомически и физиологически столь мало отличается от мозга высших позвоночных, может воплощать столь сложную архитектуру, эту

иерархию полей, к которой животные, как кажется, неспособны? Я лично полагаю, что все дело здесь в дискретности топологических свойств кинетики нейронной деятельности. В человеческом мозге симулируются самовоспроизводящиеся особенности эпигенеза, что позволяет при наличии катастрофы внутреннего пространства Y и развертки U перевести развертку U во внутреннее пространство Y , осуществляя таким образом смешение внутренних и внешних переменных. Такая симуляция не требует существенного изменения анатомической и физиологической основы.

13.3. СОЗНАНИЕ

А. Происхождение

Для каждого животного была определена фигура регуляции (10.2B). В континууме стимулов U , который можно предположить дифференцируемым многообразием, имеется разделение на бассейны аттракторов, и при этом каждый аттрактор связан с определенным рефлексом r_i . Но даже у самых простых существ наблюдаемая динамика свидетельствует о наличии *памяти*. Распределение и относительная широта различных бассейнов зависит в определенной мере от прошедшей истории этого животного, особенно недавней. Некоторые стимулы могут явным образом не вызывать никакой реакции. Однако они воздействуют на структуру системы и на распределение бассейнов. Такие стимулы называются аффективными. Мы будем называть стимул *с болезненным*, если после реализации рефлекса r_0 он приводит к уменьшению объема бассейна притяжения r_0 . Теория условных рефлексов Павлова только систематизирует эти наблюдения. Следует кроме того отметить, что некоторые стимулы почти всегда являются следствием выполнения каких-то рефлексов. Они могут в свою очередь вызвать новые рефлексы, и так далее. Таким образом формируются рефлекторные цепи, которые с течением времени образуют вполне определенные последовательности. В подобных случаях логично говорить о функциональных креодах и об атласе этих креодов. Наблюдаемая пластичность реакций живого существа в своей основе имеет чисто биохимическую природу. Поскольку эта пластичность всегда имела место, в ходе эволюции ей достаточно было только усилиться. Поначалу скорость и автоматизм рефлексов были для животного важным условием выживания, однако это условие перестало играть роль с того момента, когда этот автоматизм стал использоваться хищниками для захвата добычи (подобно приманке, которой пользуются рыболовы). Оказалось, что некоторое отступление или, говоря антропоморфно, *осмысление* при выборе рефлексов, имеет благотворный эффект для безопасности индивида. В этих условиях более сложная структура соединения функциональных креодов, которая интегрировала бы недавнее прошлое индивида, могла оказаться только полезной. Именно такая структура составляет сознание.

Б. Модели нервной деятельности

Нервной деятельности можно сопоставить метаболическую модель (M, X) . В модели К. Зимана [1] каждому нейрону ставится в соответствие своя частота возбуждения m_i . Последующие изменения m_i задаются дифференциальной системой вида $dm_i/dt = H(m_i)$, которая, впрочем, сама изменяется. Психическое состояние представляет собой аттрактор A поля, заданного с помощью H . При изменении времени этот аттрактор, форма и положение которого характеризуют психическое состояние, разрушается и, проходя через катастрофу, уступает место другому аттрактору B , и так далее. С этой точки зрения психическая активность это ни что иное, как последовательность катастроф (вообще говоря, катаболических из-за их необрати-

мого характера). Однако постепенного снижения размерности аттракторов в этом случае не происходит, поскольку размерность поддерживается на постоянном уровне за счет постоянного взаимодействия с органами чувств (тихая катастрофа).

Однако такая модель является слишком общей, чтобы быть действительно полезной. Мы попытаемся усилить ее за счет следующей гипотезы: относительно автономные виды нервной деятельности соответствуют слабо взаимодействующим факторам динамики (M, X). Отвлекаясь пока от роли языковой деятельности, мы выделим три следующие слабо взаимодействующих фактора психической динамики.

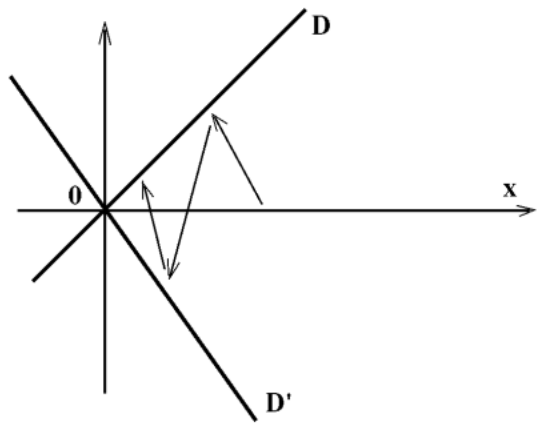


Рис. 13-1.

i) Сенсорное поле (поле ощущений), которое в каждый момент синтезирует множество сведений внешнего или внутреннего происхождения, доставляемых посредством чувствительных нервов. Обозначим через $E(t)$ аттрактор, соответствующий моменту t .

ii) Поле осуществления, которое в данный момент описывает совокупность приказаний, посылаемых нервными центрами в рабочие органы (мускулы и т.п.) Обозначим соответствующий аттрактор $F(t)$.

iii) Собственно психика, представленная динамической системой с аттрактором ψ , имеющим сложную структуру. Можно допустить, что сознание это разновидность непосредственной памяти. Настоящее вместо того, чтобы исчезнуть без следа в момент t_0 , продолжает существовать по крайней мере виртуально на протяжении всего промежутка времени t_0, t после t_0 . Геометрически можно допустить, что динамика связана с часами, заданными, например, линейным осциллятором с большим числом степеней свободы. Пусть W – (комплексное проективное) пространство замкнутых периодических орбит этого осциллятора. Динамика ψ – это метаболическое поле на W . Каждый аттрактор ψ имеет в W свой бассейн, ограниченный слоями конфликта с соседними аттракторами. Представляющая точка w в момент t расположена в бассейне $\psi(t)$. В состоянии бодрствования эта представляющая точка имеет в W постоянную скорость и постепенно описывает кривую c . Эта кривая описывает эволюцию сознания, поток сознания, столь любимый философами интроспекции. В каждый момент t действующее поле $F(t)$ определяется данными $E(t)$ и $\psi(t)$. Имеется каноническое отображение $q: E(t) \psi(t) \Rightarrow F(t)$. Кроме того, данные E, ψ, F определяют в W направление вектора скорости dw/dt , что приводит к непрерывному или катастрофическому изменению ψ (последнее происходит, когда w проходит в W через слой бифуркации). Непосредственная память, связанная с сознанием, проявляется в том, что в течение одного дня невозможно вернуться в точности к одному и тому же психическому состоянию в разные промежутки времени t_1, t_2 , поскольку если $t_1 < t_2$, то в момент t_2 мы еще помним о состоянии, уже пережитом в момент t_1 , что достаточно для различения этих моментов. Это значит, что кривая c не может быть переключена или, говоря более физично, не может проходить произвольно близко к своим собственным точкам. Поскольку W компактно, c (форма непрерывного роста по Гераклиту, см. прим. [1]) – не может быть бесконечной. Состояние бодрствования прекращается и уступает место сну, в ходе которого структуры,

связанные с кривой c , постепенно разрушаются (этому соответствует забывание). Можно мечтать о том, чтобы сделать координаты в W концентрациями метаболитов нервной деятельности, так чтобы точка w оставляла биохимический след, препятствующий ее возвращению на прежнее место. Однако явление сновидения настолько распространено в животном мире, а его физиология столь мало известна, что не имеет смысла настаивать на такой интерпретации. Впрочем, при определенных условиях сон может перестать быть необходимым. Кривая c во время бессонницы может проходить гораздо ближе к себе самой, чем обычно. В отсутствие внешних стимулов эволюция будет захвачена притягивающим циклом системы. Отсюда и циклический характер ментальных процессов в таких редуцированных состояниях сознания. Поразительно наблюдать топологическое упрощение ментальной динамики при засыпании. Происходит переход от очень гибкой эволюции, характерной для состояния бодрствования, к динамике Морса-Смейла (с последовательностью аттракторов), которая в состоянии сна вырождается в статику. Онирические состояния сознания соответствуют восстановлению динамики W , но практически без сгущения, без продолжения следа кривой c . Недавние исследования двух фаз сна — медленной и быстрой (т.е. онирической — с движением глаз под веками) показывают всю сложность этого процесса. В онирической фазе, столь развитой у новорожденных, можно усмотреть реализацию виртуальных катастроф, которые исходно являются катастрофами функциональных полей и к которым время от времени возвращаются даже взрослые, чтобы поддерживать эти поля в достаточно адаптированном состоянии (см. прим. [2]).

Как бы то ни было, наша модель равным образом отражает и психологическое явление *скуки*. Мы не любим в течение одного дня по несколько раз делать одно и то же, потому что это привело бы кривую c в положение близости с самой собой, что невозможно при нормальном функционировании динамики Ψ . Если тем не менее внешние условия заставляют нас повторять одно и то же действие, то приспособление осуществляется благодаря явлению *привыкания*, которое состоит в том, что движущее поле F , задаваемое динамикой Ψ , перемещается в область бессознательных движений. В нашем пространстве W это явление можно интерпретировать геометрически следующим образом: бассейн движущего поля F увеличивается в W за счет вторжения в соседние бассейны, например, G . Можно считать, что часть психики остается на листе F в виде некоторой фантомной деятельности, тогда как сознание переключается на лист G , конкурирующий с F . В этой ситуации происходит раздвоение личности, однако это раздвоение не ведет к образованию двух изоморфных элементов. Мы никогда не думаем больше, чем об одной вещи одновременно, хотя иногда мы можем делать несколько разных дел сразу.

В. Человеческая свобода

Согласно нашей схеме, последовательность человеческих мыслей и действий это последовательность аттракторов, разделенных катастрофами. Эти катастрофы в большей или меньшей степени непредсказуемы. Некоторые из них предопределены формально (самой структурой аттракторов и топологических связей между ними) или генетически, или мнемонически. Другие, напротив, характеризуются значительной структурной неустойчивостью (это ситуации выбора, как в случае Буриданова осла, выбирающего одну из двух охапок сена, находящихся от него на равном расстоянии). При этих условиях есть все основания утверждать, что человеческая свобода является фактом. Несомненно, можно построить модель, детерминированную по определению, предполагая, как в модели Зимана, что наше психическое состояние задается представляющей точкой пространства (а не аттрактором). Но поскольку катастрофы не перестанут при этом регулироваться структурно неустойчивыми процессами, то это будет чисто теоретической точкой зрения, не имеющей связи с практикой.

13.4. ЯЗЫК

А. Язык как семантическая модель

Для начала расположимся на доязыковом уровне мышления в собственном смысле слова. Что означает утверждение, что два индивида, например, Петр и Павел, думают одно и то же? В нашей геометрической модели это означает, что их психические динамики — ψ_1 для Петра, и ψ_2 для Павла — находятся в состоянии динамического изоморфизма. Точнее говоря, это означает, что значение соответствующего психического состояния определяется топологической структурой этих аттракторов и их положениями в атласе динамик. Даже если Петр и Павел говорят на различных языках, это не мешает нам сказать, что их психические динамики находятся в изоморфных состояниях. Это предполагает, что существует динамический психический атлас общий для всех людей. Языковое разнообразие является следствием морфогенетических полей социального происхождения (таким образом мы возвращаемся к мифу о Вавилонском столпотворении). Я намерен пойти даже дальше и утверждать, что значительная часть психического доязыкового атласа является для нас общей с животными. Когда Петр думает: «Хочу есть», его динамика ψ находится в форме H , топологически изоморфной той, которая присутствует в психике голодной собаки. Я пойду еще дальше и скажу, что форма H — это форма биохимической кинетики, которая в самом начале онтогенеза посредством катоблической катастрофы способствует дифференциации эндодермы, способствует развитию желания есть с помощью эктодермы... Любой динамический атлас довербальной психики нужно рассматривать как имеющий генетическое происхождение (при том, что морфогенетические поля эпигенеза, как мы видели, восстанавливаются в функциональной форме после катастроф органогенеза). Эффект, которые некоторые вещества оказывают на психику, служит доказательством этой непрерывности. Тот же мужской гормон, который заставляет регрессировать морфогенетическое поле яичника у женского эмбриона, вырабатывает у взрослых типичное мужское поведение.

Вернемся теперь к языку в собственном смысле. Если, видя драку между Петром и Павлом, я захочу об этом сказать, то мне придется выбирать одну из следующих трех фраз: 1) Петр дерется с Павлом, 2) Павел дерется с Петром, 3) Петр и Павел дерутся (или Павел и Петр дерутся). Выбор между этими формулировками практически произволен или зависит в лучшем случае от минимума различий между моим интересом к тому или другому персонажу. Но несомненно одно. Как только я начинаю строить высказывание (в уме или реально), первое же слово фразы предопределяет все ее дальнейшее развитие. Выбор между тремя формулировками это глобальная катастрофа сообщения, и как только выбор сделан, формулировка фразы становится детерминированной процедурой, *морфогенетическим полем, креодом*. Эту эволюцию можно описать следующей геометрической моделью. Психическая форма ψ сначала проектируется при помощи проекции p на аналитическую систему A . Затем фигура $p(\psi)$ притягивается некоторым количеством форм сообщения, между которыми производится выбор. Как только форма сообщения G выбрана, эта форма прочесывается переменным проектором, который задает некоторое количество направлений q_i , образуя ортогональную систему проекций. Проекция $q_i(G)$ в свою очередь захватывается аттрактором, порождающим слово. Это слово включает рефлекс выражения — устного или письменного. Выражение может быть подавлено, и тогда слово отсылается в память. Множество слов $q_1(G), q_2(G), \dots, q_r(G)$ образует сообщение, получаемое слушающим, где каждое слово приобретает в специализированном рецепторе соответствующую форму $q_i(G)$. Все эти формы собираются в синтезирующем устройстве S , которое путем прямого взаимодействия порождает топологическое произведение

форм $q_i(G)$. В общем случае размерность произведения $\Pi q_i \Rightarrow (G)$ значительно превосходит размерность исходной формы G . Восстановление начальной формы G возможно только в результате катаболической катастрофы $\Pi q_i(G)G$. Именно этот процесс выражает значимость сообщения для слушателя. Последовательность случайно взятых слов, даже поставленных в грамматически правильном порядке, не порождает никакого сообщения именно из-за отсутствия этой катастрофы. Форма-произведение Π является семантическим монстром избыточной размерности, которая не может включиться в динамику и постепенно распадается в синтезаторе Sy посредством забывания. Однако нам нужно еще обосновать динамический характер этой катастрофы.

Б. Барьер взаимодействия и значение

Вернемся к ситуации, столь характерной для онтогенеза, когда морфогенетическое поле аттрактора U размерности k подвергается пространственному разложению. Исходная динамика уступает место произведению динамик с аттракторами $Y_1=p_1(Y)$, $Y_2=p_2(Y)$, каждый из которых имеет размерность k , в результате чего возникает динамика-произведение с аттрактором $Y_1 Y_2$, имеющим размерность $2k$. Но на самом деле из-за топологической непрерывности аттрактор-произведение $Y_1 Y_2$ не описывается полностью с самого начала представляющей точкой. Описывается только диагональ $Y \subset Y_1 Y_2$ или (из-за неизбежных возмущений) только трубчатая окрестность диагонали. Можно допустить, что вследствие наличия памяти или явлений, названных в 7.5. В «канализацией равновесия», эта окрестность в конце оказывается заключенной в системе отражающих стенок с обрушивающим эффектом. Таким образом между подсистемами Y_1 и Y_2 возникают барьеры взаимодействия. У растений эти барьеры реализуются только жидкостным путем. У животных это происходит в основном нервным путем. В нашей модели анализаторы A и синтезаторы Sy снабжены барьерами взаимодействия вокруг значимых сообщений, вообще говоря, изоморфным образом (всякое сообщение значимое для говорящего является таковым и для слушающего). Эти барьеры определяют в A формы сообщений G , о которых мы говорили. Последовательность слов $q_i(G)$ порождает значение только в том случае, если барьер значения проходит через аттрактор формы-произведения $\Pi q_i(G)$. В отсутствие аттрактора фраза не имеет значения. Однако в этом случае ситуация отличается от той, которая возникает при выслушивании фразы на неизвестном иностранном языке. В последнем случае сами звуки не составляют никакого слова, иначе говоря, не захватываются аттракторами Sy , и общий образ $E(t)$ остается в области грубой чувственности.

Рассмотрим подробнее умственный процесс, который ведет к образованию фразы. В начале имеется психический аттрактор ψ , то есть идея. Эта идея проектируется на анализатор A в виде $p(\psi)$. Форма $p(\psi)$ посредством приблизительного резонанса порождает аттракторы сообщений G_i , которые начинают конкурировать. Можно допустить, что каждый аттрактор G_i взаимодействует с $p(\psi)$ (по крайней мере виртуально) и порождает фронт ударной волны D_i , то есть *интервал*, который измеряет топологическое различие между формами. Среди аттракторов G_i выбирается G_0 , который порождает волну D_0 наименьшей амплитуды. Благодаря рассмотренному выше явлению поглощения волнового пакета, любое возбуждение будет захватываться выбранным аттрактором G_0 . Волна D_0 разбивается на систему подволн, соответствующих направлениям q_i . Затем в дело вступают корректирующие устройства, позволяющие уменьшить значимость этих остаточных волн. Это вторичные уточнения, для которых используются прилагательные, наречия качества, времени, места и т.п. Эти вторичные функции следует рассматривать как операторы, которые деформируя фундаментальные формы $q_i(G_0)$ осуществляют определенные модуляции: не стоит и пытаться втиснуть богатство геометрической непрерывности в матрицы дискретного кода! После всех этих операций воссозданная оста-

точная ударная волна D_0 направляется в сознание ψ , где она измеряет различие между тем, что хотелось сказать, и тем, что было сказано в действительности. Таким образом она участвует в ментальной катастрофе, которая порождает в ψ следующую идею. Следует заметить, что аттрактор ψ , видимо, не выдерживает взаимодействия с языковым центром A : высказывание мыслей их разрушает.

Вероятно, существует немного фундаментальных проекций q_i - вряд ли больше трех для предложения, что соответствует подлежащему, глаголу и прямому дополнению, тогда как другие грамматические функции являются только их модификациями. Образование нового слова (неологизма) соответствует созданию в A и S_u нового аттрактора. Этот процесс происходит на наших глазах, давая нам бесспорное доказательство ламарковского принципа «функция создает орган».

В. Грамматические категории

Эта схема ставит во всей полноте важную и сложную проблему универсальности грамматических категорий. Каждому направлению проекции q_i соответствует какая-нибудь грамматическая функция, например, подлежащее, глагол, прямое дополнение и т.п. Можно заменить систему проекций q_i совершенно другой системой ортогональных проекций q_j' , что приведет к языковой структуре, в которой наши традиционные категории уступят место иным, совершенно незнакомым. Но весьма вероятно, что коммуникационные ограничения настолько строги, что оставляют мало места для подобного произвола. Представляется более или менее принятым, что если записать одну и ту же фразу на различных языках, и затем разложить ее на неделимые единицы значения, то это разложение, по крайней мере в первом приближении, будет практически одинаковым во всех языках. Это означает, что такое разложение раз и навсегда представлено на уровне невербальной динамики ψ , где аттрактор ψ разлагается на слабо взаимодействующие динамические составляющие. Можно думать, что если структурно устойчивая динамика разлагается на топологическое произведение слабо взаимодействующих несводимых друг к другу динамик, то это разложение является единственным. Впрочем, перенос может быть эффективным только в том случае, если вся психическая форма ψ достаточно близка к форме сообщения G , которая может ее захватить. Естественно допустить, что форма ψ , которая подлежит передаче, должна иметь структуру морфогенетического поля отношений. Типичное поле отношений это поле проекта органа движения, которое обычно содержит притягивающие режимы g , соответствующие костям, и движущие мускульные режимы со значениями из группы перемещений D . Группа D также действует в поле восприятий, которые мы получаем из внешнего пространства. Ее инвариантами являются твердые тела, объекты внешнего мира, на которые произвольным образом действуют наши движущие мускульные поля. Таким образом, внешнее твердое тело с точки зрения мускульного действия гомологично кости. Объект, грамматически соответствующий имени существительному, в морфогенетическом поле гомологичен кости, а глагол — мускулу. Таково наилучшее приближение морфогенетической формы формой сообщения (см. Приложение [2]).

Попробуем сделать еще один шаг в наших рассуждениях. Можно допустить, что концепты, связанные с внешними объектами, задаются аттракторами периодического характера с очень большим периодом N_1 , одним и тем же во всех случаях, тогда как действия, напротив, задаются аттрактором с небольшим периодом N_2 . Тогда проекция q будет чем-то вроде гармонического анализатора. Если осветить колеблющуюся струну стробоскопом, настроенным на частоту колебаний этой струны, то можно наблюдать неподвижные формы, подобные тем, которые возникают при действии оператора с частотой N_1 на форму G , то есть подобные объек-

там или существительным. Проекция же с частотой N_2 даст глаголы. Можно кроме того предположить, что частота взаимодействия N непрерывно меняется от N_1 до N_2 . Вначале видны только объекты. Потом эти объекты начинают вибрировать и в конце концов растворяются в движении, которое позволяет все более ясно различить глобальную конфигурацию, схватываемую резонансной частотой N . Переменная проекция будет сначала захвачена существительными, а затем, после катастрофы, глаголами. Однако за существительным следует последовательность виртуальных действий, а глаголу предшествует спектр виртуальных подлежащих. Аттрактор, связанный с проекцией $q_1(G)$, можно считать не только данным существительным, но и данным словом во всех своих виртуальных вариациях, каноническим образом связанных с этим существительным. Например, если G это фраза *собака лает*, то $q_1(G)$ это множество *собака*, за которым виртуально следует глагольный спектр *прыгает, бежит, лает, ест* и т.п. $q_2(G)$ это слово *лает*, которому виртуально предшествует спектр существительных *человек, собака, кошка* и т.п. При восприятии слушателем сообщения *собака лает* происходит резонанс между глагольным спектром подлежащего и глаголом, между подлежащим и спектром существительных глагола. Это порождает значение и понимание сообщения слушателем. Следует заметить, что для того, чтобы сообщение не было двусмысленным, резонанс должен быть единственным (более глубокое рассмотрение этого вопроса см. в Приложениях [2] и [3]).

Г. Неправильные означающие

Можно было бы полагать, что глагольные спектры, сопровождающие объекты, имеют чисто эмпирическое происхождение, а именно, что они возникают из наиболее частотных употреблений, содержащих указания на этот объект. Однако с большой вероятностью таких может не оказаться. Действительно, каким образом квантифицировать непрерывную гамму движений объекта? Как вместить непрерывный поток явлений в дискретные формы уже вербализованных действий? Не удивительно, что в этих условиях глагольный спектр объекта не часто определяется только внутренней комбинаторикой разума, лишенной непосредственной связи с реальностью. Исходно разум имеет в своем распоряжении только универсальные генетические формы, связанные с основными биологическими функциями, которые поначалу имеют значение только для отдельного организма. Однако можно допустить (вслед за некоторыми биологами), что морфогенетические поля биологического вида A часто содержат структуры, имитирующие психику других видов, которые функционально связаны с A , например, являются для A добычей или, наоборот, для которых A является добычей. (Так некоторые считают, что окраска крыльев некоторых бабочек, имитирующая глаза кошки, отпугивает охотящихся на них птиц.) Жертвы и хищники, несомненно, были первыми объектами, которые, по крайней мере в скрытом виде, приобрели статус одушевленных существ. Их спектр жизненной активности должен был быть очень рано связан с выгодой для вида. Эта полезная связь впоследствии, очевидно, была обобщена на все объекты. Благодаря этому последнему обстоятельству любое формально правильное утверждение нагружается значением в ущерб полезности дискурса. Человеческий разум пытался изменить архитектуру дискурса таким образом, чтобы устранить неправильные означающие. Однако произошло это только частично, после длительного периода поиска наощупь, который продолжается до сих пор. Речь идет об априорных кодификациях, навязываемых морфогенетическим полем лингвистического сообщества и образующих основу примитивного или магического мышления. Процесс устранения незаконных значений это, несомненно, один из наиболее фундаментальных аспектов мышления. Фраза «три это самое совершенное из всех чисел», казавшаяся очевидной истиной во времена Платона, в глазах современного человека потеряла всякое значение. При помощи какого психологического механизма разум смог очистить свой дискурс от псевдозначений? Оче-

видно, что какую-то роль в этом сыграло чувство смешного, забавного. Приведем простой пример.

Известна игра в «путаницу», которая заключается в том, что участники случайным образом строят грамматически правильную фразу (состоящую из подлежащего, сказуемого, дополнения и других членов), не зная, какое слово было добавлено предыдущим игроком. Если, играя таким образом в семье, вы получите фразу «Лягушка откупорила рассвет в Париже», то она не вызовет никакого резонанса, это будет сообщение без смысла. Но если вы получите фразу «Папа ест навоз», она вызовет у детей взрыв веселья. Во втором случае фраза имеет значение. В глагольном синтезаторе Su и сознании ψ она порождает приемлемый аттрактор. Однако в сознании она наталкивается на семантическую несовместимость с глобальным ментальным образом, связанным со словом «папа». Это порождает очень быстрые колебания аттрактора между Su и ψ , что собственно и вызывает смех. Вычислительная машина аналогичным образом зациклится, если вы поручите ей разделить 31 на нуль. Таким образом, смех это неопределенная реакция психики, которую заставляют помыслить немислимое. Интересно, что эта семантическая цензура действует гораздо быстрее этической (моральной) цензуры. Фраза «Папа убивает прохожего» не вызывает никакого веселья. Периодическое отбрасывание сознанием морально неприемлемых идей наблюдается в явлении угрызений совести. Соответствующие психологические реакции гораздо более медленны и продолжительны.

Обозначающий характер сообщения должен поначалу являться локальным (формальным) свойством письменной или устной фразы. Глобальный семантический барьер, соответствующий всей фразе, возникает только постепенно. Комическое оказывается *препятствием для глобального значения сообщения, которое значимо локально* [3]. Можно подумать, что современная мысль, наконец, нашла истинный критерий значения в соответствии опыту, согласии с действительностью. Но, возможно, что этот критерий по-прежнему слишком широк. Рассмотрим, например, всю массу появившейся за последние два года научной продукции в области так называемых точных наук — от математики до биологии. Не вызывает никакого сомнения, что благодаря добросовестности и аккуратности экспериментаторов почти все передаваемые таким образом сообщения истинны. Однако, не проявляя избыточного пессимизма, можно тем не менее предполагать, что по меньшей мере 98 процентов из них *незначительны* в том смысле, что они не вносят заметных изменений в наш способ восприятия действительности.

Мы подходим, таким образом, к более строгому определению значения. Значение второго уровня для данного сообщения не определяется ни истинностью этого сообщения, ни его формальной согласованностью с ранее существовавшей системой. Оно, наоборот, связано со способностью изменять существующие системы, создавать новые ментальные структуры восприятия. Это демонстрирует пределы формального мышления. Формальной является любая мысль ψ , форма которой не меняется при словесном общении $A+Su$ и обозначающий характер которой определяется формальной структурой выражения. Поскольку непротиворечивая формальная система не содержит никакого предложения, позволяющего заново поставить вопрос о следствиях из аксиом значения системы, невозможно получить формальное выражение, имеющее значение второго уровня. Плодотворность математики и невозможность доказать непротиворечивость арифметики, возможно, тесно между собой связаны. В любом случае только геометрическая модель типа той, которую мы предлагаем, может помочь семантике, то есть теории значения, выйти из тавтологий и жонглирования словами, на которые она обречена, пока использует обычный язык.

13.5 ТРИ ВАЖНЫХ ТИПА ЧЕЛОВЕЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ:

ИСКУССТВО, БЕЗУМИЕ И ИГРА

А. Искусство

Можно ли описать искусство при помощи семантических моделей? Положительный ответ очевиден для поэзии, использующей обыкновенный язык, и для музыки, основанной на применении дискретной нотации. Случай с пластическими искусствами менее ясен. Но и там повторяемость форм и типичных мотивов позволяет предполагать, что понятие креода — а вместе с ним и семантическая модель — сохраняет определенную значимость. От обычного языка такого рода деятельность отличает использование систематически *возбужденных* креодов. Это разрушает глобальное понимание модели, придает ей неясный или несуществующий смысл. Откуда же происходит наше чувство прекрасного? Из ощущения, что произведение искусства не является произвольным. Непроизвольно у нас возникает чувство, что создание произведения происходит под руководством какого-то организующего центра большой размерности, далекого от привычных структур обычной мысли, но тем не менее резонирующего с эмоциональными или генетическими структурами, которые поддерживают наше сознательное мышление. Произведение искусства действует на сознание зрителя как росток виртуальной катастрофы. Под прикрытием беспорядка и возбуждения, которые возникают в поле чувственности при созерцании произведения, некоторые очень сложные креоды — слишком сложные, чтобы сопротивляться возмущениям метаболизма нормального мышления — могут в какой-то момент реализоваться и существовать. Но мы, вообще говоря, не в состоянии формализовать и даже сформулировать структуру этих креодов, поскольку она не может быть кодифицирована с помощью языка без того, чтобы быть разрушенной.

Б. Безумие

Одним из фундаментальных постулатов нашей модели является существование когерентных систем катастроф (креодов), организованных в архетипы, которые, как мы показали, не зависят от своего субстрата, в качестве которого можно брать любые абстрактные алгебраические сущности. Но не следует забывать, что субстрат играет важнейшую роль в динамике этих форм. В частности, если субстраты *A* и *B* динамически независимы или взаимодействуют только слабо, то морфология *A* практически не зависит от морфологии *B*. При нормальной умственной деятельности существует большое число относительно независимых субстратов, каждый из которых подчинен своему собственному детерминизму (или эволюции). В этом отношении умственная деятельность представляет собой симуляцию динамики внешнего мира, который благодаря пространственному протяжению включает независимые или слабо взаимодействующие области. Однако поддерживать такое разделение субстратов в рамках единой взаимосвязанной функциональной системы, каковой является нервная система, оказывается трудно. Будучи неустойчивой, она оказывается уязвимой для воздействий таких грубых физиологических факторов как лихорадка, различные наркотики и т.п. Взаимодействие между субстратами *A* и *B* может усилиться до такой степени, что архетип, заданный на *A*, посредством связи будет перенесен на *B*. Его присутствие будет мешать нормальному развертыванию динамики *B*. Более того, в результате такого смешения субстратов будут разрушены наиболее тонкие креоды в организующем центре большой размерности, и вместо них возникнут более простые поля, которые будут устойчивее и разительнее. Таким образом, установится синкретическая ментальная динамика, имеющая относительно простую структуру, которая будет соответствовать тому, что мы обычно называем *помраченным сознанием*.

С этой точки зрения, нам еще предстоит выработать хорошую теорию использования аналогий в науке. Локальные изоморфизмы динамических ситуаций, управляющие независимыми субстратами, являются, как я полагаю, достаточно частыми, и многие из них еще не замечены. Уже отсюда следует, что эти аналогии не имеют того значения и смысла, которые пытается им придавать непредубежденный разум. Между признанием случаев морфологического изоморфизма на различных субстратах и установлением между этими субстратами фундаментального взаимодействия для объяснения этих аналогий имеется громадная пропасть, которую преодолевает как раз помраченное сознание. Если некоторые мои рассуждения, особенно в биологии, показались читателю граничащими с безумием, он при перечитывании может убедиться, я эту пропасть, надеюсь, ни разу не преодолел.

В. Игра

В игре разум предается деятельности, которая является в высшей степени комбинаторной. Он создает и воплощает семантическую модель по правилам, которые он знает и которым он следует. В простейших случаях правила игры полностью определяют стратегию. Имеется конечное число возможных вариантов развития, и разум может их обозреть. Но чаще правил оказывается недостаточно, чтобы полностью определить систему. Тогда игровая деятельность напоминает художественную. В соответствии с эстетическим чувством игрок пытается создать наиболее красивую комбинацию, которая оказывается и наиболее результативной. Однако в глубинном плане игровая деятельность отличается от художественной сознательным характером соблюдения множества правил. Она также несовместима с безумием, поскольку требует поддержания мыслительной области в состоянии полной свободы и независимости от любого взаимодействия, в котором разум мог бы реализовать креоды очень высокой коразмерности. Таким образом, формализованное (аксиоматическое) мышление может рассматриваться как игра, правила которой образуют организующий центр, кодифицируемый системой аксиом. В этом смысле формальное мышление можно рассматривать как мышление магическое, которое как после психоанализа, осознано свои организующие структуры.

Игровая деятельность, представленная себе самой, не замедлит создать бессмысленные отвлеченные структуры, семантические модели, которые реализуются только в виде своих собственных комбинаций. Таким образом, она не замедлит погрязнуть в незначительности. Хотя этот упрек и можно отнести к некоторой части современной математики, математическая деятельность человека прежде всего вдохновляется действительностью, в которой он всегда черпает новые идеи. Аксиомы арифметики, как хорошо известно, образуют неполную систему. Это удачное обстоятельство, поскольку оно позволяет надеяться, что огромное число структурно недетерминированных и неформализуемых явлений могут тем не менее описываться математическими моделями. Позволяя создавать ментальные структуры, которые все более точно воспроизводят как структуры и силы внешнего мира, так и саму структуру разума, математическая деятельность помещает себя в правильное эволюционное русло. Математика это в высшей степени важная игра, при помощи которой человек освобождается от биологических пут, давящих на его язык и мысль, и которая дает человечеству самый большой шанс выжить.

13.6 СТРУКТУРА СООБЩЕСТВ

Теперь мы предложим некоторые весьма грубые соображения о структуре сообществ людей и животных как метаболических форм. Сообщество является метаболической формой прежде всего потому, что оно переживает составляющих его индивидов. Непрерывный поток

постоянно обновляемых индивидов обеспечивает постоянство социальной формы. Непрерывное взаимодействие между членами сообщества обеспечивает устойчивость этой формы. Это взаимодействие часто может материализоваться в виде циркуляции сложности, то есть информации, во всем теле сообщества. Можно выделить два основных типа сообществ:

1. Военное сообщество. Каждый индивид занимает в нем заданное место и действует в соответствии с правилами, позволяющими сохранить как глобальную форму сообщества, так и место индивида в нем. Ясно, что общая пространственная инвариантность социального тела требует постоянного взаимодействия каждого индивида с индивидами, которые его окружают. Циркуляция информации, которую можно рассматривать как жидкость, должна быть структурно устойчивой, и чтобы этого проще всего достичь нужно заставить циркулировать *градиент*. На членах сообщества задается положительная функция u , а именно власть, равная нулю на границе, и каждый индивид принуждается действовать в зависимости от ближайшего к нему индивида на траектории градиента, имеющего большее значение u . Функция u должна иметь по крайней мере один максимум. Индивид, помещенный в точку максимума, является вождем, поскольку он может получать приказы только от самого себя. Поскольку задержки при передаче приказов могут иметь пагубный эффект для глобальной устойчивости, особенно в эпохи смуты, когда необходимы быстрые изменения поведения, функция u не может иметь другой критической точки кроме этого единственного максимума, воплощенного в вожде. Из этого следует, что такое социальное тело представляет собой шар, подчиненный монархическому управлению.

Применяя эту гипотезу можно убедиться, что большинство животных сообществ с инвариантной структурой топологически являются шарами, управляемыми по существу единственным вождем. Таковы стаи птиц, косяки рыб, стада копытных, и т.п. Следует заметить, что наличие единственного вождя не всегда очевидно. Так стая пчел руководит вовсе не царица [4]. Здесь как и в случае с миксомицетами (Slime moulds) мы сталкиваемся со сложными морфогенетическими полями.

Следует также отметить, что рассматриваемая здесь структура является простейшей. Но это не единственная структура, способствующая структурной устойчивости. Можно представить себе военное сообщество без единственного вождя или даже вообще без вождя, однако в этом случае социальное тело должно быть многообразным, имеющим по меньшей мере размерность три (чтобы иметь структурно устойчивое эргодическое поле без особенностей).

2. Текучее сообщество. Типичным примером такого сообщества можно считать тучи комаров. Каждый индивид группы перемещается случайным образом до тех пор, пока он видит всех своих сородичей в том же полупространстве. В противном случае он пытается изменить это движение так, чтобы вернуться в группу. Тут устойчивость обеспечивается через катастрофу при помощи барьера, гарантирующего прерывность поведения. В наших сообществах, однако, барьер зафиксирован, причем двояко: с одной стороны, посредством осознания индивидом моральных норм, а с другой стороны — при помощи законов и репрессивных органов сообщества. Впрочем, наши сообщества могут быть отнесены к промежуточному типу. Они не являются полностью текучими, поскольку расслоены на социальные классы, разделенные фронтами ударной волны, плохо преодолеваемыми индивидами. Имеется классическая аналогия между сообществом и индивидуальным организмом. Она состоит в том, что различие между первичным (производство), вторичным (распределение) и третичным (управление) секторами в какой-то степени напоминают три основных листика эмбриона. Но сообщество в отличие от индивида воспроизводит себя исключительно при помощи почкования (роевания). Марксизм, пытающийся объяснить структуру и эволюции сообщества только при помо-

щи экономических факторов, гомологичен метаболической теории Чайлда в эмбриологии. Обе теории страдают от одинаковых упрощений. Действительно, типичный характер социальных морфогенетических полей заключается в том, что они изменяют поведение индивидов, причем часто грубо и необратимо. Индивиды вынуждены посвящать себя целиком, вплоть до собственного существования, сохранению глобальной социальной формы, рассматриваемой как высшая ценность. В результате возникает один эффект, совершенно неизвестный в неживой природе, который имеет самые неприятные последствия в виде неустранимой общественной несправедливости.

3. Деньги. Деньги как средство обмена циркулируют в обратном направлении по отношению к товарам и услугам. Они имеют тенденцию уходить от чистых потребителей и накапливаться у чистых производителей. Но поскольку они должны двигаться в социальном теле по кругу, необходимо, чтобы какой-то искусственный механизм направлял их в обратную сторону. Такой механизм может опираться только на общественные структуры, на власть. Деньги заимствуют градиент власти ($\text{grad } u$) при помощи процесса *налогообложения*. Достигая вершины, деньги распределяются вождем, который посредством перманентной (или, по крайней мере, ежегодной) катастрофы имеет возможность управлять их распределением среди нуждающихся элементов. Эта власть, как известно, является одним из основных средств управления. Таким образом, в любом обществе градиент производства и градиент власти имеют тенденцию организовываться антагонистическим образом, чтобы реализовать более или менее устойчивый финансовый цикл (см. примечание [5]).

Такой взгляд является по сути пессимистическим, поскольку он показывает, что социальная несправедливость неустранима связана с устойчивостью общества. Лично я считаю, что единственный способ смягчить угнетение это перестать приписывать социальным формам (особенно нациям) этическую ценность. Знаменитые слова Гете: «лучше несправедливост, чем беспорядок» оправданы только в той мере, в какой беспорядок может породить еще худшую несправедливость. Но если индивиды достигли морального уровня, достаточного для того, чтобы не пользоваться в своих корыстных интересах временной слабостью власти, этой опасности можно не бояться. В этом случае, очень лабильная ситуация с размытой властью имеет все шансы перейти в режим, оптимальный для индивида.

Было бы в равной степени соблазнительно рассмотреть историю наций как последовательность катастроф между метаболическими формами. Каким примером обобщенной катастрофы мог бы послужить распад какой-нибудь великой империи, например, империи Александра Македонского. Но очевидно, что следует себя ограничить. Говоря о Человеке, можно самое большее постичь только поверхность вещей. Как сказал Гераклит: «Как бы далеко ты не зашел, ты не сможешь достичь пределов души, столь глубока ее форма».

NB. Я позволил себе в двух случаях перевести гераклитов словом «форма». Если допустить, что логос вещи, по Гераклиту, это та формальная структура, которая обеспечивает ее единство и устойчивость, то можно убедиться, что достаточно специальное употребление слова «форма» в этой работе (в смысле класса эквивалентности структурно устойчивой геометрической формы) дает вполне хорошее приближение.

13.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прежде чем приступить к заключительной дискуссии, представим здесь резюме наших тезисов.

А. Резюме тезисов

1. Любой объект или любая физическая форма могут быть представлены *аттрактором* C

некоторой динамической системы в пространстве *внутренних переменных M*.

2. Такой объект, вообще говоря, неустойчив и поэтому может быть принят во внимание только если соответствующий аттрактор *структурно устойчив*.

3. Любой случай возникновения или разрушения формы, любой морфогенез может быть описан через исчезновение аттракторов, представляющих исходные формы, и их замену (путем захвата) аттракторами, представляющими конечные формы. Эти процессы, которые мы называем *катастрофами*, могут быть заданы на пространстве *внешних переменных P*.

4. Любой структурно устойчивый морфологический процесс задается одной катастрофой или системой катастроф, структурно устойчивых в *P*.

5. Любой естественный процесс разлагается на структурно устойчивые элементы, которые мы называем *креодами*. Множество креодов и многомерный синтаксис, который определяет их относительные положения, порождает *семантическую модель*.

6. Если рассматривать креод *C* как слово этого многомерного языка, то значению этого слова будет соответствовать глобальная топология соответствующего(их) аттрактора(ов) и катастроф, которым он(и) подвергается(ются). В частности, значение данного аттрактора определяется геометрией его области существования в *P* и топологией катастроф регуляции, которые ограничивают эту область.

Из этого следует, что значение формы *C* выявляется только катастрофами, в которых эта форма возникает или разрушается. Здесь мы возвращаемся к аксиоме, дорогой сердцу лингвиста формальной школы, согласно которой значение слова — это его употребление (а также к аксиоме физиков школы «*Bootstrap*», согласно которой частица полностью определяется теми взаимодействиями, в которых она участвует.)

Теперь попытаемся подступиться к вопросу, который возникает еще до всякого обсуждения, а именно к вопросу об экспериментальной проверке.

Б. Экспериментальная проверка

Допускают ли наши модели экспериментальную проверку? Можно ли на их основе делать экспериментально проверяемые предсказания? Рискую разочаровать читателя, я вынужден ответить на этот вопрос отрицательно. В этом состоит основной недостаток любой качественной модели по сравнению с классическими количественными. Если изучаемый процесс целиком находится в креоде *C*, что может дать опыт, кроме подтверждения факта устойчивости этого креода? Если напротив, процесс включает несколько различных креодов C_1, C_2, \dots , разделенных зонами неопределенности, то процесс в целом оказывается структурно неустойчивым, и никакое индивидуальное предсказание невозможно. В этом случае можно надеяться построить модель только используя статистику морфологических явлений, представленных *множеством* процессов изучаемого типа. Этот метод используется в квантовой механике и очень часто в количественной биологии. В случае единственного креода *C* можно было также попытаться построить количественную модель на основе внутреннего анализа этого креода. Но для этого необходимо, чтобы были хорошо известны свойства субстрата. Это достигнуто только в гидродинамике, в учении об ударных волнах, которое, впрочем, тоже только частично, выводится из явных количественных моделей. В общем случае мы оказываемся в ситуации, когда не существует никакой количественной теории катастроф для динамической модели. Для построения такой количественной теории нужно было бы располагать хорошей теорией интегрирования в функциональных пространствах, которая, как мы видели в 7.3, сталкивается со значительными трудностями.

После этого признания в беспомощности строго эмпирические умы подвергнутся искушению отбросить наши модели как неинтересные спекулятивные конструкции. В том, что ка-

сается сегодняшней науки они, возможно, будут правы. Но в том, что касается более далекой перспективы, имеется по крайней мере две причины, которые должны заставить каждого ученого принять наши модели всерьез. Первая причина состоит в том, что любая *количественная модель предполагает качественное членение реальности*, изоляцию экспериментально воспроизводимой устойчивой системы. В таких широких дисциплинах как физика, химия, биология и т.д. это членение, эта таксономия опыта обычно считается данной априори. Каждый ученый пользуется этими членениями, встроенными в его аппарат восприятия, почти бессознательно, подобно Журдену, который говорил прозой, сам не подозревая об этом. Разве в этих условиях не интересно снова поставить это членение под вопрос и воссоздать его в рамках общей и абстрактной теории вместо того, чтобы слепо принимать его как непосредственную данность реальности?

Вторая причина заключается в том, что мы не знаем границ применимости количественных моделей. Значительные успехи физики девятнадцатого века, основанной на применении физических законов, могли заставить думать, что любые явления могут быть описаны при помощи аналогичных схем, что саму жизнь и мысль можно уложить в уравнения! Однако, если подумать, то становится ясным, что только немногие явления зависят от законов, которые могут быть выражены математически просто. Существует только три рода таких явлений, которые по этой причине называют фундаментальными: явление гравитации (закон Ньютона), свет и электричество (законы Максвелла). Но и эта простота кажущаяся. Она выражает только свойство, тесно связанное с геометрией пространства гравитации и электромагнетизма, и представляет собой статистический эффект, основанный на большом числе мелких изолированных и независимых явлений. Как только начинаешь спускаться вниз по квантовой лестнице, ситуация меняется. Фундаментальные факты, обеспечивающие устойчивость материи, становятся непонятными, стабильность протона оказывается необъяснимой! Квантовая механика с ее прыжком в статистику дает только слабый паллиатив взамен нашему незнанию. Более того, даже когда система управляется явными законами эволюции, многого не хватает, чтобы ее качественное поведение стало вычислимым и предсказуемым. Когда число параметров системы растет, возможности приближенных вычислений уменьшаются. Это настоящий бич размерности (или *проклятие размерности*, как выразился Р.Беллман [2]). Продавцы электронных железок хотели бы нас убедить, что с распространением компьютеров для науки и человечества начнется новая эра. В лучшем случае они могут заставить нас почувствовать, в чем состоит настоящая проблема. Она в создании моделей. После гордого восклицания Ньютона «*hypotheses non fingo (гипотез не измышляю)*» многие поверили в то что *lucky guess (счастливой догадки)* достаточно, чтобы вскрыть фундаментальные законы, лежащие в основе явлений. Этот метод обобщенного тыка, действующий без всякой опоры на интуицию, кажется, уже дал все, на что он способен. Не исключено, что наука уже подошла к пределам возможностей конечного описания. Неопишное, неформализуемое стучится в нашу дверь, и нам следует принять вызов. Необходимо найти наилучшие подходы к случайному, наилучшие описания обобщенных катастроф, нарушающих симметрию, наилучшие способы формализовать неформализуемое. Человеческий мозг с его долгим биологическим прошлым, с его умением делать приближения и тонким эстетическим чувством остается и долго еще будет оставаться незаменимым для решения этой задачи.

Вы видите, что все, о чем мы здесь говорили, является не научной теорией, а скорее методом. Построить динамические модели, совместимые с эмпирически заданной морфологией — это первый шаг в моделировании. Это также и первый шаг в понимании изучаемых явлений. С этой точки зрения наши методы, слишком неопределенные сами по себе, могут послужить *искусству* моделирования, а не дать заданную раз и навсегда стандартную технику. Можно на-

дяться, что на этой основе теоретики смогут развивать качественные модели, как это делает квантовая механика для элементарных взаимодействий. Но пока это только надежда.

В. Философский аспект

Не вызывает сомнений, что именно в философском плане наши модели представляют собой наиболее интересный вклад в науку. Они впервые дают строго монистическую модель живого существа, разрешая антиномию души и тела в рамках единой геометрической сущности. В плане биологической динамики они сводят причинность и телеологию к топологической непрерывности, понимаемой в разных смыслах. Само собой разумеется, что это требует отказа от идеи универсального механизма, от абсолютного детерминизма в духе Лапласа. Но разве этот последний взгляд не был всегда только *wishful thinking* (*благим пожеланием*)?

Наши модели связывают любой морфогенез с конфликтом, с борьбой между двумя или несколькими аттракторами. Мы обнаруживаем в этом идеи первых дософратиков Анаксимандра и Гераклита (которым уже две с половиной тысячи лет!). Этих мыслителей обвиняли в примитивной путанице, поскольку для объяснения физических явлений они употребляли слова, взятые из общественной жизни (такие как «конфликт» и «несправедливость»). И совершенно напрасно, считаем мы, поскольку их интуитивные догадки оказались абсолютно верными: *динамические ситуации, управляющие развитием природных явлений, в основном совпадают с теми, которые определяют эволюцию человека и общества*, так что использование антропоморфного словаря в физике в высшей степени оправдано (см. прим [6]). В той мере, в какой «конфликт» становится термином, выражающим строго определенную геометрическую ситуацию в данной динамической системе, нет никаких препятствий для использования этого термина для того, чтобы быстро охарактеризовать эту ситуацию на качественном уровне. Если подобным образом придать геометрический смысл терминам «информация», «сообщение», «план» (что мы и попытались сделать в наших моделях), исчезнут препятствия для использования и этих терминов. И это будет не таким уж малым достижением для современной молекулярной биологии.

Г. Эпилог

Я хотел бы убедить читателя, что нет практически ни одной области человеческого мышления, в которой геометрические модели не имели бы какого-либо применения. Несомненно, математики будут оплакивать расставание со столь точными и знакомыми количественными моделями и их замену качественными функционально-топологическими моделями, которые неизбежно более расплывчаты. Пусть они говорят, что количественные модели еще имеют блестящее будущее. Но мы видели, что они эффективны только для систем, зависящих от небольшого числа параметров, тогда как предложенные здесь качественные модели, использующие понятия морфогенетического поля и креода и связанные с особенностями множеств бифуркации функционального пространства бесконечной размерности, избегают этой трудности. Однако они, вообще говоря, дают только локальную классификацию особенностей морфогенеза. Проблема интеграции локальных моделей в устойчивую глобальную структуру (что является предметом динамической топологии), все еще остается открытой, хотя какие-то наметки для случая живого организма уже имеются.

На самом деле, нам пока не хватает важного инструмента, а именно более точного математического описания катастрофических процессов, при которых в данной дифференциальной системе некоторые аттракторы исчезают и заменяются новыми. Эта проблема имеет чисто теоретическое значение. Если физики захотят когда-нибудь получить информацию о процессах, происходящих на сверхмалых масштабах (на субквантовом уровне), они должны будут

по ходу исследования обратиться к изучению процессов, которые *имеют очень высокий уровень усиления, и в то же время достаточно хорошо контролируются*. Такого рода процессы, при которых бесконечно малые возмущения начальных условий вызывают значительные вариации конечных результатов, являются типично катастрофическими.

Возможно, биологи упрекнули меня в том, что я не формулирую свои модели в точных биохимических терминах. Хотя это действительно так, я не отрицаю важность химических ограничений, накладываемых на динамику жизни. Я только считаю, что любое ограничение, любая химическая связь может быть представлена как геометрическая связь в соответствующем пространстве. Уравнение, записанное в терминах атомов двух членов химической реакции является одним из таких ограничений, однако самым грубым. Топология биохимической кинетики и ее отношение к пространственной конфигурации макромолекул несомненно, является решающим фактором. Впрочем, *что заставляет нас думать, что формальные структуры, которые определяют жизнь как устойчивый процесс самовоспроизводства, обязательно связаны с известным нам биохимическим контекстом?*

Мне трудно сказать, представляет ли моя попытка какой-либо интерес для гуманитарных наук. Однако в ходе работы над этой книгой я убедился в следующем: в основе генотипа нашего вида, в непознаваемой глубине гераклитова *логоса* нашей души действуют структуры, симулирующие все внешние естественные силы. Эти структуры ждут своего часа и могут быть развернуты, когда в этом возникает необходимость. Старый образ человеческого микрокосма, отражающего макрокосм, сохраняет свою ценность: познавший Человека, познает и Вселенную. В этом опыте *Общей теории моделей*, я, собственно говоря, и занимался тем, что высвобождал и делал доступным сознанию предпосылки метода, которым жизнь, как представляется, пользуется с момента своего зарождения.

Несомненно, останется какое-то беспокойство, связанное с тем, что математик решился взяться за вещи, столь далекие от его обычных занятий. Значительная часть моих утверждений получена чисто умозрительным путем. Можно, конечно, считать их грезами... Я не возражаю. Разве мечта это не виртуальная катастрофа, с которой начинается знание? Когда столько ученых занимаются расчетами мироздания, разве будет плохо, если те, кто на это способен, будут мечтать?

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. МОДЕЛЬ ПАМЯТИ

Для моделирования памяти мы предлагаем следующую структуру:

1. Динамика, представляющая сознание или психику, которую мы обозначим (P, ψ) ; эта динамика является относительно медленной.
2. Вспомогательная быстрая динамика (M, X) .
3. Слабая связь между этими двумя динамиками, которая осуществляется с помощью третьей системы (Q, X) представляющей собой произведение N линейных осцилляторов с одинаковым периодом. Конфигурационное пространство Q представляет собой тор T^N размерности N . Постоянное параллельное поле в Q структурно неустойчиво. Оно эволюционирует под действием резонанса к структурно устойчивой ситуации, характеризующейся присутствием притягивающих циклов. Однако между несколькими возможными резонансами, соответствующими различным биохимическим состояниям нейронов, может возникнуть конкуренция. Можно для определенности также предположить, что возможные резонансы параметризуются точками множества J на торе разностей фаз T^N , который, вообще говоря, зависит от предшествующей истории индивида. Например, можно допустить, что J имеет структуру дерева с последовательными бифуркациями, в котором конечные точки ветвей соответствуют каталогизиро-

ванным воспоминаниям. Если система Q находится в устойчивом режиме, соответствующем такой конечной точке s , то между (P, ψ) и (M, X) возникает слабая связь, в результате которой в P появляется среднее поле связи. Единственный аттрактор этого среднего поля захватывает динамику ψ , которая вызывает воспоминание, соответствующее s . Внутренняя эволюция динамики Q в свою очередь регулируется вторичной связью с (P, ψ) . Когда психическое состояние делает воспоминание необходимым, система Q становится неустойчивой. Представляющая точка в J возвращается к основанию дерева и затем движется по направлению к конечной точке. При каждой бифуркации на дереве J в игру вступают два фактора: (1) связь с (P, ψ) , которая может повлиять на выбор того или иного направления, и (2) локальная химическая память, которая определяет переменную вероятность каждой ветви соответствующей бифуркации.

Весьма вероятно, что структура дерева J не является раз и навсегда заданной. Она зависит от генетических особенностей и истории жизни индивида. Кроме того, конечные точки соответствуют только очень малой части всех возможных связей между средними полями с устойчивыми аттракторами. В этом смысле можно сказать, что наш мозг содержит не только те воспоминания, которые у нас действительно есть, но также в виртуальной форме и все те воспоминания, которые мы могли бы иметь, но которых никогда иметь не будем.

Механизм приобретения воспоминаний. Каждое разветвление дерева J может быть представлено своим осциллятором D , который имеет три возможных состояния: неопределенное возбужденное состояние и два устойчивых режима a , b , соответствующих ветвям дерева J , исходящим из соответствующей точки. Эти устойчивые режимы синтезирует в возбужденных нейронах вещества (РНК?) ta , tb соответственно, которые катализируют возвращение этих режимов. Однако активный синтез этих веществ и их накопление в нейронах происходит только после угасания возбуждения D . Допустим, что воспоминание s вызывает в организме рефлекс $r(s)$. Этот рефлекс $r(s)$ может иметь для организма приятные или болезненные последствия. Если результат оказывается болезненным, он вызывает в Q общее возбуждение локальных осцилляторов D , в результате чего блокируется синтез веществ, определяющих выбор, и от ранее сделанного выбора не остается практически никакого химического следа. Если эффект, напротив, оказывается благоприятным, происходит угасание возбуждения локальных осцилляторов D , и в соответствии с предшествующим выбором синтезируются вещества ta и tb . Можно также допустить, что волна страдания в Q способствует синтезу веществ, препятствующих возвращению соответствующего режима.

Существует такой любопытный и хорошо известный феномен как моментальная потеря памяти. Его можно истолковать двояким образом. Можно считать, что динамика не может достичь избранной конечной цели, потому что в одном из разветвлений J этому препятствует локальная химическая память. Это будет соответствовать фрейдистской интерпретации, согласно которой мы забываем воспоминания, связанные с неприятными ощущениями. Можно также предположить, что динамика Q достигает конечного состояния, которое, однако, не является точечным, так что достигнутая цель оказывается несколько в стороне от требуемой. В результате возникает взаимодействие, которое в достаточной степени возбуждает общую структуру бифуркаций среднего поля, но в результате вспомогательных возмущений горизонтальная составляющая Y не порождает никакого притягивающего цикла. Воспоминания виртуально присутствуют в памяти, и не хватает только поля, которое бы их возбудило. В этом случае, чтобы оживить память лучше всего возобновить поиск с самого начала, желательно после некоторого промежутка времени.

Независимо от своих достоинств и недостатков эта модель показывает, что не стоит на-

деяться строго локализовать воспоминания, связывая их пространственно со специфическими нейронами или химически с определенными веществами.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГРАММАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. Мышление и язык. Связь языка и мышления по-прежнему вызывает острые дискуссии среди философов, психологов и лингвистов. Возможно ли мышление без языка? Мне кажется, что здесь, как и в случае многих других философских проблем, ответ в первую очередь зависит от терминологии. Очень сложно отрицать, что высшие животные обладают определенными формами мышления. Понаблюдайте за кошкой, преследующей добычу. Как она рассчитывает размах и направление совершаемых прыжков, с какой скоростью и восхитительной точностью она разрешает проблемы механики, которые хороший лицеист не решит и за четыре часа вычислений! Можно подумать, что в данном случае речь идет о бессознательном мышлении, об инстинкте. Однако никакой анатомический или физиологический критерий не позволяет отличить деятельность мозга кошки, рассчитывающей свой прыжок, от аналогичной деятельности мозга человека. Так или иначе задачи механики должны быть решены, сознательно или бессознательно. Это убеждает меня в том, что до возникновения понятийного мышления существовало и существует доньше *пространственное мышление*, которое осуществляет контроль за всеми нашими перемещениями в пространстве. Такой контроль требует, чтобы внешнее пространство механики было представлено в мозге, сознательно или бессознательно. Действительно, как мы уже говорили, жизнь невозможно помыслить без внутреннего представления окружающего пространства, при том что борьба за пространство является одной из первичных форм биологического взаимодействия (см. Прим. [7]).

При таких условиях в качестве рабочей гипотезы кажется естественным допустить, что *понятийное мышление человека производно от его пространственного мышления*. Действительно, какова первичная функция языка? Если исключить проблему пения (которое имеет своей целью обозначение территории или привлечение любовного партнера), то первичная функция языка состоит в том, чтобы сообщать в форме, доступной нашим органам чувств, о феноменологических катастрофах внешнего мира, особенно о тех, которые важны для безопасности индивида или социальной группы. Естественно, что *форма предложения, то есть сообщения, имеющего самостоятельное значение, наследует структуру внешней катастрофы, на которую оно указывает*. Несмотря на то, что многие психологи несогласны с такой точкой зрения, мы в соответствии с моделью Зеэмана [1] допускаем, что у человека существует доречевое мышление, описываемое последовательностью аттракторов нейронной динамики. Такое мышление можно представить с помощью семантической модели K очень большой размерности. В каждый момент времени психическое состояние определяет общее поле, которое реализует семантическую модель F . Речь L это, очевидно, одномерная семантическая подмодель модели F . Существует каноническое отображение q полного мышления K в язык L , которое символизирует отношение кодировки между обозначаемым K и означающим L .

Б. Основной принцип

Наша основная гипотеза состоит в следующем: отображение q , уменьшающее размерность семантической модели N на единицу, локально факторизуется семантической моделью Y полной размерности четыре, что является размерностью нашего пространства-времени. Иначе говоря, любой креод модели K , то есть любая мысль, прежде чем быть сформулированной в языке L , должна принять пространственно-временную форму размерности четыре. (см.

прим. 8).

Было бы грубой ошибкой интерпретировать этот постулат в том смысле, что любая мысль прежде чем быть выраженной должна быть локализована в обычном пространстве-времени. Пространство \mathbf{R}^4 , которое является базой семантической модели, вообще говоря, может быть совершенно отличным от нашего мысленного представления о галилеевом пространстве \mathbf{R}^4 . Действительно, галилеева группа в U не действует, и, кроме того, как мы покажем далее, базовое пространство U само может быть переменным. Согласно замечанию Дж.Гринберга из его классической статьи [3], практически в каждом языке предложение может начинаться с обозначения места или времени, в котором происходит данное событие. Это показывает, что пространственно-временная локализация события не влияет на внутреннюю структуру этого события и не меняет внутреннюю топологию значения. Это очевидный семантический аналог галилеева принципа относительности!

Приняв этот постулат, вернемся к списку элементарных катастроф на \mathbf{R}^4 из главы 5. Интерпретируя локально устойчивые режимы как объекты, мы можем на качественном уровне семантически интерпретировать катастрофы, отталкиваясь от обыденного языка. Рассматривая внешние координаты как чисто пространственные, мы интерпретируем катастрофы через существительные. Если вводится время, оно интерпретируется глаголами.

Варьируя положение временной координаты (и направление стрелы времени по отношению к множеству бифуркации), мы можем получить много различных интерпретаций. Говоря более общо, в универсальной развертке всякой катастрофы полезно рассмотреть плоские сечения размерности один или два. Таким образом получается то, что я считаю *универсальной структурной таблицей*, которая содержит все типы элементарных предложений, т.е. носителей самостоятельного значения, не разложимых на более мелкие единицы с теми же свойствами. Чтобы получить эту таблицу, нужно взять универсальные развертки катастроф на \mathbf{R}^4 , выбрать в \mathbf{R}^4 плоское сечение T (размерности один или самое большее два), а затем линейно спроецировать это сечение на ось времени. Таким образом, получится семантическая модель размерности один, которая будет символизировать организацию предложения.

V. Основные структуры предложения

Прежде, чем мы приведем список элементарных предложений, сделаем два дополнительных замечания:

1. Обилие семантических интерпретаций, взятых из словаря портных, может вызвать удивление: складка, сборка, разрез, карман, и т.п. Однако поскольку шитье остается традиционным женским делом, можно считать, что изготовление одежды является последней эмбриологической стадией.

2. Многие плоские сечения T не порождают никаких структур предложений. Так, например, сечение ласточкина хвоста на рис. 13-2 порождает модель типа приведенной на стр. (333 оригинала). Устойчивый режим обречен на исчезновение, но прежде чем исчезнуть он как бы в судорогах агонии совершает скачок в метаустойчивый режим, имеющий не лучшее будущее. Понятно, что жизнь не проявляет особого интереса к таким явлениям. Поэтому он и не имеет грамматической реализации.

Вот наш список:

1. Предложения с организующим центром типа $V=x^2$. Речь идет о предложениях, выражающих состояние. Примеры: *Идет дождь; Небо голубое* (последний пример имеет более сложную внутреннюю структуру).

2. Предложения типа складки (выражающие начало или конец). Примеры: *День заканчивается; Пьер умирает; Начинается дождь*.

В любом таком случае глагол грамматически нейтрален, или по терминологии Л.Теньера

[4], одновалентен. Организующий центр представляет собой складку $V=x^3$.

3. Предложения, связанные со сборкой Риманна-Гюгоньо $V=x^4$.

В соответствии с направлением сечения T имеется два типа таких предложений: предложения, выражающие изменение: *Небо темнеет*

и предложения, выражающие захват или порождение: *Ева ест яблоко*.

По поводу всех этих примеров см. в таблицу на стр.(332 оригинала).

Этот последний тип имеет фундаментальное значение. Устойчивый режим, который торжествует над катастрофой и охватывает ее от начала до конца, это всегда грамматическое подлежащее (субъект). То, что захватывается или порождается - это дополнение (объект). Глагол в активном залоге представлен точкой соединения. Понятно, что не всякое действие обязательно вызывает уничтожение или создание своего объекта. Но создание и разрушение это типичные действия, структурная форма которых является притягивающей и которая захватывает выражения других действий с менее сложной геометрией. Мы находим здесь предложения, имеющие тричную форму ПСД (подлежащее - сказуемое - дополнение). По поводу порядка этих элементов в устном предложении, который является существенным для типологии языка, см. приложение [3].

Ласточкин хвост не дает элементов нового типа (несвязанных графов или конфликта между двумя режимами, оба из которых исчезают), и мы переходим к особенности Si^5 «карман» или «бабочка». Рассмотрим развернутую ударную волну, связанную с этой особенностью. Если ее разрезать плоскостью T (рис. 13-3), в сечении получится плоская фигура, изображенная на рис. 13-4. Соответствующие устойчивые режимы описываются рис. 13-5.

Семантическая интерпретация геологического понятия провала очевидна. Устойчивый режим D в определенный момент раскалывается и испускает вторичный режим C , который захватывается третьим устойчивым режимом F . Эта общая схема (рис. 13-6) характеризует все глаголы типа «давать»: D *дает* C F -у (трехвалентные глаголы по Теньеру). Можно подумать, что получатель F , для которого катастрофа наиболее выгодна, должен стать грамматическим подлежащим. Он им действительно становится при замене *давать* на *получать*: F *получает* C *от* D и D *дает* C F -у практически эквивалентны. Но, говоря очень обобщенно, подлежащее (субъект) - это скорее дающий, чем получающий. В жестоком мире архетипов чаще дают по голове или дают яд (в немецком языке слово *Gift* «яд» происходит от *geben* раскалывается «давать»), чем подарки, полезные ближнему.

Если верить Л. Теньеру, четырехвалентных глаголов не бывает. Согласно нашей схеме, эллиптическая и гиперболическая омбилики, которые запускают только устойчивые режимы, не могут породить никакого конфликта, а следовательно, и катастрофы, однако с параболической омбиликой, описывающей конфликт четырех устойчивых аттракторов, дело обстоит иначе. Действительно, если сравнить две фразы F *получает* C *от* D и D *берет* C *у* F , то геометрия катастроф в обоих случаях будет в основном одинаковой. Но динамический задний план (то, что некоторые лингвисты называют «интенциональностью») в этих двух случаях весьма различен. Поскольку фраза F *берет* C *у* D предполагает, что D сопротивляется действию F -а, организующий центр катастрофы является более сложным. Именно параболическая омбилика дает самую простую и точную модель этой ситуации. Для реализации своего замысла F должен удвоиться, то есть как бы раскрыть рот, чтобы затем разделить или разорвать комплекс C - D на две части, отделить C от D , а затем захватить C . Эта модель требует четвертого элемента, а именно инструмента, которым действует субъект. Действительно, многие глаголы вроде *брать*, *выманывать*, *отрывать*, *извлекать* допускают или требуют использования творительного падежа. Примеры: *Кошка вырвала когтями перо у птицы; Он отрубил ему голову ударом саб-*

ли.

Есть также основания утверждать, что в ситуациях борьбы требуется, по крайней мере, зачаток глагольной четырехвалентной схемы [Примечание 9]. Мы видим, что приведенные элементарные схемы дают почти все падежи склонений классических языков: *именительный* (эргатив), *винительный* (падеж объекта), *дательный* (адресат), *инструментальный* (творительный). Не хватает *местного* (предложного) падежа, *звательного* и *родительного*. Случай звательного падежа особый, поскольку здесь речь идет об изолированном слове, не имеющем практически никакой структурной связи с остальным предложением. Этот падеж имеет чисто операциональное употребление и служит для маркировки начала сообщения с целью возбуждения внимания адресата, как телефонное «алло». Местный падеж указывает на пространственное расположение и поэтому не входит достаточно глубоко в структуру значения. Заметим, что в латыни, как и в немецком языке, название места, куда направляются, употребляется в винительном падеже, а место, которое покидают — в инструментальном (то есть в аблативе и дативе соответственно). Это вполне естественно, поскольку, в мире архетипов к объекту всегда движутся, чтобы его разрушить или захватить, а находятся в объекте, чтобы использовать его как щит или укрытие. Остается проинтерпретировать родительный падеж — самый интересный и в то же время самый трудный случай, поскольку он затрагивает наиболее тонкие структуры разума.

Г. Глагольный спектр существительного

То, что обычно называется понятием, в нашей модели интерпретируется как система структурно устойчивых аттракторов S нейронной динамики M, X . Эта динамика допускает большое число приближенных первых интегралов, которые можно представить отображениями $p: M \Rightarrow P$ где пространство P разлагается на произведение вида $P=V A \mathbf{R}^4$

Сомножитель V является самым важным. Он является основой всех действий. Пространство A поддерживает поле чувств, то есть ощущаемых свойств. \mathbf{R}^4 - это наше мысленное представление внешнего механического мира.

Рассматриваемая система S имеет в пространстве P область определения D . Эта связанная область D , в общем случае стабилизирована такими гиперповерхностями обрушения, что если представляющая точка попадает на такую гиперплоскость, то в P возникает среднее поле взаимодействия, которое вносит представляющую точку внутрь области D). (Эти корректирующие структуры могут, однако, не действовать вдоль определенных координат в A или в \mathbf{R}^4 .) Таким образом, понятие задано своей областью определения D и множеством корректирующих устройств, которые образуют структуру регуляции, подобную той, которая имеется у живых существ. Множество катастроф регуляции, ограничивающих область определения, образует глагольный спектр рассматриваемого понятия S . Другие устойчивые режимы, конкурирующие с S в катастрофах глагольного спектра, называются сопутствующими понятиями понятия S .

Например, глагольный спектр слова *человек* содержит все жизненно важные виды деятельности (есть, пить, спать, дышать и т.п.), все виды двигательной активности (шагать, прыгать, бить и т.п.) и все виды умственной деятельности (думать, говорить и т.п.). Глагольный спектр неодушевленного предмета, например, камня, может только сопутствовать катастрофам живых существ или же указывать на отношения включения и соседства, связанные с пространственной локализацией.

Однако требование структурной устойчивости, которому должна удовлетворять фигура регуляции, накладывает существенные ограничения на формирование понятий. Необходимо, чтобы, по крайней мере, в начале, эти фигуры были изоморфны фигуре глобальной регуляции

нашей биологической структуры, или точнее, ее мысленному образу. Дело здесь не столько во внутренней динамической потребности, а в том, что первыми узнаваемыми объектами в нашем мире были животные – те, которые становились добычей человека, и те, для которых человек сам становился добычей. Подобно тому как фигуру биологической регуляции можно считать (по крайней мере локально) прямым производением сомножителей, связанных с основными физиологическими функциями, так и устойчивость понятий можно разложить на произведение независимых или слабо взаимодействующих факторов:

$$V=V_1 V_2 V_k$$

Это разложение работает в случае сложных понятий. С каждым из сомножителей V_i связано свое абстрактное понятие. Чем более абстрактно понятие, тем уже его глагольный спектр. В пределе мы получаем понятие, глагольный спектр которого содержит единственную катастрофу. Так, слово *дар* канонически связано с катастрофой типа *давать*. Область определения дара это отрезок C , находящийся на рис. 13-6 между точками выхода и приема. С этой точки зрения было бы ошибочно считать, что умственное развитие человечества идет от конкретного к абстрактному.

Человеческий разум всегда знал универсальные абстрактные конфигурации, а именно функциональные поля, связанные с элементарными катастрофами (разбивать, колоть, рвать, отделять и т.д.). Я склонен считать, что первые членораздельные слова, произнесенные людьми, были глаголами (повелительного наклонения подобные крикам тревоги у животных). Существительные появились позднее в процессе стабилизации. Такие языки как *калиспель* или *нутка* у индейцев штата Вашингтон (США), в которых различие между глаголом и существительным не выражено грамматически, свидетельствуют о гибком, почти мезэнхиматозном состоянии структуры мышления подобном состоянию конечности у зародыша, когда кости и мышцы еще не дифференцированы. С глагольным происхождением существительных, возможно, связана также категория рода, которая столь часто встречается в языках, хотя на первый взгляд кажется совершенно ненужной. Род существительного C по сути отражает динамическую природу катастрофы, которая порождает данное слово и место C в качестве устойчивого режима в схеме этой катастрофы. В согласии с очевидной символической в катастрофе дара мужской род указывает на дающего, а женский – на получателя. Средний род резервируется за инструментом в четырехвалентной катастрофе. Языковед А.Мейе как-то заметил, что рука (женский род) получает, а нога (во французском – мужской род) дает. Кулак в латыни (*pugnum*) среднего рода. В языке североамериканских индейцев хопи имеется особый род для обозначения длинных объектов в противовес круглым. В этом противопоставлении, несомненно, следует видеть предполагаемое проявление эллиптической омбилики в катастрофе, порождающей слово.

Различие между глаголом и существительным, столь темное уже на этой стадии, дополнительно осложняется явлением *перехода* (в смысле Теньера [4]), которую мы опишем ниже. Эта процедура позволяет преобразовать любой глагол в существительное. Так слово *дар* во французском (*don*) обозначает как акт дарения, так и сам предмет дарения. Существует два различных процесса, в которых глагольная катастрофа может породить существительное: это, во-первых, связывание посредством выделения наиболее интересного элемента действия, как в случае английского глагола *to fish* (ловить рыбу) и существительного *fish* (рыба), и во-вторых, это переход.

Д. Отношение родительного падежа

Как интерпретируется в нашей модели отношение, выражаемое родительным падежом

(генетивом)? Выражение вида $X Y$ -а (икс игрека), где X и Y - это два существительных, имеет смысл только если Y является понятием, сопутствующим X . Глагольный спектр X содержит катастрофу v , которая допускает одновременно X и Y в качестве устойчивых режимов, положения которых заранее определены глагольными спектрами X и Y . В некоторый момент осциллятор X испытывает катаболическую катастрофу, которая уменьшает его область определения в V , возбуждая при этом весь структурно устойчивый комплекс X, v, Y . Добавление к X существительного в родительном падеже выразится через динамическое ограничение, которое уменьшает область определения X и уточняет его экстенционал. Естественно, что словесный спектр комплекса при этом тоже меняется (а именно, расширяется). Это описание, однако, необходимо уточнить, поскольку оно не объясняет существенную асимметрию отношения X к Y : если Y сопутствует X , то X участвует в катастрофе, которая порождает Y , и значит X в свою очередь сопутствует Y . На самом деле следует ввести следующее различие. Понятие C нужно рассматривать как структурно устойчивую конфигурацию нейронной динамики (M, X), кото-

Название особенностей	Организирующий центр	Универсальная развертка
Простой минимум	$V=x^2$	$V=x^2$
Складка	$V=x^3$	$V+x^3+ux$
Сборка (катастрофа Риманна-Гюгоньо)	$V=x^4$	$V=x^4+ux^2+vx$
Ласточкин хвост	$V=x^5$	$V+x^5+ux^3+vx^2+wx$
Бабочка	$V=x^6$	$V=x^6+ux^4+vx^3+wx^2+tx$
Гиперболическая омбилика	$V=x^3+y^3$	$V=x^3+y^3+wxy-ux-vy$
Эллиптическая омбилика	$V+x^3-3xy^2$	$V=x^3+3xy^2+w(x^2+y^2)ux-vy$
Параболическая омбилика	$V+x^2y+y^4$	$V=x^3+3xy^2+w(x^2+y^2)ux-vy$

рая может иметь множество аттракторов (это необходимо, чтобы получить поля обрушения в пространстве P приближенных первых интегралов). Это значит, что *понятие может находиться в различных возбужденных состояниях*. Как и любая динамическая система понятие имеет нормальное состояние, что-то вроде *ground form* (главной формы). Область определения этой главной формы и корректирующие катастрофы, которые ее ограничивают, полностью определяют значение понятия (см. приложение к главе 1 о понятии объекта). Сопутствующие поня-

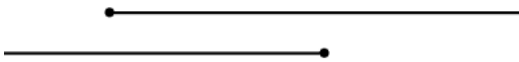


Рис. 13-4.

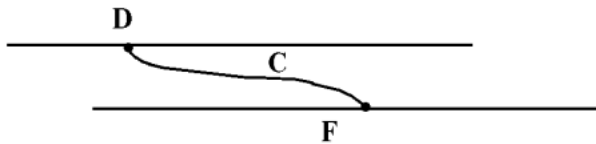


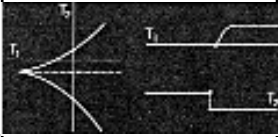

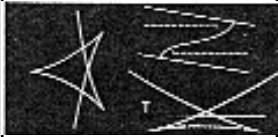





Рис. 13-5.

тия, порождаемые на границе этой главной формы, будут по определению *существенными спутниками* понятия X . Однако понятие C может переходить в возбужденные обрушивающиеся состояния, при которых его область определения выходит далеко за пределы главной формы. Эти возбужденные состояния ограничиваются корректирующими состояниями, порождающими сопутствующие понятия, которые можно называть *несущественными спутниками*.

Замечательные сечения	Пространственная интерпретация (существительные)	Временная интерпретация (глаголы)	
		Направление разрушения	Направление созидания
	бытие, объект	быть, длиться	
	граница, край	конец, кончаться	начало, начинаться
	провал (геолог.)	схватывать изменяться- разламывать	порождать становиться соединять
	трещина, угол	разрывать раскалывать	сшивать
	карман, чешуя	шелушить разворачивать наполнять (карман)	давать принимать опустошать (карман)
	гребень (волны) свод	разбивать(волну) обрушиваться	покрывать
	игла, острие, волос	прокалывать проникать	затыкать (дыру) уничтожать
	струя (воды) гриб рот	разбивать (струю) извергать, бросать пронизывать резать, щипать брать	связывать открывать, закрывать (рот)

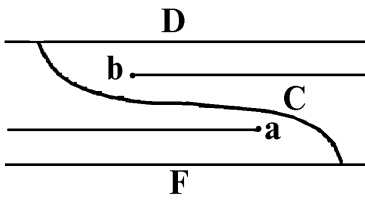


Рис. 13-6.

Наше основное соображение состоит в следующем: если выражение $X Y$ -а имеет смысл, то Y является существенным спутником для X , однако для той же катастрофы X может быть несущественным спутником для Y .

Рассмотрим точку w , расположенную на границе главной формы X , и понятие-спутник Y , конструирующее с X в этой точке. Чтобы граница главной формы была структурно устойчива в окрестности w , необходимо, чтобы небольшие случайные

деформации системы Y компенсировались соответствующими деформациями X , которые сохраняли бы в этой окрестности динамическое равновесие. Пусть P_X и P_Y - пространства средних состояний систем X и Y , а H - множество точек произведения $P_X \times P_Y$ (гиперповерхность), которое определяет локальное равновесие. Легко видеть, что если все эти пространства являются дифференцируемыми многообразиями, то вышеуказанное условие может быть выполнено только если проекция $\pi: H \rightarrow P_Y$ является погружением, и если проекция $H \rightarrow P_X$ имеет такое сечение j , что композиция $\pi \circ j$ также является погружением. Следовательно, если Y это существенный спутник X , то катастрофы конфликта между X и Y , ограничивающие главную форму X , порождаются локальными погружениями $h: P_X \rightarrow P_Y$.

Психологический механизм, придающий значение выражению $X Y$ -а, состоит в следующем: разум сначала выбирает для X существенный спутник U , а затем специфицирует U в соответствии с Y . Например, в выражении *собака Павла* X =собака, Y = Павел, вспомогательное понятие U : U =человек, ограничивающее отношение $V: U$ (это) хозяин X . Это отношение имеет богатый и сложный глагольный спектр: *У кормит X, У командует X-ом* и т.д. и т.п. Динамически отношение U хозяин X выражается погружением (или системой погружений) $h: P_X \rightarrow P_U$. Спецификация U по Y осуществляется посредством ведения на P_U вторичной фигуры регуляции R_U , выделяющей Павла среди всех людей (такой фигурой может быть, например, пространственно-временная локализация Павла; собственное имя человека это ни что иное как его пространственно-временная локализация, но поскольку люди подвижны, приходится фиксировать эту локализацию в самой замечательной точке человеческого существования, а именно в точке катастрофы рождения.) *Собака Павла* это трансверсальное сечение фигуры регуляции X прообразом $h^{-1}(R_U)$. Из того факта, что есть собаки без хозяев, можно сделать вывод, что понятие *быть хозяином* не является существенным спутником идеи собаки. Как и во всех семантических вопросах, здесь все зависит от деталей, и значение часто определяется неточно.

Примеры родительного падежа. Отношение X к Y часто оказывается нечетким в пределах одного и того же глагольного поля. Например, *подарок Ивана* может с одинаковым успехом означать как подарок, врученный Ивану, так и подарок, полученный от Ивана (ср. латинское выражение *Metus hostium*², в котором возникает такая же двусмысленность). Парижский поезд может означать как поезд на Париж, так и поезд из Парижа. В других случаях двусмысленность появляется в результате изменения глагольной связки. Например, *девочка Виктора* может быть как дочерью Виктора, так и любовницей Виктора. Это значит, что русское слово *девочка*³ колеблется между двумя этими понятиями.

Девушка из этого дома означает девушку, которая живет в этом доме. В выражении *лошадь из дерева* динамические ограничения разрушают квазицельность глагольного спектра значения: деревянная лошадь это уже не лошадь. В подобных случаях выражения имеют тенденцию становиться автономными, так что родительный падеж перестает ощущаться.

Итерация родительного падежа. Допустим, что выражение $X Y$ -а имеет смысл. Тогда ес-

ли Z существенный спутник Y , то можно в принципе составить выражение $X(Y-a Z-a)$, и так далее. Однако не похоже, что можно составить цепь из четырех-пяти родительных без потери понятности выражения⁴. Это явление, которое формальная лингвистика не в силах объяснить, возможно, доказывает четырехмерный характер любой простой фразы.

Прилагательное. Пространство ощущений A разлагается в прямую сумму пространств $A_1 A_2 \dots A_n$, каждое из которых связано со своим чувством: визуальное поле, аудиополе, тактильное поле и т.д. Например, ощущения цвета образуют, согласно теории Шредингера, векторное пространство A_1 размерности три (для дальтоников - размерности два). В каждом из этих пространств имеется статическое поле, аттракторы которого обозначают ощущаемые качества, называемые по имени. Теория прилагательного имеет тот же формальный облик, что и теория родительного падежа. Когда я говорю *синее небо*, аттрактор X , связанный с понятием неба, подвергается спецификации, определяемой следующим образом. Пусть q это каноническая проекция R на пространство цветов A_1 , в котором синий цвет задан фигурой регуляции R_0 . Тогда синее небо задается в X сечением $q^{-1}(R_0)$. В данном случае q будет погружением, и выражение будет иметь единственное значение. Но произнося выражение *синяя лягушка*, я буду испытывать некоторое неудобство, поскольку я знаю, что лягушки бывают зеленые или желтые. Строго говоря, $q^{-1}(R_0)$ определяет на понятии *лягушка* пустое множество. Можно придать этому выражению значение, которое будет соответствовать «возбужденному» понятию лягушки, например, предполагая, что лягушка покрашена в синий цвет, или что ее рассматривают при особом освещении.

Атрибутивное предложение типа *небо синее*, требует более сложной теории. Хотя выражения *синее небо* и *небо синее* имеют с точки зрения ощущения одно и то же значение, они порождают принципиально различные психологические ситуации. Предложение *небо синее* несомненно следует считать инверсией перехода (переноса), отображающего *небо* (неопределенного цвета) на *синее небо*.

Аттрактор X , который определяет небо, в принципе должен быть инвариантным в R относительно параллельных переносов пространства цветов A_1 . Однако такая ситуация оказывается структурно неустойчивой, и эта инвариантность вырождается, порождая смутный и гибкий аттрактор, который обозначает тот приблизительный цвет, который вы видите, когда слышите слово *небо*. Такая стабилизация относится к явлению, которое Теньер [4] называет переходом.

Е. Переход

Рассмотрим предложение *Иван считает, что день заканчивается*. Оно содержит два вложенных предложения: предложение типа ПС *день заканчивается* оказывается в положении дополнения в главном предложении типа ПСД: *Иван считает, что...*. Чтобы проинтерпретировать это явление динамически, следует вспомнить процесс стабилизации порогов, описанный в 10.4. Кинетическая ситуация, характеризуемая борьбой между двумя режимами (здесь это день и ночь), может быть стабилизирована. Допустим, что этот конфликт описывается сборкой Римана-Пугоньо. Организующий центр устанавливается с помощью координаты u , которая позволяет разогнуть сборку. В заданной таким образом плоскости разглаживание ударных волн и смещение устойчивых режимов приводит к возникновению статического поля, в котором O оказывается аттрактором со стороны отрицательных u , как это изображено на рис. 10. Это статическое поле определяет катастрофу, соответствующую понятию *конец (дня) или начало (ночи)*.

Такой механизм может быть в принципе применен к любому глаголу, что ведет к образованию субстантивированной формы глагола, а именно инфинитива. Каждое действие соответ-

ствует одной из элементарных катастроф в \mathbf{R}^4 . Организующий центр катастрофы восстанавливается и становится притягивающей точкой статического поля, символизирующего действие. Устойчивые режимы элементарной катастрофы становятся существенными спутниками статического режима, связанного с данным действием. При этом повторяется ситуация, описанная для случая родительного падежа: конец дня это субстантивированная форма фразы *день заканчивается*. Мы видим, что внутренняя координата режима «конец» (координата v) является внешней координатой катастрофы аттрактора, символизирующего день. При повторной субстантивации фразы *Иван считает, что день заканчивается* мы получим *мнение Ивана по поводу конца дня*. Поскольку при каждом родительном падеже необходимо вводить новую координату, легко объяснить потерю понятности фразы при слишком длинной последовательности родительных падежей.

Представляется правдоподобным, что такой переход всегда происходит в направлении стабилизации с заменой метаболического поля статическим. Мы видели, что всегда возможна субстантивация глагола (благодаря инфинитиву); достаточно часто происходит также субстантивация прилагательных (ср. *синева*). Промежуточный этап субстантивации глагола состоит в переходе глагола в прилагательное в форме причастия. В этих случаях речь идет о возникновении универсального устойчивого режима на одной из ветвей схемы глагольной катастрофы. Обратный переход встречается гораздо реже или не встречается вовсе. Переход существительного в прилагательное, например, существительного *роза* в прилагательное *розовый* легко объясняется феноменом захвата. В трехмерном пространстве цветов роза занимает пространство, в котором у нее практически нет конкурентов. Поэтому она становится аттрактором и дает свое имя соответствующему бассейну. Для более распространенных цветов, таких как серый или синий, этот механизм не работает (однако продолжает работать для оттенков цветов: ср. *небесно-синий, болотный зеленый*). Обратный переход существительное \Rightarrow глагол может происходить только при помощи глагола *быть*: *это (есть) конец дня* практически эквивалентно *день заканчивается*. Этот пример показывает, что глагол *быть* гораздо менее статичен, чем обычно считают. Он имеет операциональную силу и заставляет взрываться существительные, образованные из глаголов (в нашем примере – выталкивая представляющую точку на $v=0$ за организующий центр к положительным u). В атрибутивных фразах типа *небо (есть) синее* этот глагол действует аналогично.

Переход и гаметогенез. Переход, кристаллизующий в статическом поле сложную кинетическую катастрофу и восстанавливающий ее организующий центр, в малых масштабах аналогичен динамике гаметогенеза. Именно наличие этой функции существенным образом отличает человека от животных. Конечно, у животных многие эпигенетические и функциональные поля проходят стабилизацию порогов и порождают вторичные поля, подготовленные этими порогом. Но человек обладает универсальным устройством, которое способно восстанавливать организующий центр в поле нейронных динамик. Мыслительная гонада это устройство, концентрирующее эти поля в словах, подлинных семенах идей. Оказавшись в подходящем контексте слово прорастает и распускается в уме слушателя. Воспроизведенная таким образом глобальная форма это мысль. Таким образом, понятийное мышление это сплошная эмбриология. Систематически используя этот процесс люди формализуют свое мышление, создавая пустые, чисто операциональные слова типа *и, или, от* и т.п. Возникает грамматика, логические метаязыки и математика. Именно тогда, когда человек почувствовал необходимость гово-

¹ В оригинале - *translation*. Как будет ясно из дальнейшего, речь идет о субстантивации, см. пункт (E) - прим. ред.

ритель, чтобы ничего не сказать, становится возможен решительный прогресс в организации мышления. Классическая эпоха изобилует такими открытиями.

Ж. Происхождение письма

Восстановление в мысли организующих центров элементарных полей может быть вполне естественно перенесена на функциональные поля руки. Внешние переменные элементарных катастроф реализуются в пространственных координатах. Чем является стилизация действия, как не возвратом к организующему центру этого действия? В той мере, в какой сборка Риманна-Пюгоньо оказывается концептуально стабилизированной при помощи понятия деления или отделения, можно реализовать эту катастрофу, рисуя на глине острием символ \angle . Символ \wedge , как и предыдущий, является древней китайской идеограммой, обозначающей войти, проникать, в которой несомненно стоит видеть стилизацию эллиптического омбилика. Доминирование на Западе устной речи привело к слоговой или алфавитной кодификации, при которой означающее грубо переносится на означаемое.

В заключение повторим, что анализ грамматических структур языка требует совместно применения методов алгебры, динамики и биологии. Не претендуя на окончательное решение этой проблемы, сложность которой трудно переоценить, я надеюсь, что наши соображения дадут многочисленным специалистам некоторые частичные ответы. См. Примечания [10] и [11].

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ТИПОЛОГИЯ ЯЗЫКА

Типология языка определяется тремя элементами, см. [3]:

1. относительным порядком родительного падежа Р и управляющего им имени И. Возможны два порядка: РИ (*Колин дом*) и ИР (*Дом Коли*).
2. Относительным порядком имени И и определяющего его прилагательного Пр. Возможны два порядка ИПр и ПрИ.
3. Порядком трех элементов ПСД – Подлежащего, Сказуемого, Дополнения в глагольной фразе типа 3. Почти во всех языках подлежащее предшествует дополнению, так что в основном наблюдается три типа: СПД, ПСД и ПДС.

Эти три элемента находятся в сильной корреляции.

А. Родительный падеж

Пусть дано выражение XU -а (икс игрека). Представляется, что динамическое образование этого комплекса можно описать следующим образом. Сначала понятие Y , которое в русском языке маркируется окончанием родительного падежа, благодаря этому факту возбуждается, и превращается в понятие Y' . Глагольные спектры понятий X и Y' проходят через общую катастрофу, превращающую Y' в существенный спутник X . Как только возникает этот динамический резонанс, характеризуемый сюръективным отображением $g: P_X \Rightarrow P_Y$, области определения X на область определения Y' , возбуждение Y' исчезает и Y' возвращается к своей исходной форме Y . Резонанс не расщепляется и приводит к ограничению PX в прообразе $g^{-1}(R_Y)$, где R_Y обозначает фигуру регуляции Y в P_Y . Таким образом, отношение, связывающее X с Y в выражении XU -а, это по сути вложение

$$g = P_X \Rightarrow P_Y \supset P_Y$$

Кажется естественным записывать отображение в обычном порядке как $f: S \Rightarrow B$. На этом

² Страх врагов (можно понять в смысле страха перед врагами, а можно в смысле страха, который испытывают враги). - Прим. ред.

основании порядок ИР можно было бы считать более естественным чем РИ. Однако отображение g не задается с самого начала, а определяется парой XU , как и все множество $\text{Hom}(X, Y)$ в случае если X и U это два объекта одного и того же класса. Поэтому в обозначении $\text{Hom}(X, Y)$ порядок элементов X, Y совершенно условен, и можно с тем же успехом писать X справа, а U слева. Разница между порядками ИР и РИ поэтому также не является принципиальной.

Б. Прилагательное

Случай с определительным прилагательным несколько отличается от рассмотренного выше. Произноса прилагательное, например, обозначающее цвет, например, *белый*, задают отображение p области определения понятия X в векторное пространстве цветов V , и таким образом задают бассейн притяжения (связанный с ощущением близны). Отображение $p: P_x \Rightarrow V$ задается единственным прилагательным. Этот факт, возможно, дает ответ на вопрос, почему порядок ИПр встречается чаще порядка При⁵. Порядковые числительные и указательные местоимения имеют чисто операциональное значение. С ними не связана никакая проекция p на поле ощущений. И во многих языках, в том числе и в русском, они ставятся перед существительным, которое ими управляет.

В. Порядок слов в глагольном предложении

Прежде чем изучать фразу типа 3, рассмотрим сначала фразу типа 2 с непереходным глаголом. В предложении типа *день заканчивается*, относящемся к типу ПС, порядок ПС естествен, поскольку существование дня предшествует его концу. Порядок речи всего лишь отражает временной порядок обозначаемой катастрофы. Катастрофы рождения в мире архетипов гораздо более часты (и, возможно, менее интересны), чем катастрофы смерти и конца. И в этом типе фраз порядок ПС встречается чаще порядка СП. Существуют языки, в которых подлежащее предложения типа 3 ПСД маркируется (эргативом) и таким образом противопоставляется подлежащему предложения типа 2 ПС (которое не маркируется), однако в классических западных языках происходит ассимиляция двух типов подлежащих, и порядок ПС непереходного предложения может совпадать с порядком эргативного предложения. Правдоподобно допустить, что в любом эргативном предложении глагол S начинает переходить в существительное такого типа, что сказуемое (противопоставленное подлежащему и дополнению) идентифицируется с именем по отношению к определяющему его родительному падежу. Отсюда возникает тип СПД (гармонирующий с ИПр и ИР) и тип ПДС (гармонирующий с РИ и При как в турецком). Как в таком случае объяснить относительный успех порядка ПСД в современных восточных языках? Мы дадим этому явлению более опосредованную интерпретацию. Естественно допустить, что выражаемая предложением мысль в качестве понятия является структурно устойчивой и поэтому имеет фигуру регуляции, топология которой выражает значение этой мысли. Применим к этой фигуре регуляции гидравлическую модель из 10.3. Тогда идею можно представить геометрически в виде потенциальной ямы (обозначим этот потенциал через Z), внутри которой имеется *география*: сеть потоков, представляющих существа и объекты, участвующие в идее. Слияния этих потоков представляют действия, которые эти существа

³ В оригинале речь идет о французском слове *fille*. Здесь и ниже нам пришлось несколько дальше, чем обычно отходить от буквального перевода, чтобы адаптировать лингвистические этюды автора к русскому языку. - *Прим. ред.*

⁴ В русском языке можно использовать до семи родительных: *табло результатов оценки работы руководителей проектов ограждения газонов*. - *Прим. пер.*

производят друг с другом, то есть глаголы. Тогда выражение идеи в словесной форме приведет к разрушению всех потенциальных ям многообразиями уровня функции Z , возрастающими от $-$ до $+$. Согласно этой модели сначала будут выражены наиболее устойчивые сущности, а затем уже неустойчивые. Тип ПСД описывается следующим образом: эпигенетический ландшафт предложения содержит большой поток (подлежащее) и небольшой приток (дополнение), который впадает в подлежащее, стекая по расположенной выше долине. Другой приток, предположительно с водопадом, представляет глагол S ; он захватывает дополнение при помощи подлежащего. Последовательное затопление этого ландшафта приводит к порядку ПСД. Неслучайно, что этимология помещает *под-лежащее* внизу (ср. также латинские термины *sub-jectum* и *ob-jectum*). Почти всеобщее преобладание порядка ПД над порядком ДП объясняется легко: когда описывают дом, не начинают с крыши.

Решающий аргумент в пользу этой модели основывается на рассмотрении нарушений порядка ПСД при использовании личных местоимений. Рассмотрим сложное предложение *Петр знает, что Иван его видит*. Можно построить следующую структурную схему: все предложение *Иван его видит* переходит в существительное при помощи *что* и становится дополнением главного глагола *знает*. Личное местоимение *его* нужно рассматривать как остаток связи между подлежащим *Пьер* и дополнением глагола *видит*. Можно допустить, что в эпигенетическом ландшафте этого предложения такая связь осуществляется через второстепенную долину, которая, исходя из потока *видит* быстро приближается к главному руслу потока *Петр*. Таким образом можно объяснить, почему по мере заполнения этого ландшафта водой дополнение *его* глагола *видит* появляется перед этим глаголом.

Г. Формализация мышления

Перед нами встает центральная проблема перехода мысли в речь. На доречевом уровне мысль описывается очень сложной фигурой регуляции, объекты которой образуют очень сложный граф взаимодействия. При переходе в речь на первом этапе эти сложные взаимодействия заменяются конечной последовательностью элементарных архетипических взаимодействий, описанных в Приложении 2. Далее из полученного таким образом графа извлекается *максимальное дерево* путем обрыва наименее устойчивых связей: оборванные связи порождают личные, относительные и указательные местоимения, а также все *анафорические* связки (см. [4]). Затем это максимальное дерево проектируется на ось времени таким образом, что проекция ветвей, исходящих из элементарной вершины остается связной (ср. условие *проективности* у лингвистов, см. Примечание 2). Вероятно, что для данной мысли такая редукция может осуществляться различными неизоморфными способами. Впрочем, эта редукция часто может приводить к повреждению первоначальной мысли. Поскольку размерность пространства нейронной деятельности огромна, мы, очевидно, можем мысленно реализовать устойчивые конфигурации, у которых стабилизирующий центр имеет очень большую размерность. Но когда мы хотим выразить эту мысль, мы должны развернуть этот организующий центр и действовать при помощи локальных сечений размерности не большей четырех. В результате оказывается, что наше словесное мышление, которое является сознательным, поскольку оно допускает коммуникацию, находится на периферии фигуры регуляции, то есть достаточно далеко от организующего центра мысли. Оно туда проникает наподобие грибочка и в конце концов полностью сгнивает. Так происходит формализация мышления.

В этих условиях может возникнуть вопрос, действительно ли любую мысль можно передать. Фундаментальный постулат психоанализа, согласно которому организующий центр любой систематизированной психической деятельности может быть осознан, т.е. формализован независимо от своей сложности, требует осторожного отношения. Большинству математиков

знакомо чувство непосредственной уверенности, которое их охватывает при важном открытии. Мысль уже находится в голове, но ее формализация может потребовать длительного времени, иногда нескольких лет, причем не исключено, что она никогда не произойдет.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] $\Psi\upsilon\chi\eta\sigma \text{ \textit{\epsilon}\sigma\tau\iota \textit{\lambda}\omicron\gamma\omicron\sigma \textit{\epsilon}\alpha\upsilon\tau\omicron\nu \textit{\alpha}\upsilon\zeta\iota\omicron\nu}$

Форма души растет бесконечно¹

Мы здесь предлагаем новую интерпретацию одной из самых загадочных максим Гераклита.

[2] О сновидениях. В нашей метаболической модели фигуры регуляции глобальная динамика является гамильтоновой и, следовательно, обратимой во времени. Однако в состоянии бодрствования среднее поле взаимодействий Z заданное на пространстве стимулов U всегда имеет корректирующее направление $s \Rightarrow r(s)$. Эта необратимость должна быть компенсирована другим периодом, где поле взаимодействия направлено противоположным образом $r(s) \Rightarrow s$. Не выполняют ли сновидения эту функцию?

[3] Современное аксиоматическое мышление, сводящее значение к формальным свойствам выражения, делит со своим старшим братом - примитивным или мифологическим мышлением - сомнительную честь быть полностью лишенным юмора.

[4] Заметим, что в улье место индивида, т.е. его функция, меняется с возрастом. По мере старения рабочей пчелы ее виды деятельности перемещаются от зародышевого центра (забота о только что вылупившихся личинках) к телесной деятельности (воскошение, затем сбор пыльцы).

[5] Интеллигенция (художники и ученые) в этой модели общества играет роль оси денежной циркуляции. Освобожденные от тягот производства и лишены преимуществ и ответственности власти, они занимают центральную позицию, постоянно находясь в «глазе циклона». Согласно нашей модели, представленной в 11.1 В в них можно усмотреть хромосомы общественного тела.

[6] Гадания. Потрясает тот факт что все старые и современные техники угадывания будущего основываются на следующем принципе: локально изучается некоторая обобщенная катастрофа (кофейная гуща, линии руки, комбинация карт, форма птичьей печени и т.д.) и по соответствующему изоморфизму морфология этой катастрофы связывается с обстоятельствами и проблемами клиента. В той мере, в какой динамика морфогенеза и динамика, управляющая человеческими ситуациями, могут содержать изоморфные события, этот метод не является абсурдным, и одаренный ясновидец может уловить ценные подсказки. Очевидно, окончательная кодификация этих изоморфизмов будет означать впадение в ярко выраженное бредовое состояние.

[7] Мысль о том, что мозговая деятельность моделирует окружающее пространство, неизбежность которой поражает такого профана как я, кажется, вовсе неизвестна нейрофизиологам. Однако ее можно найти в работе Дж.З. Йонга *Модель мозга* (J.Z.Jong, *A model of the brain*, Oxford University Press, 1964).

[8] Некоторые математики делают вид, что «видят» n -мерное пространство \mathbf{R}^n . Не надо им верить. На самом деле, математик, как и любой порядочный гражданин, видит только трехмерное пространство \mathbf{R}^3 , но благодаря врожденной или приобретенной интеллектуальной ловкости он умеет замечать пространство \mathbf{R}^n пространством \mathbf{R}^3 , мысленно заставляя последнее двигаться соответствующим способом. Впрочем, я знаю немало замечательных математиков, которые неспособны представить себе более или менее сложную трехмерную фигуру.

[9] Другое плоское сечение той же особенности (близкой к эллиптической омбилике), приводит к диаграмме действующих лиц, представленной следующим графиком:

Здесь четыре действующих лица: отправитель E , получатель D , посланник M и посылка m . При прибытии посланника M отправитель E раскалывается и испускает посылку m , которая захватыва-

ется посланником M в виде «связного состояния» (M, m) . Эта сложная система движется к получателю D , который провоцирует разделение комплекса (M, m) . После этого посылка m захватывается получателем D и освобожденный посланник M уходит в сторону.

Очевидно, существуют грамматические реализации этой схемы. Пример: Петр посылает Ивану письмо по почте. Существуют также многочисленные реализации этой схемы в биологической морфологии: во многих случаях функция посылки состоит в том, чтобы «ин-формировать» получателя, то есть перевести его в новое стационарное состояние, придать ему новую *форму*. В крайних случаях назначение посылки может состоять в том, чтобы «захватить» или уничтожить получателя (например, когда посылка m это камень, а посланник M это рука; таким образом реализуется *метательный креод*).

[10] Предполагая теперь, что число категорий, определяющих значение уменьшено, мы можем дать типологию подобных явлений, исчерпывающим образом описывая структуры сообщений. Такая типология дала бы объективный взгляд, в рамках которого переменным было бы только содержание, представляющее семантический микрокосм. (А. Гримас, *Структурная семантика*: А.Ж. Greimas, *Semantique structurale*, Larousse, Paris, 1966, p.133)

[11] Представляется, что будущее исследований в области синтаксиса лежит в изучении внутриядерных явлений, которые логически обеспечиваются такими же сложными структурами, как структуры клетки, молекулы или атома в материальном мире. (см. [4] ch.16, p.157)

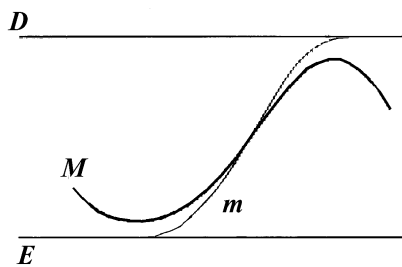
[12] В нашей терминологии понятие *проективности* определяется так: если в некоторый момент времени t_0 представляющая точка физического состояния принадлежит множеству элементарных архетипических креодов C_1, C_2, \dots, C_k , то эти креоды образуют монотонную цепь вида $C_1 < C_2 < \dots < C_k$, где $C < C_{i+1}$ означает, что субстантивированный креод C_{i+1} является аттрактором для креода C_i . Поскольку слова формируют строго классифицированную память, неудивительно, что согласно модели Приложения 1, они параметризованы в виде структуры дерева. О понятии проективности можно посмотреть: *Алгебраическая лингвистика*, Аналитические модели (*Algebraic Linguistics, Analytical Models*, S.Marcus, Academic Press, 1967, p.240)

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] С. Zeeman, *Topology of the brain*, Mathematics and Computer Science in Biology and Medicine, Medical Research Council, 1965.
- [2] R. Bellman, *Adaptive Control Processes, A guided tour*, Princeton University Press, 1961, p.94.
- [3] J.H. Greenberg, *Universals of language*, The M.I.T. Press, Cambridge (Mass.) 1966, *Some Universals of Grammar*, p.104.
- [4] L. Tesiere, *Elements of syntaxe structurale*, Klincksieck, Paris, 1966.

⁵ Так во французском; в русском языке порядок ПРИ встречается, наоборот, чаще чем ИПР. — *Прим. ред.*

¹ Фр. 115 ДК. Перевод Лебедева (цит. соч.) *Душе присуще самовозрастающая мера.*— Прим. ред.



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РЕЗЮМЕ

ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ И КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ДИНАМИКИ

Предполагается, что читателю известны:

1. символы теории множеств: \in принадлежит, \subset подмножество, \cup объединение, \cap пересечение; понятие произведения множеств $E \times F$, то есть множества пар (e, f) , где $e \in E, f \in F$; понятие отображения множеств, инъективные, сюръективные и биективные отображения; отношение эквивалентности.

2. элементарные теоремы анализа: понятие производной, интеграла, частичной производной, формула для производной сложной функции, формула Тейлора; существование и единственность локальных решений системы дифференциальных уравнений.

3. основы линейной и полилинейной алгебры: векторное пространство (на действительных числах), линейное отображение, ранг линейного отображения, детерминант; понятие двойственного векторного пространства, линейной формы; транспонирование отображения; внешняя производная, внешнее произведение.

1. ЕВКЛИДОВО Q -МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО \mathbf{R}^Q

Предположим что состояние физической системы A может быть полностью охарактеризовано значениями q параметров x_1, x_2, \dots, x_q . Состояние системы A , таким образом, полностью отражается системой q действительных чисел (x_1, x_2, \dots, x_q) , то есть точкой евклидова q -мерного пространства \mathbf{R}^q . Если даны две такие точки

$$(x_1, x_2, \dots, x_q) \quad (y_1, y_2, \dots, y_q)$$

пространства \mathbf{R}^q , то евклидово расстояние между ними определяют по формуле

$$d(x, y)^2 = \sum_{j=1}^q (x_j - y_j)^2$$

Множество точек y пространства \mathbf{R}^q , расположенных от x на расстоянии меньшем некоторого положительного числа R , представляет собой (открытый) шар с центром x и радиусом R . Для трех любых точек из \mathbf{R}^q (x, y, z) имеет место неравенство треугольника:

$$d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$$

Если задана произвольная система, состоящая из q чисел a_1, a_2, \dots, a_q , то в общем случае невозможно приготовить *состояние* системы A , которое представляет эта система чисел (в частности, если значения параметров a_j слишком велики). Точки пространства \mathbf{R}^q , способные представлять физически реализуемые состояния системы A , образуют в \mathbf{R}^q *область определения* M_A системы A .

Но значения параметров никогда не бывают известными с абсолютной точностью. Поэтому если точка $a(a_1, a_2, \dots, a_q)$ принадлежит M_A , т.е. представляет физически осуществимое со-

стояние системы A , то и каждая точка $b(b_1, b_2 \dots b_n)$, достаточно близкая к a , также задает осуществимую систему. Множество M_a имеет, таким образом, следующие свойства: если M_a содержит некоторую точку a , то M_a содержит и шар с центром в a и достаточно малым радиусом $r(a)$. Множества из \mathbf{R}^n с такими свойствами образуют то, что называется топологией *открытых множеств*.

Если любые две точки a и b из M_a могут быть соединены путем, целиком содержащемся в M_a , то говорят, что M_a связна; любое открытое множество в \mathbf{R}^n раскладывается на объединение (самое большое, счетное) непересекающихся областей связности.

Если любые два пути (c) , (c') соединяющие a и b в области MA могут быть непрерывно преобразованы один в другой, то говорят, что MA связна просто. Множество путей, соединяющих a и b , которые могут быть непрерывно преобразованы в путь c , составляет то, что называется *гомотопическим классом путей*. Путь, у которого начало и конец совпадают, называется *петлей*.

Множество точек в \mathbf{R}^n , которые не принадлежат множеству M , образуют по определению дополнение M , обозначаемое $\mathbf{R}^n - M$. По определению, дополнение открытого множества является *закрытым* множеством (и наоборот).

Объединение открытых множеств является открытым, пересечение закрытых — закрытым. Если дано открытое множество M , то пересечение всех закрытых множеств, содержащих M , тоже будет закрытым множеством, которое называют *замыканием* M и обозначают \bar{M} (с чертой). Множество-разность $\bar{M} - M$ (с чертой) называется *границей* M . В окрестности всякой точки c из $\bar{M} - M$ (с чертой) имеются точки из M , но сама точка c не содержится в M . Если M — область определения физической системы A , то в любой точке границы M возникает новое грубое явление, которое не позволяет реализовать A в этой точке. Отсюда происходит понятие *закрытого множества катастроф*, введенное в главе 4.

Множество A из \mathbf{R}^n , называется *ограниченным*, если оно расположено внутри шара с центром O и конечным радиусом. Закрытое ограниченное множество называется *компактным*.

2. ОТОБРАЖЕНИЯ

Предположим, что задание физической системы A полностью определяет систему B (например, если B это подсистема A). Предположим также, что A параметризуется точками из $\mathbf{R}^n(x_1, \dots, x_n)$, а B — точками из $\mathbf{R}^m(y_1, \dots, y_m)$. Если $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — точка области определения M_A , то ей соответствует точка $y=(y_1, y_2, \dots, y_m)$ области определения M_B . Таким образом, имеется отображение F области отправления M_A в область прибытия M_B , определяемое формулами вида $y_i=f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Не надо путать область прибытия отображения с его образом. В нашем случае образом для F является множество точек b из M_B таких, что существует по крайней мере одна точка a из M_A , образом которой по F является b . Образ это подмножество области прибытия, а когда образ и область прибытия совпадают, отображение F называется сюръективным.

Прообраз. Если в области прибытия M_B задано множество C то прообразом C по F называют множество (обозначаемое $F^{-1}(C)$) точек a из M_A таких, что $F(a) \in C$. Если прообраз всякой точки из M_B пуст или состоит из единственной точки, то F называется инъективным. Если F одновременно сюръективно и инъективно, оно называется биективным (или взаимнооднозначным).

Отображение $F: M_A \Rightarrow M_B$ называется непрерывным, если прообраз любого открытого множества из M_B является открытым множеством из M_A . На самом деле, для этого достаточно,

чтобы прообраз любого шара из M_B был открытым в M_A . Таким образом, если f_k являются непрерывными в обычном смысле, то при достаточно малом $d(a, a')$, расстояние $d(f(a'), f(a))$ будет столь угодно мало.

Если U и V - два открытых множества евклидова пространства, то отображение $F: U \Rightarrow V$, которое биективно и дважды непрерывно (то есть непрерывны F и отображение, обратное F), называется *гомеоморфизмом*. Выяснить, являются ли два топологических пространства X и Y гомеоморфными - это основная задача топологии. В случае, когда эти пространства являются открытыми множествами из евклидовых пространств $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^p$, гомеоморфизм между U и V и возможен только если $n=p$ (теорема *инвариантности области*).

Непрерывное отображение $F: U \Rightarrow V$ называется *собственным*, если прообраз $F^{-1}(K)$ любого компакта K из V является компактом в U . Интуитивно это означает, что когда F собственное, $F(u)$ может достичь границы V , только в том случае, если u достигнет границы U . Если U и V являются областями определения физических систем A и B соответственно, это означает, что B не входит в катастрофу (не перестает быть определенным) пока A не перестает быть определенным.

3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Если в отображении $F: M_A \Rightarrow M_B$, заданном формулами

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

функции f_k имеют непрерывные частные производные вплоть до порядка r включительно, то говорят, что отображение F является r раз непрерывно дифференцируемым (или иначе, принадлежит классу C^r).

Суперпозиция двух отображений класса C^r также является отображением класса C^r : если $U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} W$, отображение $H = G \circ F$ из U в W также принадлежит классу C^r .

Локальная струя дифференцируемого отображения. Пусть F, G - два дифференцируемых отображения из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^p , определяемые, соответственно, формулами

$$y_j = f_j(x_i) \quad y_j = g_j(x_i) \quad \text{при том, что } O = f(0), \quad O = g(0).$$

Если частные производные функций f_j и g_j с одинаковым мультииндексом

$$(\delta^{\mu} f_j / \delta x_1)^{\nu_1} (\delta x_2)^{\nu_2} \dots (\delta x_n)^{\nu_n}, \quad (\delta^{\mu} g_j / \delta x_1)^{\nu_1} (\delta x_2)^{\nu_2} \dots (\delta x_n)^{\nu_n}$$

принимают в O равные значения, то говорят, что локальные отображения G и F имеют в начале координат общую струю порядка r .

Множество локальных струй порядка r из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^p образуют векторное пространство (параметризуемое значениями a частных производных $Df/D_{\alpha} x$ (где α - мультииндекс). Понятие локальной струи представляет собой систематизацию классического понятия конечного разложения порядка r дифференцируемой функции.

Если $H = G \circ F$ является суперпозицией двух локальных отображений класса C^r , то струя порядка r определяется для H как (полиномиальная) функция струй порядка r отображений F и G .

Локальные пути и векторы. Пусть дана точка a из \mathbb{R}^n . *Дифференцируемым путем* с началом в a называется дифференцируемое отображение f отрезка $I = (0, 1)$ в \mathbb{R}^n такое, что $f(0) = a$. Его локальные уравнения имеют вид $x = f(t)$. Если имеется дифференцируемое отображение $F: \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^p$ и если $b = F(a)$, то любой путь из a определяет с помощью суперпозиции $I \Rightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^p$ некоторый дифференцируемый путь из b . Впрочем, если два пути f, g из a имеют в O общую струю первого порядка (т.е. если $f'(0) = g'(0)$), то образы путей $F(f), F(g)$ тоже имеют в O общую струю первого порядка (это вытекает из теоремы о производной сложной функции). Множество

струй первого порядка образуют векторное пространство (параметризуемое координатами $f'(0)$) размерности n , равной размерности пространства. Это пространство называется векторным пространством, касательным к \mathbf{R}^n в точке a и обозначается $T_a(\mathbf{R}^n)$.

Любое дифференцируемое отображение $F: \mathbf{R}^n \Rightarrow \mathbf{R}^p$ задает посредством суперпозиции линейное отображение F' из $T_a(\mathbf{R}^n)$ в $T_b(\mathbf{R}^p)$, где $b=F(a)$ обычно называют *линейным отображением, касательным к F в точке a из \mathbf{R}^n* . Поскольку это линейное отображение зависит дифференцируемым образом от исходной точки a , в действительности над пространством отправления \mathbf{R}^n имеется целое поле линейных отображений из \mathbf{R}^n в \mathbf{R}^p .

Теорема о неявных функциях. Диффеоморфизмы. Пусть F - локальное отображение класса C^b из $\mathbf{R}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в $\mathbf{R}^m(y_1, y_2, \dots, y_m)$, задаваемое при помощи $y_i=f_i(x)$, где $O=f(0)$. Если линейное касательное отображение имеет ранг n (то есть сюръективно), что выражается в том, что определитель частных производных $|\delta f_i / \delta x_j|$ не равен нулю в O , то отображение F является локально обратимым, то есть существует локальное отображение G (класса C) окрестности O : в окрестность O такое, что $G \circ F$ и $F \circ G$ являются тождественными отображениями.

Если даны два открытых множества U, V евклидова пространства \mathbf{R}^n , то отображение $F: U \Rightarrow V$, которое имеет обратное отображение $G: V \Rightarrow U$ (также класса C) называется *диффеоморфизмом* класса C . Теорема о неявной функции утверждает, что отображение $F: \mathbf{R}^n \Rightarrow \mathbf{R}^p$ является локальным диффеоморфизмом в окрестности любой точки, причем ранг F равен самое большее n . Более общо, если имеется отображение $F: \mathbf{R}^n \Rightarrow \mathbf{R}^p$, имеющее максимальный ранг (большее из чисел n и p), то можно утверждать, что

а) если $p > n$, то отображение F локально является *погружением*, т.е. оно локально является погружением в подпространство, которое с помощью замены координат (диффеоморфизма) пространства прибытия локально преобразуется в линейное подмногообразие размерности n .

б) Если $n > p$, то отображение F может быть при помощи диффеоморфизма пространства отправления локально преобразовано в линейную *проекцию* $L: \mathbf{R}^n \Rightarrow \mathbf{R}^p$.

4. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Вернемся к случаю, когда физическая система A параметризована q параметрами x_1, x_2, \dots, x_n . Если состояние системы A изменяется во времени, то эта эволюция будет описываться функциями $x_j(t)$, определяющими некоторый путь в области определения A (открытом множестве M_A). Часто случается, что A изменяется не произвольно, а так, что некоторые функции $G_1(x_1), \dots, G_s(x_s)$ остаются при этом неизменными (то есть при любых значениях t $G_m(x_i(t))=G_m(x_i(t_0))$). Такие функции называются *первыми интегралами* эволюции системы. Геометрически это означает, что представляющая точка перемещается не по всему M , но в пределах подмножества, задаваемого $G_m(x_i)=G_m(x_i(0))$.

Предположим, что в любой точке этого подмножества ранг отображения $G: \mathbf{R}^n \Rightarrow \mathbf{R}^s$ ($s < q$) максимален. Это означает, что в каждой точке этого множества существует минор ранга s матрицы частных производных $\delta G_s / \delta x_i$ (необязательно один и тот же). В окрестности каждой точки этого множества существует локальный диффеоморфизм пространства \mathbf{R}^q , который преобразует это множество в линейное подмногообразие коразмерности s . Это множество называется *погруженным многообразием* размерности $n-s$.

Понятие погруженного многообразия является обобщением таких понятий, как кривая на плоскости, поверхность в трехмерном пространстве и т.д.

Абстрактное многообразие. Дифференцируемое многообразие можно определить как отдельное топологическое пространство, покрытое картами U_i . Каждая карта U_i это открытое

множество евклидова пространства \mathbf{R}^n ; на (непустом) пересечении двух открытых множеств U_i, U_j одна и та же точка пространства имеет двух представителей: p_i в U_i и p_j в U_j . Соответствие между p_i и p_j задается диффеоморфизмом h_{ij} , где h_{ij} отвечают условию склейки: $h_{ik} = h_{ij} \circ h_{jk}$, когда эти выражения определены. Можно показать (Г. Уитни), что любое паракомпактное многообразие (счетное объединение компактов) V^n размерности n может быть погружено в пространство двойной размерности \mathbf{R}^{2n} . Однако в общем случае не существует системы из n уравнений $G_1 = G_2 = \dots = G_n = 0$, глобально определяющих это многообразие, для которых $dG_1 \wedge dG_2 \wedge \dots \wedge dG_n = 0$ всюду на V^n .

Понятие расслоенного дифференцируемого пространства. Пусть U^{n+r}, Y^n - два дифференцируемых многообразия, p - дифференцируемое отображение (дифференцируемое в системе карт многообразий отправления и прибытия) из U в Y . Предположим, что это отображение имеет максимальный ранг n . Тогда по теореме о неявной функции прообраз $p^{-1}(y)$ любой точки y из Y является подмногообразием коразмерности n .

Заметим, что если U и F - два дифференцируемых многообразия, то их топологическое произведение $Y = U \times F$ также является дифференцируемым многообразием (картами на Y можно считать произведение карт U и F), и каноническая проекция $Y \rightarrow U$ является отображением максимального ранга, равного размерности U . Дифференцируемое отображение $p: U \rightarrow Y$ называется дифференцируемым расслоением, если любая точка y из Y имеет открытую окрестность V_y , отвечающую следующему условию (называемому *локальной тривиальностью*): существует диффеоморфизм h прообраза $p^{-1}(y)$ на произведение V_y и многообразия (слоя) F такое, что h превращает отображение p в каноническую проекцию из $V_y \times F$ на V_y . Если U связно, то все слои F расслоения $p: U \rightarrow Y$ диффеоморфны.

Любое собственное отображение $p: U \rightarrow Y$ максимального ранга (равного размерности U) является дифференцируемым расслоением (теорема Эресмана). Следовательно слой F является компактным многообразием.

Расслоенное векторное пространство, касательное к многообразию V . Если V - многообразие размерности n , определяемое картами U_i и склейками h_{ij} , то из множества векторов касательных к V можно построить многообразие размерности $2n$. Действительно, всякий вектор пространства V задается своей исходной точкой u и n скалярными составляющими $[u, 0]$ на локальной карте U_i . Локальная карта на $T(V)$ имеет вид $U_i \times \mathbf{R}^n$, где составляющие $u, 0$ играют роль координат \mathbf{R}^n . Диффеоморфизм h_{ij} продолжается до диффеоморфизма h из $U_i \times \mathbf{R}^n$ в $U_j \times \mathbf{R}^n$. Этот диффеоморфизм задается линейным обратимым преобразованием $c: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, которое зависит от u . Именно это имеют в виду, говоря, что пространство $T(V) \rightarrow V$ является *векторным расслоением* на многообразии V .

По техническим причинам в механике играет существенную роль не векторное, а ковекторное расслоение $T^*(V)$. Слоем этого пространства является двумерное векторное пространство T^* , двойственное векторному пространству, касательному к V в данной точке.

Сечение расслоения. Пусть дано расслоение $p: U \rightarrow Y$. Сечением расслоения называется любое отображение $s: Y \rightarrow U$, такое что $p \circ s$ является тождественным отображением. Иначе говоря, любой точке y базы Y можно поставить в соответствие точку $s(y)$ из слоя $p^{-1}(y)$ над y . Если U и Y - дифференцируемые многообразия, то сечение s называется r раз дифференцируемым, когда оно является отображением из Y в E класса C^r .

5. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Сечение расслоения $T(V) \rightarrow V$ векторов, касательных к многообразию V , называется по определению *векторным полем* на V . Точки u из V такие, что $s(u)$ это нулевой вектор, являются

особенностями данного поля. Сечение расслоения ковекторов $T^*(U)V$ называется по определению дифференциальной 1-формой на V .

Форма, индуцируемая дифференциальным отображением. Пусть $F:U \Rightarrow V$ - дифференцируемое отображение многообразия U в многообразии V и пусть a 1-форма на V . Если X является вектором U , то можно определить на U форму a^* следующим образом:

$$(X, a^*) = (F(X), a)$$

В частности, на действительной прямой \mathbf{R} имеется каноническая дифференциальная 1-форма j , которая на векторе X из \mathbf{R} принимает в качестве значения алгебраическую меру X . Если F является отображением многообразия M в \mathbf{R} (действительная функция), то индуцируемая таким образом форма $j^*(j)$ будет ничем иным как дифференциалом df функции f .

6. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Пусть X - векторное поле на многообразии M . Если это поле класса C^1 , то система дифференциальных уравнений $dm/dt = X(m)$ локально будет иметь единственное решение. Через каждую точку $u \in M$ будет проходить кривая решения, которая будет единственной в произведении $M \times \mathbf{R}$, где \mathbf{R} это ось времени. Поскольку многообразие M компактно, существует параметрическая группа диффеоморфизмов этого многообразия $h(t)$ такая, что $dh/dt = X(h(t))$. Пусть p - точка из M и $p_t = h(t, p)$ - траектория, выходящая из p . Обозначим через $\alpha(p)$ и $\omega(p)$ множества предельных положений p_t в M при t стремящемся, соответственно, к $-\infty$ и $+\infty$. *Аттрактором* динамической системы называется замкнутое множество K , не зависящее от h , которое содержит предельное множество любой точки из окрестности K в M , и такое, что если $\alpha(p) \in K$, то также $p \in K$ (однако этот термин используется и в более общем смысле, см. 4.1.Б). Биркгоф назвал *блуждающей* (wandering) точку p , которая имеет такую окрестность B , что $h_t(p)$ не попадает в B при достаточно больших t . *Не блуждающие* (non-wandering) точки это практически рекуррентные точки системы: во всякой окрестности такой точки p имеются траектории, которые бесконечно возвращаются в эту окрестность. Это различие имеет большое качественное значение, поскольку *все непреходящие особенности, то есть особенности стационарного характера*, которые может иметь та или иная динамика, имеют в качестве базы множество стационарных точек.

Градиентные динамические системы. На любом дифференцируемом многообразии существует риманова метрика ds^2 . Под этим подразумевается положительно определенная квадратичная форма Q , задаваемая на касательном векторном пространстве в каждой точке. Если имеется дифференцируемый путь $I \xrightarrow{f} M$, то интеграл $\int \sqrt{Q(df/dt)} dt$ является длиной пути в метрике ds^2 . Если V - функция с действительными значениями на M , то поле X , определяемое равенством $\langle X, Y \rangle = dV(Y)$, где $\langle \rangle$ обозначает скалярное произведение, связанное с квадратичной формой Q , называется *градиентом* функции V . Градиентная динамическая система содержит только блуждающие точки, поскольку функция V монотонно возрастает вдоль любой траектории не считая особых точек поля, в которых дифференциал dV равен нулю. Градиенты представляют собой в некотором смысле простейшие динамические системы: почти каждая траектория стремится к аттрактору, который в общем случае является изолированным максимумом функции V .

Гамильтоновы динамические системы. На расслоении $T^*(M)$ ковекторов касательных к M зададим 1-форму A следующим образом: пусть $T^*(M) \Rightarrow M$ - каноническая проекция и пусть (y, u) - ковектор с началом в y . Далее, пусть X - вектор касательный к $T^*(M)$ с началом в (y, u) , и пусть $A(X) = u(p(X))$. Если q образует на M систему локальных координат, то на соответствующей карте из $T^*(M)$ имеются координаты (q, p) , где $p_i = Q_i/q_i$ - момент, связанный с пере-

менной q . Таким образом $A = \sum_i p_i dq_i$.

Консервативная гамильтонова система определяется заданием функции $H: T^*(M) \Rightarrow \mathbf{R}$ с действительными значениями. Поле X определяется таким образом: если $dA = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ - внешний дифференциал A , то $dA(X, Y) = dH(Y)$. В локальных координатах поле X задается гамильтоновыми уравнениями:

$$Q = - \frac{\delta H}{\delta p_i} \quad p_i = \frac{\delta H}{\delta q_i}$$

Для гамильтоновых полей гамильтониан H (то есть энергия) является первым интегралом. Кроме того, они сохраняют инвариантной 2-форму dA и ее внешнее произведение

$$\wedge^n (dA) = dA \wedge dA \wedge \dots \wedge dA = dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_n.$$

n раз

В $T^*(M)$ существует инвариантный объем, и на любой гиперповерхности $H = \text{const}$. Поэтому гамильтонова система не может иметь строгих аттракторов, и почти любая точка в такой системе является не блуждающей (это *теорема возврата* Пуанкаре). Равным образом к любой компактной гиперповерхности постоянной энергии $H = \text{const}$ применима эргодическая теорема Биркгофа, согласно которой почти для любой точки m и любой измеримой функции $f: T^*(M) \Rightarrow \mathbf{R}$, существует среднее значение $1/T \int_0^T f(m_t) dt$. Если этот предел является одним и тем же в любой точке (и равен среднему значению f на многообразии $H = \text{const}$ для инвариантной меры), то говорят, что поле является *эргодическим*. Вопреки достаточно распространенному в трудах по статистической механике утверждению, случаи, когда гамильтоново поле является эргодическим, оказываются весьма редкими, так как такое поле может обеспечивать структурную устойчивость инвариантных множеств ненулевой меры, не покрывающих все многообразие.

7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. МНОГООБРАЗИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

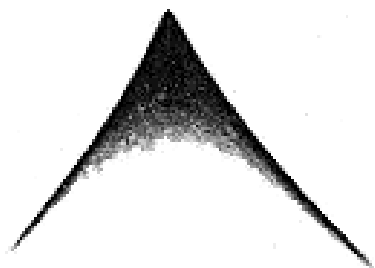
Пусть U, V - два дифференцируемые многообразия, а f - отображение из U в V . Любой точке u из U можно поставить в соответствие вариацию v точки-образа $v = f(u)$. Если брать в качестве возможных вариаций $\delta v(u)$ любые дифференцируемые функции u , то будут заданы все отображения g , близкие к f . Эти вариации, рассматриваемые как векторы касательные к f образуют векторное пространство бесконечной размерности. Можно считать, что функциональное пространство $L(U, V)$ отображений из U в V является бесконечным дифференцируемым многообразием. Мы отсылаем читателя к работам по функциональному анализу за определениями и особенностями топологий (Гильбертово, Банахово пространства, пространство Фреше), которые могут налагаться на векторное пространство бесконечной размерности и, следовательно, на многообразие бесконечной размерности. Для нас представляет интерес только случай замкнутого подпространства L конечной размерности, а именно множество бифуркаций H . При изучении подмножеств этого типа выбор топологии для пространства касательных векторов $\delta v(u)$ практически не играет роли.

Иллюстрации

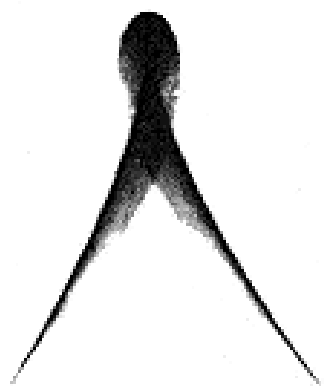
1



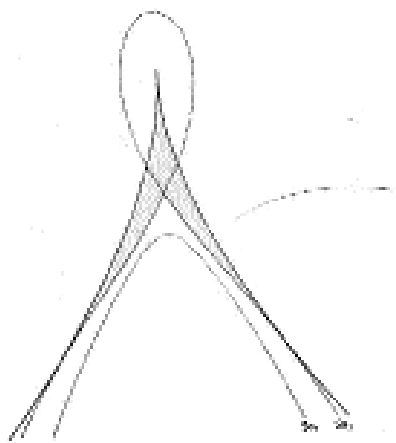
2

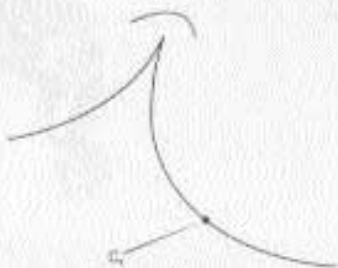
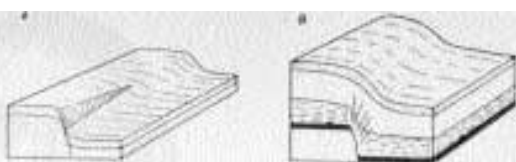


3



4

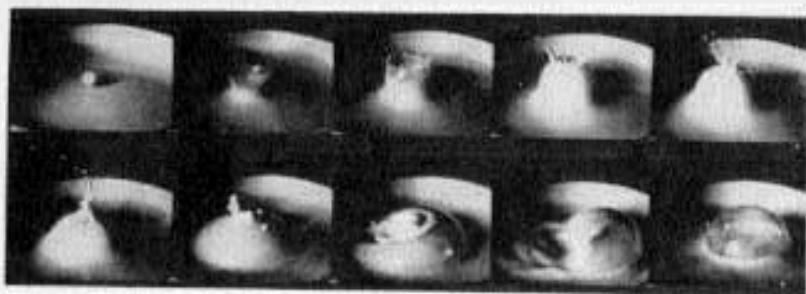




6



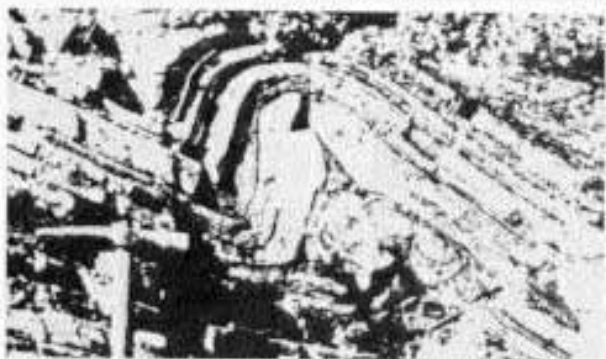
7



8



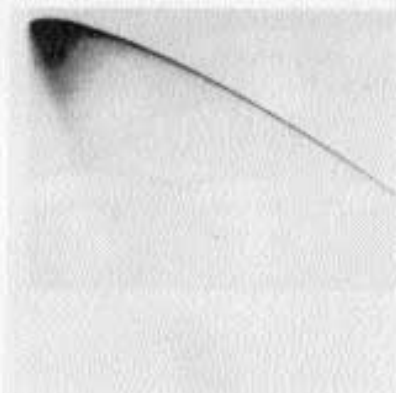
9



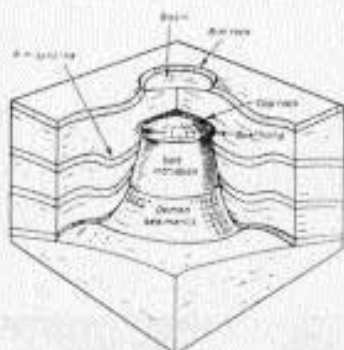
10



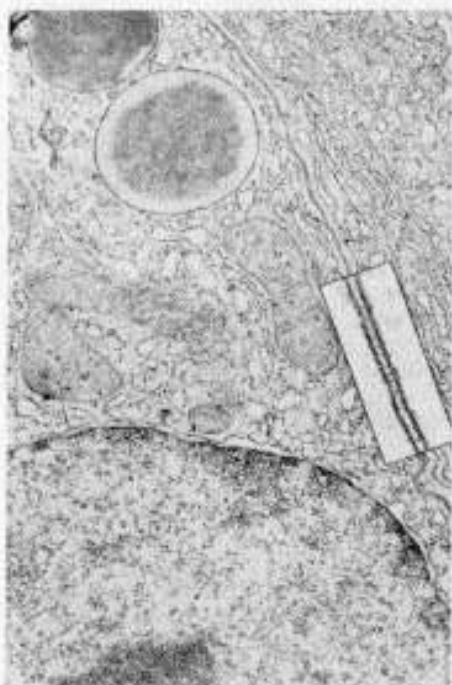
11



12

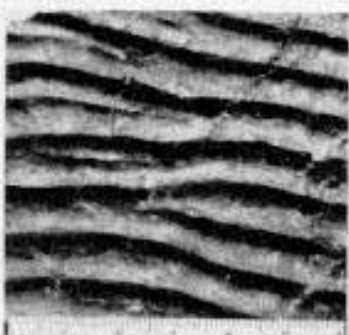


13

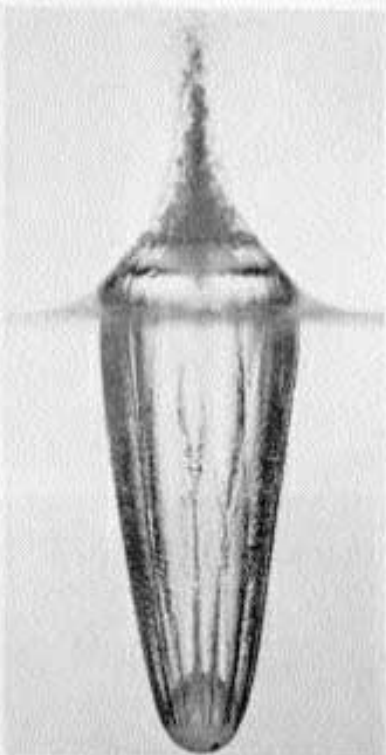


15

14

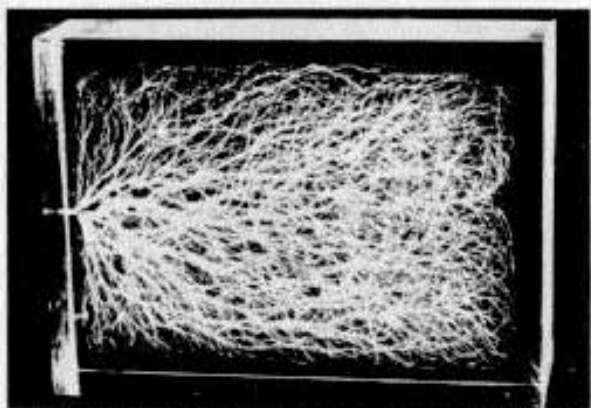


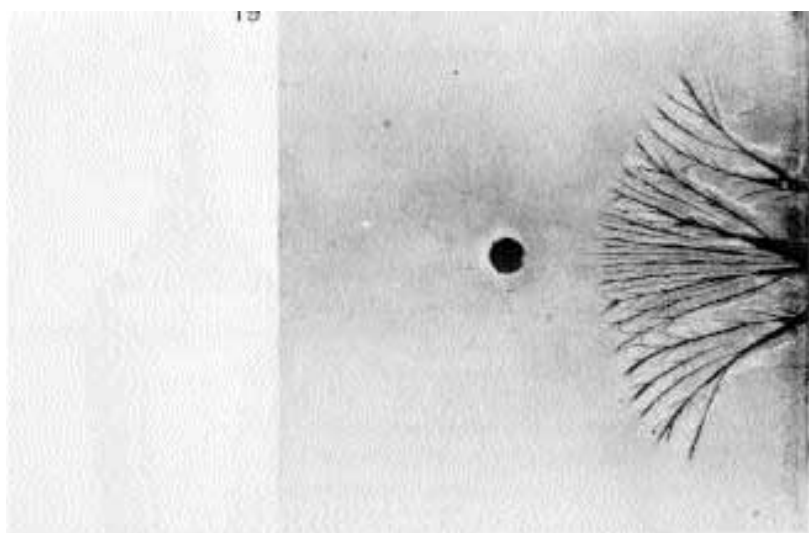
16



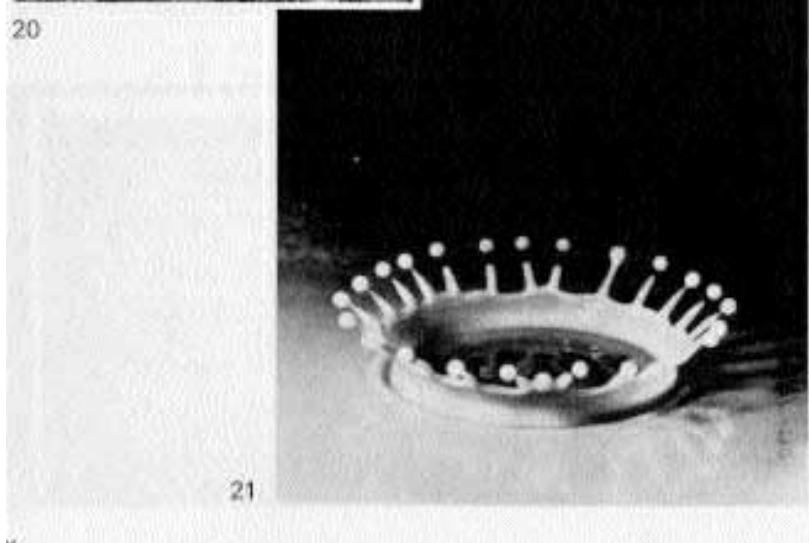
17

18





20



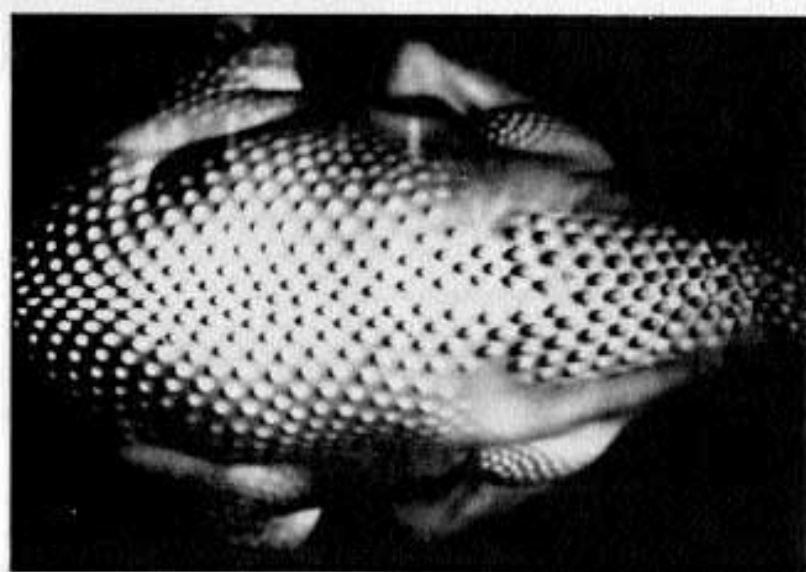
21



22



23



24

25





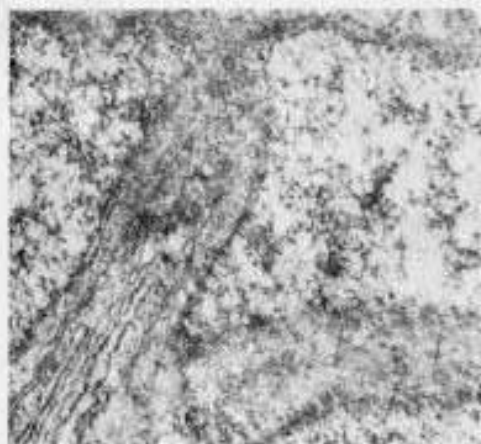
26



27 a



27 b



28

Иллюстрации:

1. «Она вызывает у зрителя состояние тоски и тревоги» Американская публикация конца 19-го века о рекламе кисточек для бритья.
Цит. по: Romi, *Histoire de l'Insolite*, Pont Royal, Paris, 1964
- 2,3,4. Каустика с острием, связанная с точкой сборки. Кривые 5a1 и 5a2 ограничивают пучок света. Средняя кривая представляет собой сечение плоскостью экрана поверхности каустики (см. рис. 5-3).
5. Сборка (катастрофа Римана-Гюгонио) в геологии: образование провала (см. рис. 5-3).
Заимствовано из: E. Scherbon Hills, *Elements of Structural Geology*, Methuen, London, 1963
6. Ласточкин хвост в геометрической оптике. Зарождающаяся точечная особенность C_1 развивается в C_2 (см. рис. 5-7).
7. Пузыри на пляже (см. рис. 5-13).
Заимствовано из: W. Bascom *Waves and Beaches*, Doubleday, NY
8. Образование пузыря. Падение капли вызывает реактивное возникновение лунки со слабо обрушивающимися краями. Эта лунка закрывается посредством сложной катастрофы, которая вызывает многочисленные обрушения эллиптического типа. Фотографии сделаны проф. Эдгертона (H.E. Edgerton, MIT)
9. Универсальная развертка гиперболической омбилики в геометрической оптике.
10. Геологическая складка в точке разлома.
Заимствовано из: *Elements of Structural Geology*, цит. соч.
11. Биологическая складка в точке повторного закрытия: нейрализация у жабы *Xenopus Levis*.
Заимствовано из: Archives de Biologie, t.61, p.113.
12. Развертка параболической омбилики (ср. с рис. 5-24).
13. Минеральный гриб (ср. с рис. 5-24).
Заимствовано из: *Elements of Structural Geology*, цит. соч.
14. Геологический пример ламинарной катастрофы: речное дно.
Заимствовано из: *Elements of Structural Geology*, цит. соч.
15. Биологический пример ламинарной катастрофы: эргастоплазма экзокринной клетки поджелудочной железы.
Заимствовано из: K.R. Porter, *Structure fine des cellules et des tissus*, Paris, Ediscience, 1969
16. Пример частично нитеобразной катастрофы: полость, образовавшаяся при падении сферы в воду (см. рис. 6-1 и параграф 6.1С).
Заимствовано из: G. Birkhoff and H. Zarantonello, *Jets, Wakes and Cavities*, Acad. Press, NY, 1957.
17. Пример частично нитеобразной катастрофы: туманность Краба (остатки от взрыва суперновой).
18. Катастрофа с пространственным параметром: электрическая искра в пластическом материале (см. рис. 6-1). Образец любезно предоставлен Робером Мутоном (Robert Mouton).
19. Под действием пули трещины распространяются от краев стакана, разветвляясь в направлении точки удара (см. рис. 6-1).
Фото проф. Эдгертона (H.E. Edgerton, MIT).
20. Наложение двух ламинарных катастроф: расщелина в сланце.
Заимствовано из: *Elements of Structural Geology*, цит. соч.

22. Обобщенная катастрофа: пример симметрии: периодическая структура на песке, образовавшаяся после стекания воды.
23. Обобщенная катастрофа: пример симметрии: зачатки перьев у эмбриона курицы. Фотография любезно предоставлена проф. Филиппом Сенгелем (Philippe Sengel, Faculte des Science de Grenoble)
24. Молодая туманность: NGC 4530.
Заимствовано из: S. Chandrasekhar, *Principles of Stellar Dynamics*, Dover, NY, 1960
25. Туманность более старшего возраста с экваториальным обрушением: NGC 4594 Заимствовано из: S. Chandrasekhar, *Principles of Stellar Dynamics*, Dover, NY, 1960
26. Гидравлические модели.
Эти гипсовые модели были любезно изготовлены Марселем Фруасаром (Marcel Froissart).
27. Срез гематоциты книдобласта (стрекательная клетка гидры). Треугольная форма срезов свидетельствует об эллиптическом характере данного органогенеза. а) срез центрального тела; б) срез нити. Фотографии сделаны Е. Ван Тонгереном (E. Van Tongeren)
28. Ганглиевая клетка гидры: на окончаниях стрел видны микротрубки, связанные с нервной функцией.
Фотографии сделаны Е. Ван Тонгереном (E. Van Tongeren).